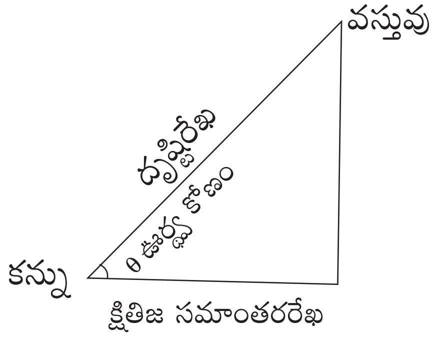
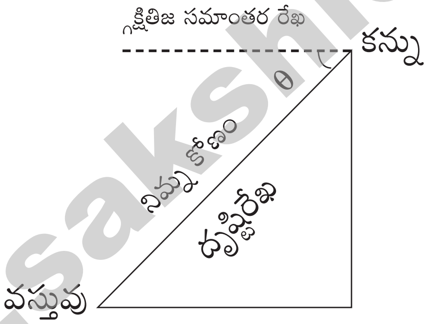
12. త్రికోణమితి అనువర్తనాలు

- భవనాలు, శిఖరాలు, టవర్లు, చెట్లు ఎత్తును కనుగొనడానికి, నది వెడల్పును, రెండు వస్తువుల మధ్య దూరాన్ని కనుగొనడానికి త్రికోణమితీయ నిష్పత్తిలను ఉపయోగిస్తాం.
- ఒక వస్తువు పై ఒక బిందువు నుంచి పరిశీలకుని కంటిని కలిపే సరళరేఖను 'దృష్టి రేఖ' అంటారు.
- క్షితిజ సమాంతర రేఖకు, దృష్టి రేఖ పై ఉన్నప్పుడు వాటి మధ్య ఏర్పడే కోణాన్ని 'ఊర్ధ్వ కోణం' అంటారు. ఈ సందర్భంలో పరిశీలకుడి తల పైకెత్తబడుతుంది.



- క్షితిజ సమాంతర రేఖకు, దృష్టి రేఖ క్రింద ఉన్నప్పుడు వాటి మధ్య ఏర్పడే కోణాన్ని 'నిమ్న కోణం' అంటారు.

  ఈ సందర్భంలో పరిశీలకుడి తల కింద వైపుకు చూస్తుంది.



- సర్వేయర్లు సర్వే చేసే ప్రక్రియలో ఊర్ధ్వకోణం, నిమ్నకోణాలను కనుక్కోవడానికి 'థియోడలైట్' అనే పరికరాన్ని వాడుతారు.
- ఎత్తులు, దూరాలకు సంబంధించిన సమస్యలు సాధించడానికి పటాలను గీసేటప్పుడు కింది విషయాలను దృష్టిలో పెట్టుకోవాలి.

  (i) గణితపరంగా సౌలభ్యం కొరకు టవర్లు, చెట్లు, భవనాలు, ఓడలు, పర్వాతాలు మొదలైనవి వాటిని రేఖీయంగానే పరిగణనలోకి తీసుకోవాలి.

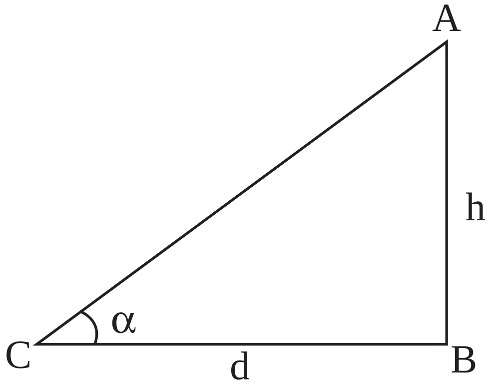
  (ii) ఊర్ధ్వకోణం లేదా నిమ్నకోణాన్ని క్షితిజ రేఖ ఆధారంగానే తీసుకోవాలి.

  (iii) సమస్యలో పరిశీలిస్తున్న వ్యక్తి ఎత్తు ఇవ్వనట్లయితే, అతడి ఎత్తును ఉపేక్షించి సమస్యను

సాధించాలి.

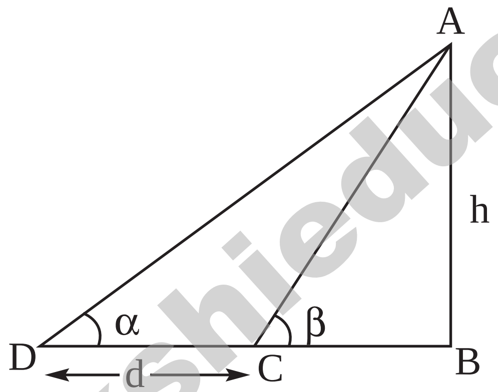
- 'h' మీటర్లు ఎత్తు ఉన్న భవనం పాదం నుంచి 'd' మీటర్ల దూరంలో ఉన్న పరిశీలకుడు 'α' ఊర్ధ్వకోణంలో చూస్తే

$\tan\alpha = \frac{h}{d}$



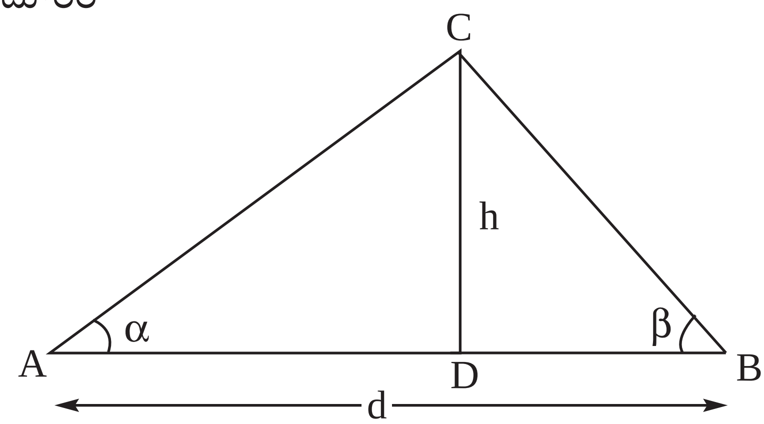
- 'h' మీటర్లు ఎత్తు ఉన్న గోపురం పై భాగంను ఒక పరిశీలకుడు 'α' కోణంతో పరిశీలించిన పిదప, గోపురం వైపు d దూరం ప్రయాణించిన తర్వాత తిరిగి గోపురం పై భాగాని 'β' కోణంతో పరిశీలిస్తే గోపురం ఎత్తు

$= \frac{d}{\cot\alpha - \cot\beta}$



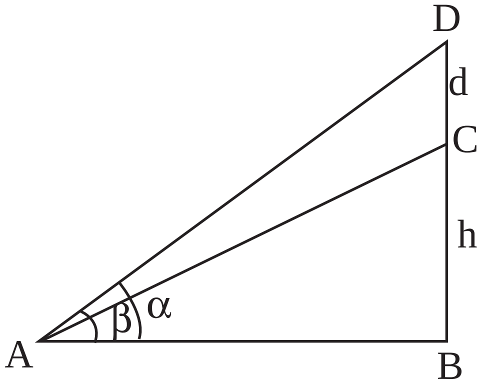
- 'h' ఎత్తు ఉన్న ఒక గోపురం పై భాగాన్ని, దాన్ని ఇరువైపులా ఉన్న ఇద్దరు వ్యక్తులు α, β ఊర్ధ్వకోణాలతో పరిశీలించారు.
ఆ ఇద్దరు వ్యక్తుల మధ్య దూరం

$d = h.\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha.\sin\beta}$



- ఒక విగ్రహం h మీటర్ల ఎత్తు ఉన్న పీఠంపై నిలబట్టబడి ఉంది. దాన్ని కొంత దూరం నుంచి పరిశీలించిన విగ్రహం పై భాగం α కోణంతో, పీఠం పై భాగం 'β' కోణంతో పరిశీలిస్తే విగ్రహం ఎత్తు

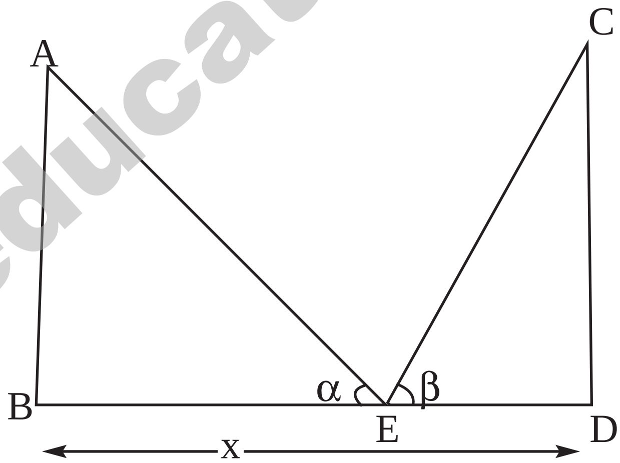
$$d = \frac{h(\cot\alpha - \cot\beta)}{\cot\beta}$$



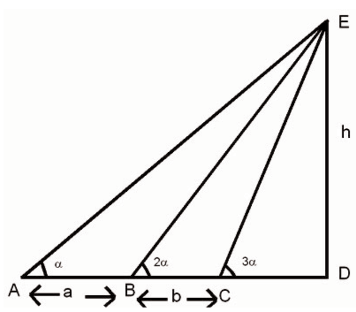
- x మీటర్లు వెడల్పైన రోడ్డుకు ఇరువైపులా సమాన ఎత్తు ఉన్న రెండు స్తంభాలు నిలబెట్టబడి ఉన్నాయి. వాటి మధ్యలో ఉన్న రోడ్డుపై ఒక బిందువు నుంచి వాటి పై భాగాలను పరిశీలించిన అవి α, β ఊర్ధ్వ కోణాలు చేస్తే ఆ స్తంభాల ఎత్తు $h = \frac{x \tan\alpha . \tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta}$

BE మధ్య దూరం $= \frac{x \tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta}$

DE మధ్య దూరం $= \frac{x \tan\alpha}{\tan\alpha + \tan\beta}$



- 'h' మీటర్ల ఎత్తు ఉన్న గోపురానికి కొంత దూరంలో ఉన్న బిందువు A నుంచి ఒక పరిశీలకుడు గోపురం పై భాగాన్ని కొంత ఊర్ధ్వకోణంతో పరిశీలించెను. బిందువు A నుంచి 'a' దూరం టవరు వైపు నడిస్తే ఆ ఊర్ధ్వకోణం రెట్టింపు అయింది. ఆ స్థానం నుంచి ఇంకా గోపురం వైపు 'b' దూరం నడిచిన తర్వాత స్థానం A వద్ద ఊర్ధ్వకోణానికి 3 రెట్లు ఊర్ధ్వకోణంలో గోపురం పై భాగం కనిపించింది. అయితే ఆ గోపురం ఎత్తు $h = \frac{a}{2b}\sqrt{(a+b)(3b-a)}$



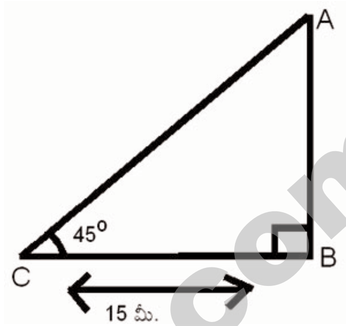
త్రికోణమితి అనువర్తనాలు

అభ్యాసం – 12. 1

1. భూమిపై ఒక టవర్ నిటారుగా నిలిచి ఉంది. ఆ టవర్ అడుగు నుంచి 15 మీటర్లు దూరం నుంచి ఆ టవర్ పై కొన 45° ఊర్ధ్వకోణంలో పరిశీలించబడింది. ఆ టవర్ ఎత్తు ఎంత?

సాధన: టవర్ ఎత్తు AB అనుకోండి.

పరిశీలన స్థానం C నుంచి ఊర్ధ్వకోణం 45° అని ఇవ్వబడినది.



టవర్ అడుగు భాగం నుంచి 'C' కు గల దూరం BC = 15 మీ.

లంబకోణం త్రిభుజం ΔABC నుంచి

$$\tan 45° = \frac{AB}{BC}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{AB}{15} \text{ మీ}$$

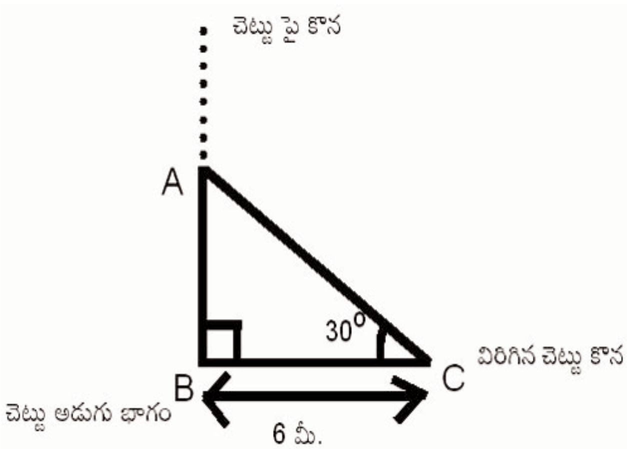
$$\Rightarrow AB = 15 \text{ మీ.}$$

∴ టవర్ ఎత్తు = 15మీ.

2. ఒక చెట్టు గాలికి విరిగి, విరిగిన పై భాగం భూమికి 30° ల కోణం చేస్తూ భూమిపై పడింది. చెట్టు అడుగు భాగం నుంచి కిందపడిన చెట్టుకొన మధ్య దూరం 6మీటర్లు. చెట్టు విరగక ముందు ఆ చెట్టు ఎత్తు ఎంత?

సాధన: లంబకోణ త్రిభుజం ABC నుంచి

$$\cos 30° = \frac{BC}{AC}$$



$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{AC}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{12}{\sqrt{3}} \text{ మీ.}$$

అదే విధంగా $\tan 30° = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{6}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{6} \Rightarrow AB = \frac{6}{\sqrt{3}} \text{ మీ.}$$

∴ విరగక ముందు చెట్టు ఎత్తు = AB + AC

$$=\left(\frac{12}{\sqrt{3}}+\frac{6}{\sqrt{3}}\right)\text{మీ.}$$

$$=\frac{18}{\sqrt{3}}\text{ మీ} = 6\sqrt{3}\text{ మీ.}$$

$\therefore$ విరగక ముందు చెట్టు ఎత్తు = 6 × 1.732

= 10.292 మీ.

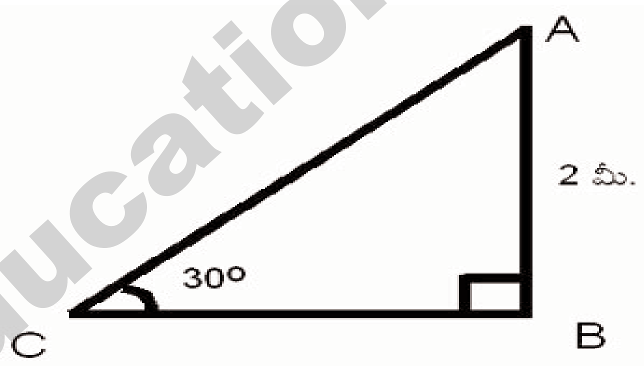
3. ఒక పార్క్‌లో పిల్లలు ఆడుకోవడానికి ఒక కాంట్రాక్టర్ ఒక జారుడు బల్లను ఏర్పాటు చేయాలనుకున్నారు. దాన్ని 2 మీటర్లు ఎత్తుతో, భూమితో 30°ల కోణం చేసేటట్లు ఏర్పరచాలంటే ఆ జారుడు బల్ల పొడవు ఎంత ఉంటుంది?

సాధన: జారుడు బల్ల ఎత్తు AB = 2 మీ

అది భూమిలో చేయు కోణం $\angle ACB = 30°$

జారుడు బల్ల పొడవు AC అయితే

లంబ కోణ త్రిభుజం ABC నుంచి



$$\sin 30° = \frac{AB}{AC}$$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{AC} \Rightarrow AC = 4$ మీ.

$\therefore$ జారుడు బల్ల పొడవు = 4మీ.

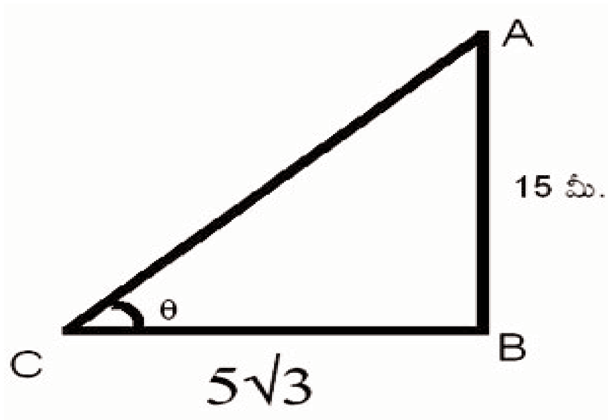
4. ఉదయం 7 గంటలకు 15 మీటర్లు ఎత్తు ఉన్న స్తంభం నీడ పొడవు $5\sqrt{3}$ మీటర్లు. ఆ సమయంలో సూర్యకిరణాలు భూమితో ఎంత కోణం చేస్తున్నాయి?

సాధన: స్తంభం ఎత్తు AB = 15 మీ.

స్తంభం నీడ పొడవు BC = $5\sqrt{3}$

సూర్యకిరణాలు భూమితో చేయు కోణం 'θ' అనుకోండి.

లంబకోణ త్రిభుజం ABC నుంచి $\tan\theta = \frac{AB}{BC}$



$\Rightarrow \tan\theta = \frac{15}{5\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \tan\theta = \sqrt{3}$ $\quad (\because \tan 60° = \sqrt{3})$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan 60°$

$\therefore \theta = 60°$

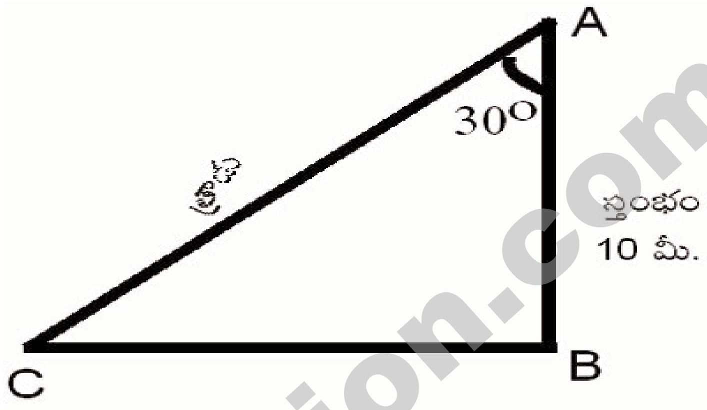
$\therefore$సూర్య కిరణాలు భూమితో చేయు కోణం = 60°.

5. పవన్ 10 మీటర్లు ఎత్తు ఉన్న స్తంభాన్ని 3 బలమైన తాళ్ళ సహాయంతో నిలబెట్టాలనుకున్నాడు. ఒక్కొక్క త్రాడు స్తంభంతో 30° కోణాన్ని చేయాల్సి ఉంటే ఎంత పొడవు త్రాడును తీసుకోవాలి?

సాధన: స్తంభం ఎత్తు AB = 10 మీ

త్రాడు పొడవు AC,త్రాడు స్తంభంతో చేయు కోణం = 30°

లంబ కోణ త్రిభుజం ABC నుంచి



$$\cos 30^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{10}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{10}{AC}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{20}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{3} = \frac{20 \times 1.732}{3}$$

$\Rightarrow$ AC = 11.55మీ.

$\therefore$ కావలసిన త్రాడు పొడవు = 11.55మీ.

6. రమేష్ భూమి నుంచి 6 మీటర్లు ఎత్తు ఉన్న భవనం పై నుంచి భూమి పై ఉన్న ఒక లక్ష్యాన్ని 60° నిమ్నకోణంలో బాణంతో ఛేదించాలనుకున్నాడు. రమేష్ నుంచి లక్ష్యం ఎంత దూరంలో ఉంటుంది.

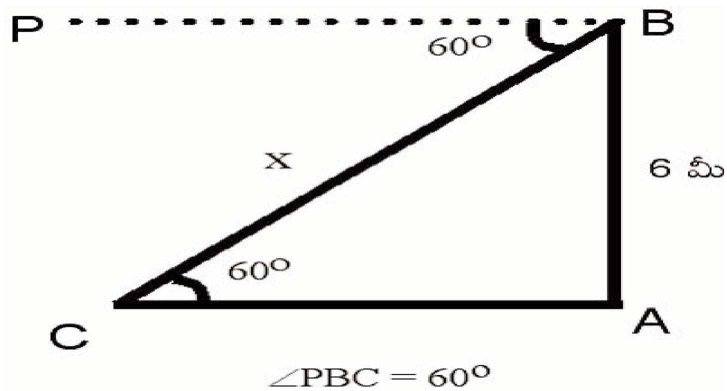
సాధన: భవనం ఎత్తు AB = 6 మీ.

భవనం పై భాగం 'B' నుంచి, లక్ష్యం 'c' ని చూడగల నిమ్న కోణం $\angle PBC = 60^\circ$.

పటం నుంచి $\angle PBC = \angle BCA = 60^\circ$

భవనం పై నుంచి, లక్ష్యానికి ఉన్న దూరం BC = x అనుకోండి.

లంబకోణ త్రిభుజం ABC



$$\sin 60^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{BC}$$

$$\Rightarrow BC = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3} \text{ మీ.}$$

$\therefore$ విజయ్ నుంచి లక్ష్యంకు ఉన్న దూరం = 4× 1.732 మీ.

= 6.928మీ.

7. 9 మీటర్ల ఎత్తు ఉన్న విద్యుత్ స్తంభం పై ఒక ఎలక్ట్రీషియన్ మరమ్మత్తు పని చేయాల్సి ఉంది. మరమ్మతు చేయడానికి ఆస్తంభం పై నుంచి 1.8 మీటర్లు తక్కువ ఎత్తుకు చేరాలి. ఒక నిచ్చెనను భూమి పై 60° కోణంతో పెట్టాల్సి వస్తే ఎంత పొడవు గల నిచ్చెనను తీసుకోవాలి. నిచ్చెన అడుగుభాగం నుంచి స్తంభం అడుగుభాగం దూరం ఎంత?

సాధన: విద్యుత్ స్తంభం ఎత్తు AB = 9 మీ.

నిచ్చెన పొడవు CD మరమ్మతు చేయడానికి చేరవలసిన స్థానం 'c' అయితే

AC = AB – BC

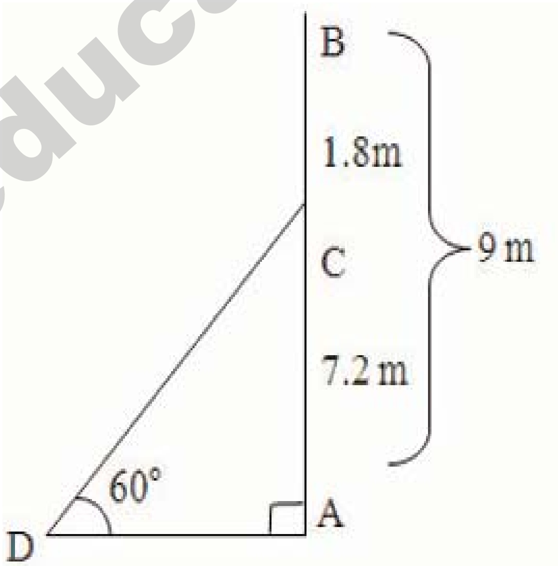
= 9 మీ – 1.8మీ.

AC = 7.2 మీ.

స్తంభం అడుగు భాగం నుంచి నిచ్చెన అడుగు భాగానికి ఉన్న దూరం AD అయితే

నిచ్చెన అడుగు భాగం,భూమితో చేయు కోణం 60° అయితే త్రిభుజం ACD నుంచి

$$\sin 60^\circ = \frac{AC}{CD}$$



$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7.2}{CD}$$

$$\Rightarrow = \frac{7.2 \times 2}{\sqrt{3}} = \frac{14.4}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{14.4 \times \sqrt{3}}{3} = 4.8 \times 1.732$$

CD = 8.3136 మీ.

∴ నిచ్చెన పొడవు = 8.3136మీ.

అదే విధంగా

$$\tan 60^\circ = \frac{AC}{AD}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{7.2}{AD}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{7.2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{7.2 \times 1.732}{3}$$

= 2.4 × 1.732

= 4.1568 మీ.

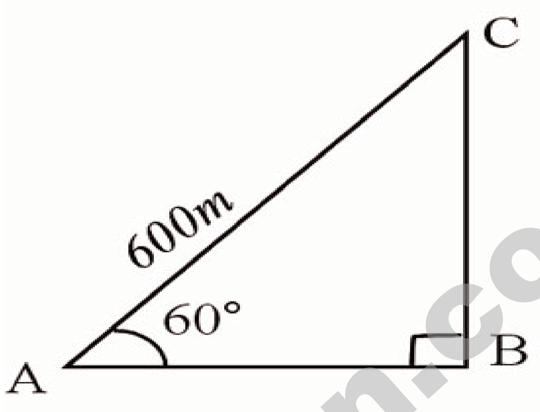
∴ స్తంభం అడుగు భాగం నుంచి, నిచ్చెన అడుగు భాగానికి ఉన్నదూరం = 4.1568మీ.

8. ఒక నావ ఒక నదిని దాటాల్సి ఉంది. నదీ ప్రవాహం కారణంగా ఆ నదీ తీరంతో 60° ల కోణం చేస్తున్న ఆ నావ 600 మీటర్లు ప్రయాణించి ఆవలి తీరాన్ని చేరింది. ఆ నది వెడల్పు ఎంత?

సాధన: నది వెడల్పు AB అనుకోండి.

నదీ తీరంతో, నావ చేస్తున్న కోణం $\angle CAB = 60°$

నావ ప్రయానించిన దూరం 600 మీ.



Δ ABC నుంచి $\cos 60° = \frac{AB}{AC}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AB}{600}$

$\Rightarrow AB = \frac{600}{2} = 300m$

$\therefore$ నది వెడల్పు = 300m.

9. 1.8 మీ ఎత్తు ఉన్న ఒక పరిశీలకుడు ఒక తాటి చెట్టు నుంచి 13.2 మీటర్లు దూరంలో ఉన్నాడు. ఆచెట్టు పై పరిశీలకుడి కంటి నుంచి 45° ఊర్ధ్వకోనం చేస్తుంది. ఆ చెట్టు ఎత్తు ఎంత?

సాధన:

పరిశీలకుడి ఎత్తు AB = 1.8 మీ.

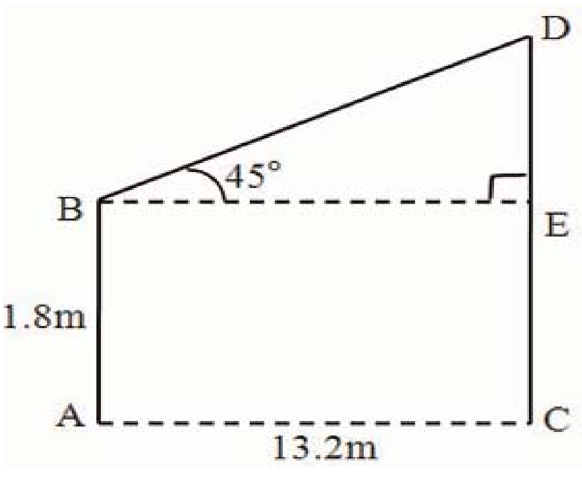
చెట్టు నుంచి పరిశీలక స్థానంకు ఉన్న దూరం AC = 13.2మీ.

పరిశీలకుని కంటి నుంచి (B నుంచి)

చెట్టు పైకి చేయు ఊర్ధ్వకోణం $\angle DBE = 45°$

చెట్టు ఎత్తు CD అనుకోండి

లంబకోణ త్రిభుజం ΔDBE నుంచి



$\tan 45° = \frac{DE}{BE} = \frac{DE}{AC}$ ($\because$ పటం నుంచి BE = AC = 13.2)

$1 = \frac{DE}{13.2}$

$\Rightarrow DE = 13.2$

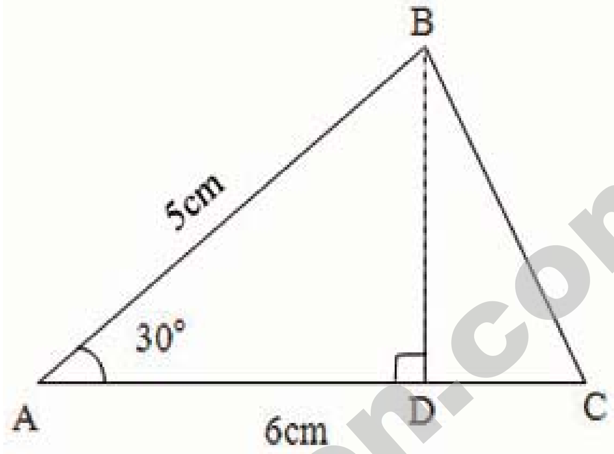
చెట్టు ఎత్తు CD = CE + DE

= 1.8 + 13.2 ($\because$ పటం నుంచి AB = CE)

= 15 మీ.

10. ప్రక్క పటంలో AC = 6 సెం.మీ., AB = 6 సెం.మీ., ∠BAC = 30° అయితే త్రిభుజ వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: త్రిభుజం ABC నుంచి $\sin 30° = \frac{BD}{AB} = \frac{BD}{5}$



$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BD}{5} \Rightarrow BD = \frac{5}{2} = 2.5$ సెం.మీ.

∴ Δ ABC వైశాల్యం $\Rightarrow \frac{1}{2} \times AC \times BD$

$= \frac{1}{2} \times 6 \times 2.5$

= 3 × 2.5

= 7.5 చ.సెం.మీ.

∴ Δ ABC వైశాల్యం = 7.5 చ.సెం.మీ.

11. ఒక TV టవర్ ఒక రోడ్డు పక్కన నిటారుగా నిలబెట్ట బడి ఉంది. రోడ్డు కు అవతరి వైపు నుంచి టవర్ పై కొనను పరిశీలించిన 60° ఊర్ధ్వ కోణం చేస్తుంది. ఇంకా టవర్ పాదం, ఈ స్థానాన్ని కలిపే సరళరేఖపై 10 మీటర్ల దూరం జరిగిన పిదప టవర్ పై కొన 30° ఊర్ధ్వకోణం చేస్తుంది. టవర్ ఎత్తును , రోడ్డు వెడల్పును కనుక్కోండి.

సాధన: టవర్ ఎత్తు AB అనుకోండి

రోడ్డు వెడల్పు BC, రెండు పరిశీలక స్థానాల మధ్య దూరం CD = 10మీ.

∠ADB = 30°, ∠ACB = 60°

లంబ కోణ త్రిభుజం ABC నుంచి $\tan 60° = \frac{AB}{BC}$

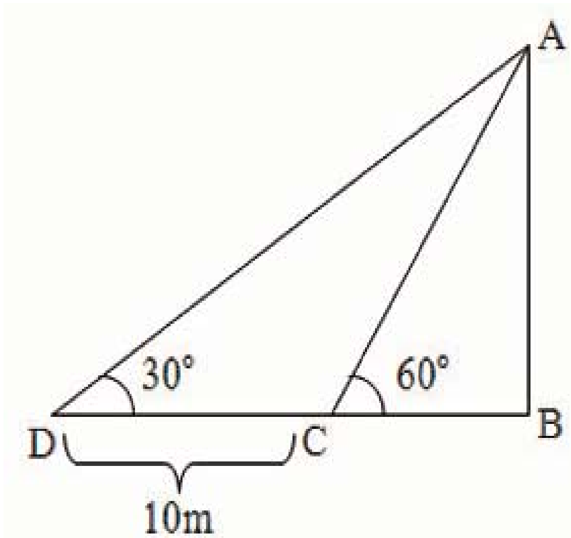
$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AB}{BC}$

$\Rightarrow AB = BC\sqrt{3}$ ______(1)

అదే విధంగా ΔADBనుంచి $\tan 30° = \frac{AB}{BD}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{BC + CD} = \frac{AB}{BC + 10}$

$\Rightarrow AB = \frac{BC + 10}{\sqrt{3}}$ ______(2)



సమీ.. (1), (2) ల నుంచి

$BC\sqrt{3} = \frac{BC+10}{\sqrt{3}}$

3BC = BC + 10

2BC = 10 ⇒ $BC = \frac{10}{2} = 5$ మీ.

BC = 5 మీ.

∴ రోడ్డు వెడల్పు BD = BC + CD

= 5 + 10 = 15 మీ.

టవర్ ఎత్తు AB = BC√3

= 5√3 మీ.

12. 1.5 మీటర్ల ఎత్తు ఉన్న ఒక బాలుడు 30 మీటర్లు ఎత్తు ఉన్న గుడిపై కొనను కొంతదూరం నుంచి పరిశీలిస్తున్నాడు. అతడు ఉన్న చోటు నుంచి ముందుకు నడిచిన గుడి గోపురం కొన అతని కంటితో చేయు కోణం 30° నుంచి 60° లకు మారింది. అతడు నడిచిన దూరం ఎంత?

సాధన: గుడి ఎత్తు AB = 30మీ.

బాలుడి ఎత్తు PR = 1.5మీ.

మొదటి పరిశీలక స్థానం p నుంచి గుడి పై కొనతో చేయు ఊర్ధ్వకోణం ∠APC = 30°

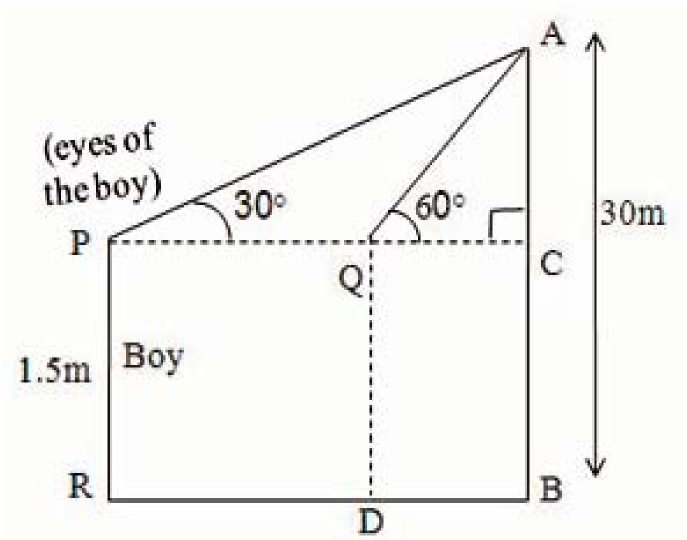
రెండో పరిశీలక స్థానం నుంచి చేయు కోణం ∠AQC = 60°

పటం నుంచి PR= BC = 1.5 మీ.

గుడి ఎత్తు AB = AC + BC

⇒ AC = AB – BC

= 30 – 1.5 = 28.5 మీ.



ΔAQC నుంచి $\tan 60^\circ = \frac{AC}{QC} = \frac{28.5}{QC}$

$\sqrt{3} = \frac{28.5}{QC}$

$\Rightarrow QC = \frac{28.5}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{28.5 \times \sqrt{3}}{3} = 9.5\sqrt{3}$ మీ.

॥ ΔAPC నుంచి $\tan 30^\circ = \frac{AC}{PC}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{28.5}{PC}$

$\Rightarrow PC = 28.5\sqrt{3}.$

$\therefore$ బాలుడు నడిచిన దూరం PC – QC
$= 28.5\sqrt{3} - 9.5\sqrt{3}$
$= 19\sqrt{3}$ మీ. $= 19 \times 1.732$
$= 32.908$ మీ.

13. ఒక విగ్రహం 2 మీటర్లు ఎత్తు ఉన్న పీఠం పై నిలబెట్టబడి ఉంది. దాన్ని కొంతదూరం నుంచి పరిశీలించిన విగ్రహం పై భాగం 60°, పీఠం పై భాగం 45° ఊర్ధ్వకోణాలు చేసున్నాయి. విగ్రహం ఎత్తు ఎంత?

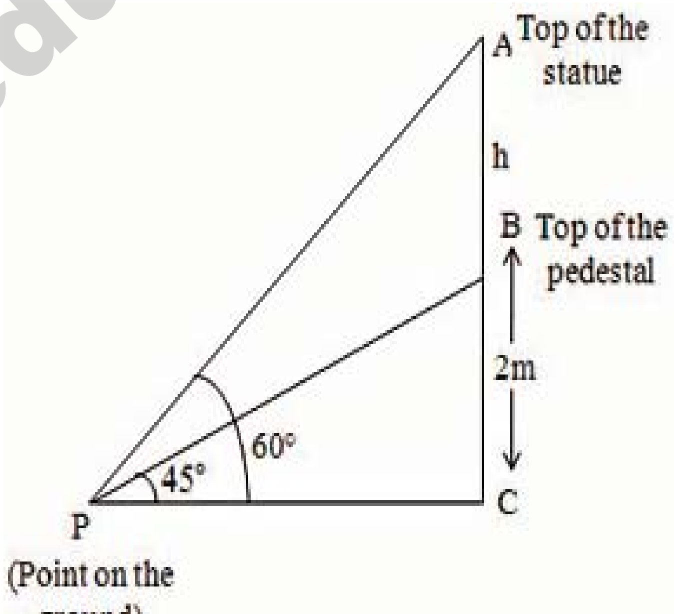
సాధన:

విగ్రహం ఎత్తు AB = h అనుకోండి.
పీఠం ఎత్తు BC = 2 మీ.
పరిశీలక స్థానం 'p' నుంచి పీఠపై భాగం చేయఊర్ధ్వ కోణం $\angle BPC = 45°$
అదే విధంగా విగ్రహ పై భాగం చేయు ఊర్ధ్వ కోణం $\angle APC = 60°$.
లంబకోణ త్రిభుజం ΔBPC నుంచి

$$\tan 45° = \frac{BC}{PC} = \frac{2}{PC}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{2}{PC}$$

$$\Rightarrow PC = 2 \text{ మీ.}$$



Δ APC నుంచి $\tan 60° = \frac{AC}{PC}$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AC}{2}$$

$$\Rightarrow AC = 2\sqrt{3}$$

$\therefore$ విగ్రహం ఎత్తు AB = AC – BC
$= 2\sqrt{3} - 2$
$= 2(\sqrt{3} - 1)$
$= 2(1.732 - 1)$
$= 2 \times 0.732$
$= 1.464$మీ.

14. ఒక భవనం పై నుంచి ఒక సెల్ టవర్ పై భాగాన్ని పరిశీలించిన 60° ఊర్ధ్వకోణం, దాన్ని పాదం 46° నిమ్నకోణం చేస్తుంది. భవనం నుంచి టవర్‌కు గల మధ్య దూరం 7 మీటర్లు అయితే టవర్ ఎత్తును కనుగొనండి.

సాధన: సెల్ టవర్ ఎత్తు CD అనుకోనండి.

భవనం ఎత్తు AB = h

భవనం, టవర్ ల మధ్యదూరం BD = 7మీ.

భవనం పై నుంచి సెల్ టవర్ పై భాగం చేయు ఊర్ధ్వ కోణం $\angle CAE = 60°$

అడుగు భాగం చేయు నిమ్నకోణం $\angle EAD = 45°$

$\Rightarrow \angle ADB = 45°$ అవుతుంది. (పటం నుంచి $\angle EAD$, $\angle A DB$ ఏకాంతర కోణాలు)

లంబకోణ త్రిభుజం CAE నుంచి

$\tan 60° = \frac{CE}{AE} = \frac{CE}{7}$ (పటం నుంచి AE = BD ఏకాంతర కోణాలు)

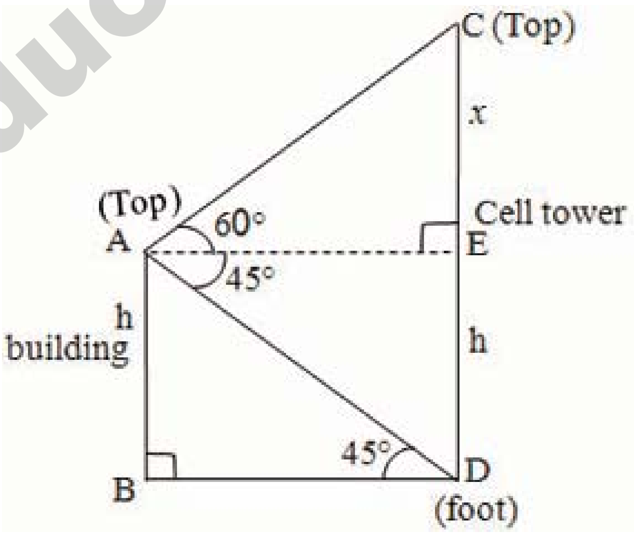
$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{CE}{7}$

$\Rightarrow CE = 7\sqrt{3}$

అదే విధంగా ΔADB నుంచి $\tan 45° = \frac{AB}{BD}$

$\Rightarrow 1 = \frac{AB}{7} \Rightarrow 1 = \frac{h}{7}$

$\Rightarrow h = 7$ మీ.



$\therefore$ DE = AB = 7మీ.

$\therefore$ సెల్ టవర్ ఎత్తు CD = CE + DE

$= 7\sqrt{3} + 7$

$= 7(\sqrt{3} + 1)$

$= 7\ (1.732 + 1)$

$= 7(2.732)$

$= 19.124$ మీ.

15. భూమితో 30° ల ఊర్ధ్వకోణం చేస్తూ 18 మీటర్ల పొడవున్న ఒక దృఢమైన లోహపు తీగ ఆధారంగా ఒక విద్యుత్ స్తంభం నిలబెట్ట బడి ఉంది. తీగపొడవు చాలా ఎక్కువ ఉన్న కారణంగా తీగలో కొంత భాగం కత్తిరించి, మిగిలిన దాన్ని భూమితో 60° కోణం చేస్తూ అమర్చబడింది. తీగలో కత్తిరించగా మిగిలిన తీగ పొడవు ఎంత?

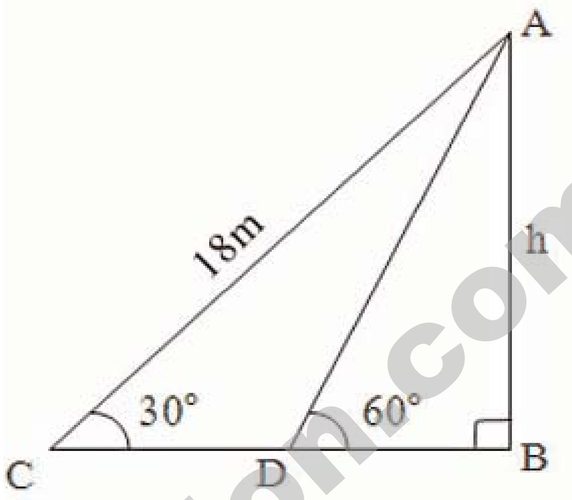
సాధన: విద్యుత్ స్తంభం ఎత్తు AB = h అనుకోండి.

తీగ పొడవు AC = 18 మీ

మొదటి కట్టిన స్థానం వద్ద చేయు కోణం $\angle ACB = 30°$

తీగలో కొంత భాగం కత్తిరించిన తర్వాత చేయుకోణం $\angle ADB = 60°$.

`పటం నుంచి



Δ ACB లో $\sin 30° = \frac{AB}{AC} = \frac{h}{18}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{18}$$

$$\Rightarrow AB = h = \frac{18}{2} = 9 \text{ మీ.}$$

Δ ADB నుంచి $\sin 60° = \frac{AB}{AD}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{AD}$$

$$AD = \frac{18}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}$$

$\therefore$ AD = 6 × 1.732 = 10.392 మీ.

$\therefore$ కత్తిరించబడిన తీగ పొడవు = AC – AD

= 18 – 10.392

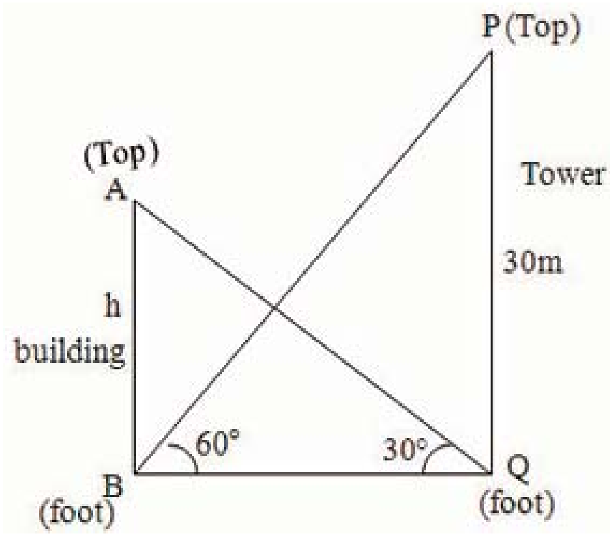
= 7.608మీ.

16. ఒక టవర్ అడుగు భాగం నుంచి భవనం పై భాగం 30° ఊర్ధ్వకోణం చేస్తుంది. భవనం అడుగు భాగం నుంచి టవర్ పై భాగం 60° ఊర్ధ్వకోణం చేస్తుంది. టవర్ ఎత్తు 30 మీటర్లు అయితే భవనం ఎత్తు కనుగొనండి.

సాధన: భవనం ఎత్తు AB = h అనుకొనండి

టవర్ ఎత్తు PQ = 30 మీ.

పటం నుంచి



Δ PQB నుంచి $\tan 60° = \frac{PQ}{BQ}$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{30}{BQ}$$

$$\Rightarrow BQ = \frac{30}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3} \text{ మీ.}$$

అదే విధంగా Δ ABQ నుంచి

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{BQ}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{10\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 10$$ మీ.

∴ భవనం ఎత్తు AB = 10 మీ.

17. 120 అడుగుల వెడల్పైన రోడ్డుకు ఇరువైపులా సమాన ఎత్తు కలిగిన రెండు స్తంభాలు నిలబెట్టబడి ఉన్నాయి. వాటి మధ్యలో ఉన్న రోడ్డు పై ఒక బిందువు నుంచి వాటిపై భాగాలను పరిశీలించిన అవి 60°, 30° ఊర్ధ్వకోణాలు చేస్తున్నాయి. అయితే ఆ స్తంభాల ఎత్తు కనుగొనండి. ప్రతిస్తంభం అడుగు భాగం నుంచి బిండున్న దూరాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: రెండు స్తంభాలు ఎత్తులు

AB = PQ = H అనుకొనండి.

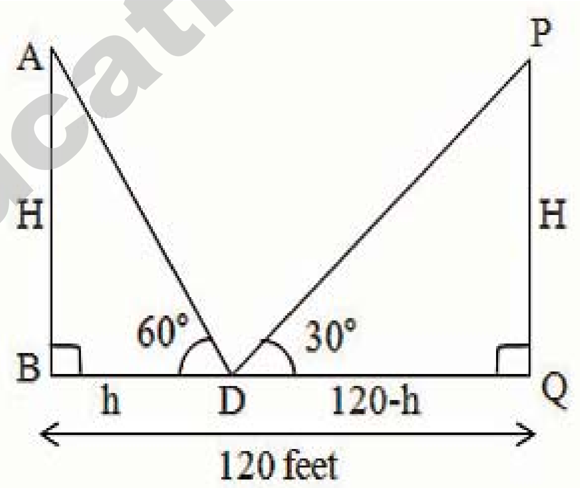
రెండు స్తంభాలు మధ్య దూరం BQ = 120 అడుగులు.

రోడ్డుపై మధ్య గల బిందువు D అనుకొండి.

BD = h అనుకొండి

అప్పుడు DQ = 120 – h అవుతుంది

Δ ADB నుంచి



$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{BD}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AB}{h} \Rightarrow H = h\sqrt{3} \;\_\_\_\_\_(1)$$

అదే విధంగా Δ PQD నుంచి $\tan 30^\circ = \frac{PQ}{DQ}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{H}{120-h} \qquad (\because DQ = 120-h)$$

$$\Rightarrow H = \frac{120-h}{\sqrt{3}} \;\_\_\_\_\_(2)$$

సమీ. (1), (2) ల నుంచి

$$h\sqrt{3} = \frac{120-h}{\sqrt{3}}$$

$\Rightarrow 3h = 120 - h$
$\Rightarrow 4h = 120$

$\Rightarrow h = \frac{120}{4} = 30$ అవుతుంది.

$\therefore$ BD = 30 అడుగులు

DQ = 120 – h = 120 – 30 = 90 అడుగులు.

$\therefore$ రెండు స్తంభాల ఎత్తులు $H = h\sqrt{3}$

$\Rightarrow H = 30\sqrt{3}$
$\Rightarrow H = 30 \times 1.732$
= 51.96 అడుగులు.

రెండు స్తంభాల నుంచి పరిశీలక బిందువుకు ఉన్న దూరాలు 30 అడుగులు, 90 అడుగులు.

18. టవర్‌తో ఒక సరళ రేఖపై ఉండే 4 మీటర్లు, 9మీటర్లు దూరంలో ఉన్న రెండు బిందువుల నుంచి టవర్ కొనను పరిశీలించిన చేసే ఊర్ధ్వకోణాలు పూరకాలు. టవర్ ఎత్తును కనుగొనండి.

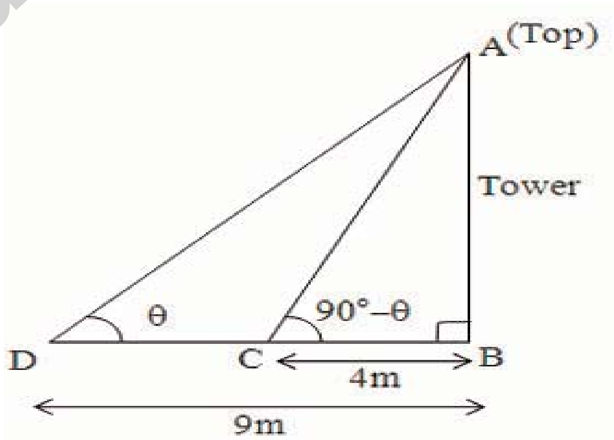
సాధన:

టవర్ ఎత్తు AB అనుకొనండి.

ఒకే సరళ రేఖపై ఉన్న రెండు బిందువులు C, D ల నుంచి టవర్ కొనను పరిశీలించిన ఏర్పడే ఊర్ధ్వకోణాలు పూరకాలు కాబట్టి అవి.

θ, $90° - \theta$ అవుతుంది.

$\Rightarrow \angle ADB = \theta, \angle ACB = 90° - \theta$



Δ ADB నుంచి $\tan\theta = \frac{AB}{DB}$

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{AB}{9}$ ______(1)

Δ ACB నుంచి $\tan(90° - \theta) = \frac{AB}{CB}$

$\Rightarrow \tan(90° - \theta) = \frac{AB}{4}$

$\Rightarrow \cot\theta = \frac{AB}{4}$ ______(2) $\quad (\because \tan(90° - \theta) = \cot\theta)$

సమీ. (1), (2) లను గుణించగా

$\tan\theta.\cot\theta = \frac{AB}{9} \times \frac{AB}{4}$

$\Rightarrow \tan\theta.\frac{1}{\tan\theta} = \frac{AB^2}{36}$

$$\Rightarrow \frac{AB^2}{36} = 1$$

$\Rightarrow AB^2 = 36$

$\Rightarrow AB = 6.$

$\therefore$ టవర్ ఎత్తు = 6 మీటర్లు.

19. భూమి పై ఉన్న A బిందువు నుంచి ఒక జెట్ విమానాన్ని పరిశీలిస్తే 60° ఊర్ధ్వకోణం చేస్తుంది. 15 సెకన్ల తర్వాత దాని ఊర్ధ్వ కోణం 30° మారుతుంది. ఆ జెట్ విమానం $1500\sqrt{3}$ మీటర్ల స్థిర ఎత్తులో ఎగురుతూ ఉంటే దాని వేగాన్ని కనుక్కోండి.($\sqrt{3} = 1.732$).

సాధన: ఎగురుతున్న జెట్ విమానం రెండు పరిశీలక స్థానాలు Q, R అనుకొనండి.

పరిశీలక బిందువు A వద్ద మొదటి స్థానం Q ఊర్ధ్వ కోణం

$\angle QAP = 60°$.

అదే విధంగా రెండో స్థానం 'R' ఊర్ధ్వకోణం

$\angle RAS = 30°$.

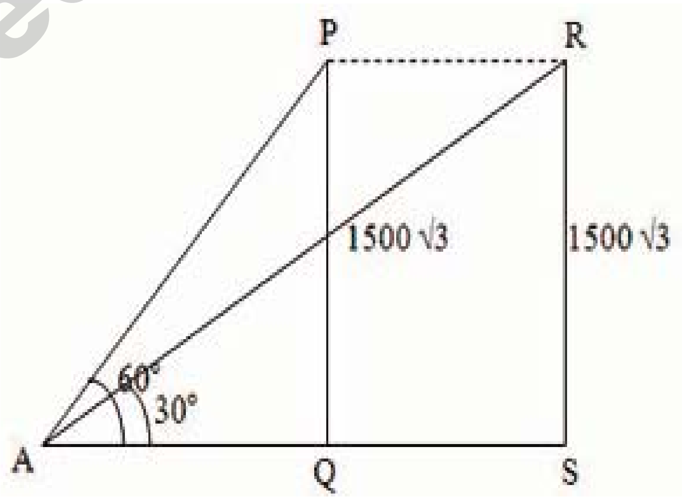
విమానం ఎగురుతున్న ఎత్తు $PQ = RS = 1500\sqrt{3}$ మీ.

ఇపుడు Δ QAP నుంచి

$$\Rightarrow \tan 60° = \frac{PQ}{AP}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{1500\sqrt{3}}{AP}$$

$$\Rightarrow AP = \frac{1500\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1500$$ మీటర్లు.



Δ RAS నుంచి

$$\Rightarrow \tan 30° = \frac{RS}{AS}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1500\sqrt{3}}{AS}$$

$$\Rightarrow AS = 1500\sqrt{3} \times \sqrt{3}$$

$= 1500 \times 3 = 4500$ మీటర్లు.

$\therefore$ 15 సెకనుల్లో జెట్ విమానం ప్రయాణించిన దూరం $PS = AS - AP$

$= 4500 - 1500$

$= 3000$ మీటర్లు.

జెట్ విమానం వేగం $= \dfrac{\text{దూరం}}{\text{వేగం}} = \dfrac{3000}{15} = 200$ మీ/సె.

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

1. ఒక టవర్ అడుగు భాగం నుంచి 500 మీటర్ల దూరంలో ఉన్న పరిశీలన స్థానం నుంచి టవర్ కొన భాగాన్ని $30°$ తో పరిశీలిస్తే, ఆ టవర్ ఎత్తు = ________ [ ]

(A) $200\sqrt{3}$ మీ. (B) $500\sqrt{3}$ మీ.

(C) $\dfrac{500}{\sqrt{3}}$ మీ. (D) $250\sqrt{3}$ మీ.

2. 6 మీ. ఎత్తు ఉన్న కరెంటు స్తంభం, నీడ పొడవు $2\sqrt{3}$మీ. అయితే ఆ సమయంలో సూర్య కిరణాలు, భూమితో చేసే కోణం ________ [ ]

(A) $60°$ (B) $45°$

(C) $30°$ (D) $90°$

3. భూమితో సూర్య కిరణాలు చేసే కోణం $30°$ అయినప్పుడు 100 మీ. పొడవు ఉన్న స్తంభం నీడ పొడవు ________ మీ [ ]

(A) $100\sqrt{3}$ మీ. (B) 100 మీ

(C) $100(\sqrt{3} - 1)$ మీ. (D) $\dfrac{100}{\sqrt{3}}$ మీ

4. ఒక మనిషి పొడవు, అతని నీడ పొడవు సమానం అయినప్పుడు భూమితో సూర్యకిరణాలు చేసే కోణం ________ [ ]

(A) $30°$ (B) $60°$

(C) $45°$ (D) $15°$

5. 100 మీ. పొడవు ఉన్న ఒక స్తంభం పాదం నుంచి 100మీ. దూరంలో క్షితిజ రేఖపై ఉన్న పరిశీలక స్థానం నుంచి పరిశీలక కోణం ________ [ ]

(A) $30°$ (B) $60°$

(C) $45°$ (D) ఏదీకాదు

6. $200\sqrt{3}$ మీ. పొడవు ఉన్న చెట్టు పాదం నుంచి క్షితిజ రేఖపై 200మీ. దూరం గల పరిశీలక స్థానం నుంచి చెట్టు కొన చేసే ఊర్ధ్వకోణం ________ [ ]

(A) $30°$ (B) $45°$

(C) 60°　　(D) ఏదీకాదు

7. $5\sqrt{3}$ మీ. ఎత్తు ఉన్న స్తంభం నీడ పొడవు 5మీ. అయితే సమయంలో సూర్యకిరణాలు, భూమితో చేసే కోణం ____________ [ ]

(A) 30°　　(B) 45°

(C) 60°　　(D) 90°

8. భూమితో సూర్యకిరణాలు 30° కోణం చేయునపుడు 10మీ. పొడవు ఉన్న చెట్టు నీడ పొడవు _______మీ. [ ]

(A) 10మీ.　　(B) $\frac{10}{\sqrt{3}}$ మీ.

(C) $10\sqrt{3}$ మీ.　　(D) 20 మీ.

9. ఒక చెట్టు పాదం నుంచి క్షితిజ సమాంతర రేఖపై 20మీ. దూరంలో ఉన్న పరిశీలన స్థానం నుంచి చెట్టుపై ఉన్న పక్షిని 60° ఊర్ధ్వకోణంతో పరిశీలిస్తే చెట్టు ఎత్తు _______ [ ]

(A) $20\sqrt{3}$ మీ.　　(B) $10\sqrt{3}$ మీ.

(C) 20 మీ.　　(D)10 మీ.

10. 20మీ., 14మీ. పొడవులు ఉన్న రెండు స్తంభాల కొనలను ఒక త్రాడుతో కలుపబడింది. ఆత్రాడు క్షితిజ సమాంతరంలో 30° కోణం చేసిన త్రాడు పొడవు _________ [ ]

(A) 6మీ.　　(B) 8మీ.

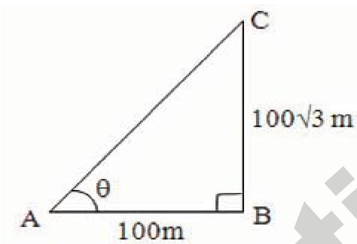
(C) 10మీ.　　(D) 12మీ.

సమాధానాలు:

1. C　2. A　3. A　4. C　5. C　6. C　7. C　8. C　9. A
10. D

ఖాళీలను పూరించండి:

1. ఒక చెట్టు ఎత్తు, దాని నీడ పొడవులు $1:\frac{1}{\sqrt{3}}$ ఉన్న సమయంలో సూర్యకిరణాలు భూమితో చేసే కోణం ________ డిగ్రీలు
2. h_1, h_2 ఎత్తు ఉన్న రెండు స్తంభాల అడుగు భాగంలను కలిపే క్షితిజ రేఖపై ఉన్న ఒక బిందువు నుంచి స్తంభాల కొన చేసే ఊర్ధ్వ కోణాలు వరుసగా 60°, 30°లు అయితే $h_1: h_2$ = __________
3. ఒక వస్తువు పై ఒక బిందువు నుంచి పరిశీలకుని కంటిని కలిపే సరళరేఖను _______ అంటారు.
4. సూర్యకిరణాలు భూమితో 45°కోణం చేయు సమయంలో 12మీ. ఎత్తు ఉన్న చెట్టు నీడ పొడవు __________ మీ.
5. ప్రక్క పటం నుంచి θ = ________



6. సూర్యకిరణాలు భూమితో 30° కోణం చేయు సమయంలో ఒక చెట్టు ఎత్తు, దాని నీడ పొడవుల నిష్పత్తి __________.
7. క్షితిజ సమాంతర రేఖకు, దృష్టి రేఖ పైన ఉన్నప్పుడు వాటి మధ్య ఏర్పడే కోణాన్ని ________ అంటారు.
8. క్షితిజ సమాంతర రేఖకు, దృష్టి రేఖ కింద ఉన్నప్పుడు వాటి మధ్య ఏర్పడే కోణాన్ని ________ అంటారు.
9. 60మీ. ఎత్తు ఉన్న బ్రిడ్జి పై నుంచి నదిలో ఉన్న ఒక పడవను 60° నిమ్నకోణంతో గమనిస్తే.. బ్రిడ్జి అడుగుభాగం నుంచి పడవకు ఉన్న దూరం _________
10. ఒక వస్తువు ఎత్తును లేదా ఆ వస్తువుల ఉండే దూరాన్ని కనుగొనడానికి, రెండు వస్తువుల మధ్య దూరాన్ని లెక్కించడానికి _______ వాడతాం.

సమాధానాలు:

1. 60° 2. 3 : 1 3. దృష్టిరేఖ 4. 12మీ. 5. 60°
6. 1 : √3 7. ఊర్ధ్వ కోణం 8. నిమ్నకోణం 9. 20√3మీ.
10. త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు.