అధ్యాయం – 8

సరూప త్రిభుజాలు

ముఖ్యాంశాలు:

1. ఒక బహుభుజిలో భుజాలన్ని, కోణాలన్ని సమానంగా ఉంటే దాన్ని క్రమ బహుభుజి అంటారు.

2. సమాన సంఖ్యలో భుజాలు కల అన్ని క్రమబహుభుజులు ఎప్పుడు సరూపాలే.

3. అన్ని చతురస్రాలు, సమబహు త్రిభుజాలు సరూపాలే.

4. సర్వసమాన పటాలన్ని సరూపాలు కాని అన్ని సరూప పటాలు సర్వసమాన పటాలు కానవసరం లేదు.

5. రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు కావాలంటే

(i) వాటి అనురూప కోణాలు సమానంగా ఉండాలి.

(ii) వాటి అనురూప భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో ఉండాలి.

6. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ అంటే ΔABC, ΔDEF లు సరూపాలు అని అర్థం.

7. ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతం (థేల్స్ సిద్ధాంతం): ఒక త్రిభుజంలో ఒక భుజానికి సమాంతరంగా గీసిన రేఖ మిగిలిన రెండు భుజాలను వేరువేరు బిందువులలో ఖండించిన, ఆ మిగిలిన రెండు భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో విభజిస్తారు.

8. థేల్స్ సిద్ధాంత విపర్యయం: ఒక త్రిభుజంలో ఏవైనా రెండు భుజాలను ఒకే నిష్పత్తిలో విభజించు సరళ రేఖ, మూడో భుజానికి సమాంతరంగా ఉండును.

9. ఒక చతుర్భుజం ABCD లో కర్ణాలు‘0’బిందువు వద్ద ఖండించుకొనును, అయితే అది ఒక ట్రెపీజియం.

10. ఒక త్రిభుజంలో ఒక భుజం మధ్య బిందువు గుండా పోయేరేఖ, రెండో భుజానికి సమాంతరంగా ఉంటే అది మూడో భుజాన్ని సమద్వి ఖండన చేస్తుంది.

11. రెండు త్రిభుజాలలో అనురూప కోణాలు సమానంగా ఉంటే వాటి అనురూప భుజాలు నిష్పత్తులు సమానంగా ఉంటాయి. (అనుపాతంలో ఉంటాయి). ఇంకా ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు.

12. భు.భు.భు. నియమం: ఒక త్రిభుజంలోని భుజాలు వేరొక త్రిభుజంలోని భుజాలకు అనుపాతంలో ఉన్న ఆ రెండు త్రిభుజాలలోని అనురూప కోణాలు సమానం ఇంకా ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు.

13. కో.కో.కో. నియమం: ఒక త్రిభుజంలో రెండు కోణాలు వరుసగా వేరొక త్రిభుజంలోని రెండు కోణాలకు సమానమైన ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు.

14. భు.కో.భు. నియమం: ఒక త్రిభుజంలోని ఒక కోణం, వేరొక త్రిభుజం ఒక కోణానికి సమానమై. ఈ కోణాలను కలిగి ఉన్న భుజాలు అనుపాతంలో ఉంటే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు.

15. రెండు సరూప త్రిభుజాలు వైశాల్యాల నిష్పత్తి వాటి అనురూప భుజాల నిష్పత్తి వర్గానికి సమానం.

16. బోధాయన సిద్ధాంతం (పైథాగరస్ సిద్ధాంతం): ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో కర్ణం మీది వర్గం, మిగిలిన రెండు భుజాల వర్గాల మొత్తానికి సమానం.

17. వ్యతిరేక ప్రవచనం: ఒక ప్రవచనం చివర కాదు చేర్చడం వలన ఏర్పడే కొత్త ప్రవచనాన్ని వ్యతిరేక ప్రవచనం అంటారు.

P : Δ ABC ఒక సమబాహు త్రిభుజం (ప్రవచనం)

~P : Δ ABC ఒక సమబాహు త్రిభుజం కాదు. (వ్యతిరేక ప్రవచనం)

18. సంయుక్త ప్రవచనం: రెండు సరళ ప్రవచనాలను కలుపగా ఏర్పడే ప్రవచనాన్ని సంయుక్త ప్రవచనం అంటారు.

19. అనుషంగికం (లేదా) నియత ప్రవచనం: రెండు సరళ ప్రవచనాలను కలపగా ఏర్పడే ప్రవచనాలను నియత ప్రవచనం అంటారు. రెండు సరళ ప్రవచనాలు p, q లను అయితే కలపగా p అయితే q వస్తుంది. దీనినే $p \Rightarrow q$ గా రాస్తాం.

ఉదా: P : ABC ఒక త్రిభుజం

q : త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం 180°

$P \Rightarrow q$: ABC ఒక త్రిభుజం అయితే త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం 180°

20. ప్రవచన విపర్యయం: $p \Rightarrow q$ లో p, q లను తారుమారు చేయగా $q \Rightarrow p$ వస్తుంది. దీనినే ప్రవచన విపర్యయం అంటాం.

ఉదా: $p \Rightarrow q$ ΔABC లో $AB = AC$ అయితే $\angle C = \angle B$

$q \Rightarrow p$ ΔABC లో $\angle C = \angle B$ అయితే $AB = AC$

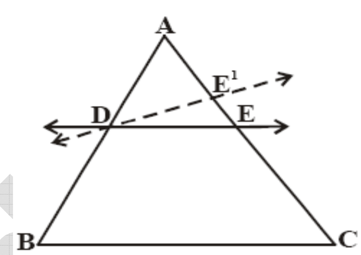
లఘు సమాధాన ప్రశ్నలు

1. ఒక త్రిభుజంలో ఏవైనా రెండు భుజాలను ఒకే నిష్పత్తిలో విభజించు సరళ రేఖ మూడవ భుజానికి సమాంతరంగా ఉండును.

జ. దత్తాంశం: ΔABC లో $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ అయినట్లు DE సరళరేఖను గీయాలి.

సారాంశం: $DE \parallel BC$

ఉపపత్తి: DE, BC కి సమాంతరం కాదు అనుకొండి.



BC కి సమాంతరంగా DE^1 గీయాలి.

అప్పుడు $\frac{AD}{DB} = \frac{AE^1}{E^1C}$ (థెల్స్ సిద్ధాంతం ప్రకారం) .... (1)

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (దత్తాంశం) .... (2)

(1), (2) ల నుంచి

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AE^1}{E^1C}$$

'1' ని ఇరువైపులా కలపగా

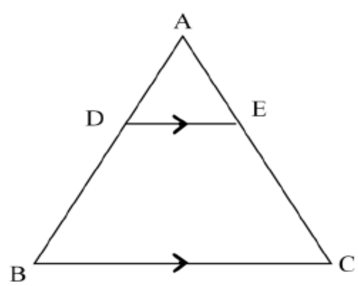
$$\frac{AE}{EC}+1=\frac{AE^1}{E^1C}+1$$
$$\frac{AE+EC}{EC}=\frac{AE^1+E^1C}{E^1C}$$
$$\frac{AC}{EC}=\frac{AC}{E^1C}$$
$$\Rightarrow EC=E^1C \Rightarrow E=E^1$$

E, E^1 లు తప్పని సరిగా వక్రీభవించాలి.

2. ΔABCలో $DE \parallel BC$, $\frac{AD}{DB}=\frac{3}{5}$, $AC = 5.6$ అయితే AE విలువ ఎంత?

జ: ΔABCలో $DE \parallel BC$, $\frac{AD}{DB}=\frac{3}{5}$

$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ (ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతం నుంచి)



$$\frac{AD}{DB}=\frac{3}{5}=\frac{AE}{EC}$$
AC=5.6 , AE : EC = 3 : 5
$$\frac{AE}{AC - AE}=\frac{3}{5}$$
$$\frac{AE}{(5.6) - AE}=\frac{3}{5}$$

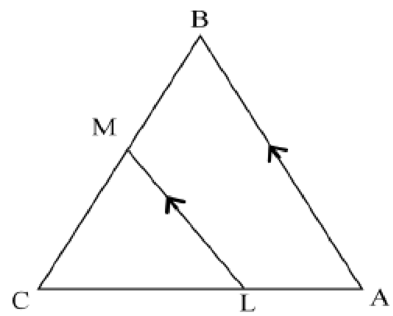
5AE = 3 (5.6 - AE) (అడ్డగుణకారం చేయగా)

$8AE = 16.8$

$$AE=\frac{16.8}{8}=2.1cm$$

3. పక్క పటంలో LM || AB, AC = x – 3, AC = 2x, BM = x – 2, BC = 2x + 3 అయితే x విలువ ఎంత?

జ. ΔABCలో LM || AB



$$\Rightarrow \frac{AL}{LC} = \frac{BM}{MC}$$ (ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతం ప్రకారం)

$$\Rightarrow \frac{x-3}{2x-(x-3)} = \frac{x-2}{(2x+3)-(x-2)}$$

$$\Rightarrow \frac{x-3}{x+3} = \frac{x-2}{x+5}$$

$(x – 3) (x + 5) = (x – 2) (x + 3)$ (అడ్డగుణకారం చేయగా)

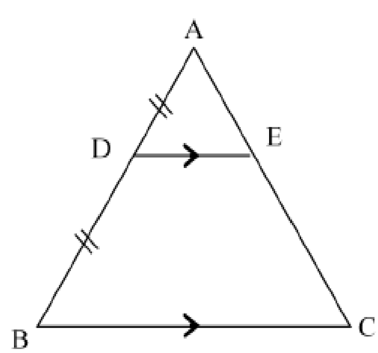
$x^2 + 2x – 15 = x^2 + x – 6$

$2x – x = - 6 + 15 \Rightarrow x = 9.$

4. ఒక త్రిభుజంలో ఒక భుజం మధ్య బిందువు గుండా పోయే రేఖ రెండో భుజానికి సమాంతరంగా ఉంటే అది మూడో భుజాన్ని సమద్వి ఖండన చేస్తుందని చూపండి.(ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతం ఉపయోగించి)

జ. ΔABC లో AB మధ్యబిందువు D, DE || BC

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$ (థేల్స్ సిద్ధాంతం ప్రకారం)........... (1)



AB మధ్య బిందువు D

$\Rightarrow AD = DB$

$\frac{AD}{DB} = 1$ -------(2)

(2) ను (1)లో ప్రతిక్షేపిస్తే

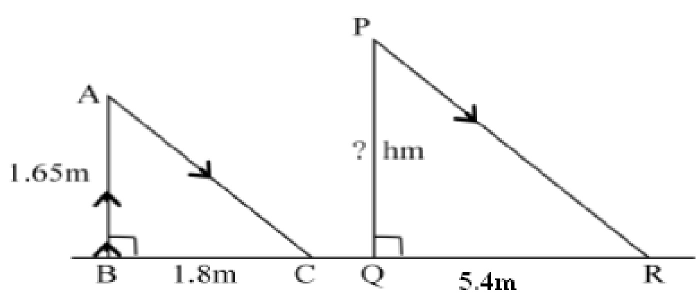
$\frac{AE}{EC} = 1$

$AE = EC$

$\therefore$ మూడో భుజాన్ని సమద్విఖండన చేస్తుంది.

5. 1.65 మీ పొడవు ఉన్న ఒక వ్యక్తి నీడ పొడవు 1.8మీ. అదే సమయంలో ఒక ద్వీస్తంభం 5.4మీ పొడవు ఉన్న నీడను ఏర్పరిస్తే, ఆ ద్వీప స్తంభం పొడవు ఎంత?

జ.



ΔABC, ΔPQRల్లో

$\angle B = \angle Q = 90^\circ$

$\angle C = \angle R$ $AC \parallel PR$, (ఏ సమయంలోనైనా కిరణాలు సమాంతరాలు)

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (కో.కో. సరూపనియమం ప్రకారం)

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ (సరూప త్రిభుజాల అనురూప భుజలు)

$\frac{1.65}{PQ} = \frac{1.8}{5.4}$

$PQ = \frac{1.65 \times 5.4}{1.8} = 4.95m$

$\therefore$ ద్వీప స్తంభం ఎత్తు =4.95మీ.

6. రెండు సరూప త్రిభుజాల చుట్టు కొలతలు వరుసగా 30 సెం.మీ., 20 సెం.మీ. మొదటి త్రిభుజంలోని ఒక త్రిభుజం కొలత 12 సెం.మీ, అయితే రెండో త్రిభుజంలో దాని అనురూపభుజ కొలతను కనుక్కోండి.

జ. రెండో త్రిభుజ అనురూప భుజం కొలతను x అనుకోండి.

సరూప త్రిభుజ చుటుకొలతల నిష్పత్తి = అనురూప భుజాల నిష్పత్తి

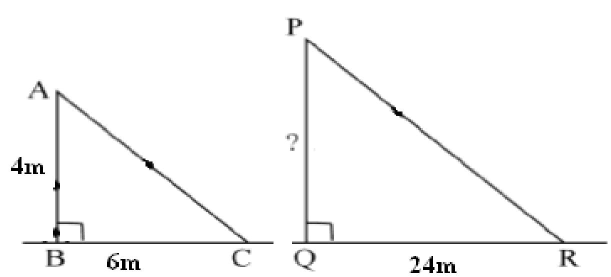
$$\frac{30}{20} = \frac{12}{x}$$

$$x = \frac{12 \times 20}{30} = 8cm$$

$\therefore$ రెండో త్రిభుజ అనురూప భుజం = 8 సెం.మీ.

7. 4 మీ.పొడవు ఉన్న ఒక జెండా స్తంభం 6మీ. పొడవు ఉన్న నీడ ఏర్పరుస్తుంది. అదే సమయంలో దగ్గరలో ఉన్న ఒక భవనం 24మీ. పొడవు ఉన్న నీడను ఏర్పరిస్తే ఆ భవనం ఎత్తు ఎంత?

జ.



$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

$$\frac{4}{PQ} = \frac{6}{24} \Rightarrow PQ = \frac{24 \times 4}{6} = 16m$$

$\therefore$ భవనం ఎత్తు = 16మీ.

8. రెండు సరూప త్రిభుజాల వైశాల్యాలు సమానమైన అవి సర్వసమాన త్రిభుజాలని చూపండి?

జ. $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

ΔABC వైశాల్యం / ΔPQR వైశాల్యం = $\left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{AC}{PR}\right)^2$

కాని ΔABC వైశాల్యం/ΔPQR వైశాల్యం = 1 (వైశాల్యం సమానం కాబట్టి)

$\therefore \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{AC}{PR}\right)^2 = 1$

$AB^2 = PQ^2$; $BC^2 = QR^2$; $AC^2 = PR^2$

AB=PQ ; BC = QR ; AC = PR

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta PQR$ (భు.భు.భు. సర్వసమాన నియమం)

9. ΔABC ~ ΔDEF, వాటి వైశాల్యాలు వరుసగా 64సెం.మీ., 121 సెం.మీ. EF= 15.4సెం.మీ., BC కొలత కనుక్కోండి.

జ. ΔABC వైశాల్యం/ΔDEF వైశాల్యం = $\left(\frac{BC}{EF}\right)^2$

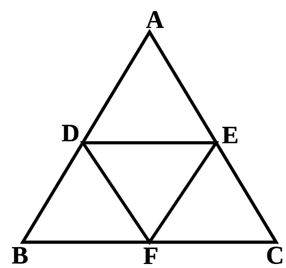
$\frac{64}{121} = \left(\frac{BC}{15.4}\right)^2$

$\frac{8}{11} = \frac{BC}{15.4} \Rightarrow BC = \frac{15.4 \times 8}{11} = 11.2cm$

10. ΔABC లో BC, CA, AB భుజాల మధ్య బిందువులు వరుసగా D, E, F అయితే ΔDEF, ΔABC వైశాల్యాల నిష్పత్తిని కనుక్కోండి.

జ. AB, BC, CA భుజాల మధ్య బిందువు D, E, F

$\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{2}$ (D, F మధ్య బిందువు)



$\Rightarrow$ DF || BC (థేల్స్ సిద్ధాంత విపర్యయం ప్రకారం)

$\therefore \angle ADF = \angle ABC$, $\angle AFD = \angle ACB$ (అనురూప కోణాలు)

ΔDEF ~ ΔABC(స్వరూప నియమం)

సమరూప త్రిభుజ వైశాల్యాల సిద్ధాంతం ప్రకారం

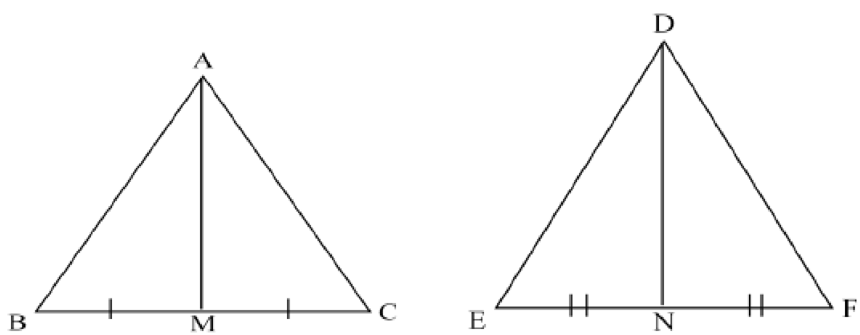
ΔDEF వైశాల్యం/ΔABC వైశాల్యం = $\dfrac{DF^2}{AC^2} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}BC\right)^2}{BC^2} = \dfrac{1}{4}$

ΔDEF, ΔABC వైశాల్యాల నిష్పత్తి = 1 : 4.

11. రెండు సరూప త్రిభుజాల వైశాల్యాల నిష్పత్తి వాటి అనురూప మధ్యగతాల నిష్పత్తి వర్గానికి సమానం అని చూపండి.

జ. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ అనురూప మధ్య గతాలు AM, DN

సమరూప త్రిభుజ వైశాల్యాల సిద్ధాంతం ప్రకారం



ΔABC వైశాల్యం/ΔDEF వైశాల్యం = $\dfrac{AB^2}{DE^2}$

$$\frac{AB^2}{DE^2}=\frac{BC^2}{EF^2}=\frac{AC^2}{DF^2} \text{ ----(1)}$$

$$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{2BM}{2EN}=\frac{BM}{EN}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DE}=\frac{BM}{EN}$$

$\angle ABM=\angle DEN$

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (SAS భు.కో. భు. నియమం ప్రకారం)

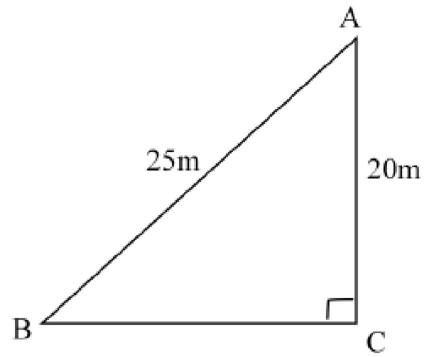
$$\frac{AB}{DE}=\frac{AM}{DN} \text{ ----(2)}$$

(1), (2) ల నుంచి

ΔABC వైశాల్యం/ΔDEF వైశాల్యం = $\dfrac{AM^2}{DN^2}$

12. 25 మీ. పొడవు ఉన్న ఒక నిచ్చెన, గోడపై 20 మీ. ఎత్తున ఉన్న ఒక కిటికిని తాకుతోంది. అయితే ఆ నిచ్చెన అడుగు భాగం నేలపై గోడ నుంచి ఎంత దూరంలో ఉన్నది.

జ. ΔABC లో $\angle C = 90°$



$AB^2 = AC^2 + BC^2$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం)

$25^2 = 20^2 + BC^2$

$BC^2 = 625 – 400 = 225$

$BC = 15$మీ.

నిచ్చెన అడుగు భాగం నేలపై గోడ నుంచి 15మీ. దూరంలో ఉంది.

13. ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో కర్ణం, దాని అతి చిన్న భుజం రెట్టింపు కన్నా 6మీ. ఎక్కువ. మూడో భుజం కర్ణం కన్నా 2 మీ. తక్కువ అయితే ఆ త్రిభుజ భుజాలను కనుక్కోండి.

జ. అతి చిన్న భుజానికి x మీ. అనుకోండి.

కర్ణం = $(2x + 6)$ మీ., మూడో భుజం = $(2x + 4)$ మీ.

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

$(2x + 6)^2 = x^2 + (2x + 4)^2$

$4x^2 + 36 + 24x = x^2 + 4x^2 + 16 + 16x$

$x^2 – 8x – 20 = 0$

$(x - 10)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 10; x = -2$

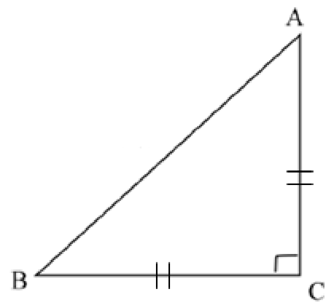
త్రిభుజ భుజం కొలత రుణ విలువ కానేకాదు

$\therefore x = 10$

త్రిభుజ భుజాల కొలతలు 10మీ. 26మీ. 24మీ.

14. సమద్విబాహు త్రిభుజం ABC లో లంబకోణం A వద్ద కలదు. అయితే $AB^2 = 2AC^2$ అని చూపండి?

జ. ABC సమద్విబాహు త్రిభుజంలో $\angle C = 90°$, AC = BC



పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$
$$= AC^2 + AC^2 = 2AC^2$$
$$\therefore AB^2 = 2AC^2$$

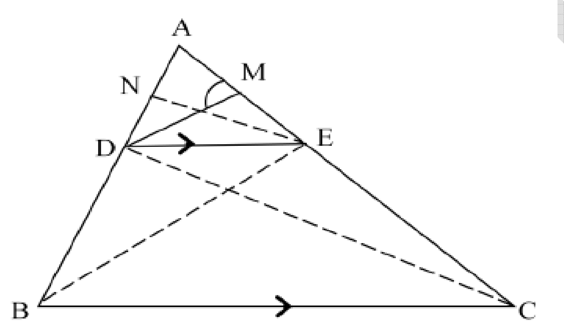
వ్యాసరూప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. ఒక త్రిభుజంలో ఒక భుజానికి సమాంతరంగా గీసిన రేఖ మిగిలిన రెండు భుజాలను వేరువేరు బిందువుల్లో ఖండించిన, ఆ మిగిలిన రెండు భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో విభజిస్తారు. (ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతం) అని చూపండి.

జ. దత్తాంశం: ΔABCలో $DE \parallel BC$, DE రేఖ AB, AC భుజాలను వరుసగా D, E వద్ద ఖండించును.

సారాంశం: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

నిర్మాణం: B, E లను, C, D లను కలపండి, $DM \perp AC$, $EN \perp AB$ గీయండి.



ఉపపత్తి: ΔADE వైశాల్యం = $\frac{1}{2} \times AD \times EN$

ΔBDE వైశాల్యం = $\frac{1}{2} \times BD \times EN$

ΔADE వైశాల్యం/ΔBDE వైశాల్యం = $\dfrac{\frac{1}{2} \times AD \times EN}{\frac{1}{2} \times BD \times EN} = \frac{AD}{BD}$ ----(1)

ΔADE వైశాల్యం = $\frac{1}{2} \times AE \times DM$

ΔCDE వైశాల్యం = $\frac{1}{2} \times CE \times DM$

ΔADE వైశాల్యం/ΔCDE వైశాల్యం = $\dfrac{\frac{1}{2} \times AE \times DM}{\frac{1}{2} \times CE \times DM} = \frac{AE}{EC}$ ------(2)

ΔBDE, ΔCDE లు ఒకే భూమి DE, సమాంతర రేఖలు BC, DE ల మధ్య ఉన్నాయి.

కాబట్టి ΔBDE వైశాల్యం = ΔCDE వైశాల్యం $\rightarrow$ (3)

(1), (2), (3) ల నుంచి

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

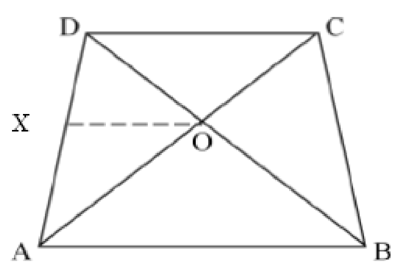
కాబట్టి సిద్ధాంతం నిరూపించడమైనది.

2. ఒక చతుర్భుజం ABCD లో కర్ణాలు 'O' బిందువు వద్ద ఖండించుకుంటాయి, అయితే అది ఒక ట్రెపీజియం అని చూపండి.

జ. దత్తాంశం: ABCD చతుర్భుజంలో $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$

సారాంశం: ABCD ఒక ట్రెపీజియం

నిర్మాణం: 'O' బిందువు ద్వారా AB కి సమాంతర రేఖను గీసిన అది DA బిందువును X వద్ద ఖండిచును.



ఉపపత్తి: ΔDAB లో $XO \parallel AB$ (నిర్మాణం నుంచి)

$\Rightarrow \frac{DA}{XA} = \frac{DO}{OB}$ (ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతం నుంచి)

$\frac{AX}{XD} = \frac{BO}{OD}$ -----(1)

మరల $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ (దత్తాంశం ప్రకారం)

$\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO}$ -----(2)

(1), (2) ల నుంచి

$$\frac{AX}{XD} = \frac{AO}{CO}$$

ΔADC లో $\frac{AX}{XD} = \frac{AO}{OC}$ అయినట్లు XO రేఖ ఉన్నది

$\Rightarrow XO \parallel DC$

$\Rightarrow AB \parallel DC$

చతుర్భుజం ABCD లో $AB \parallel DC$

$\Rightarrow$ ABCD ఒక ట్రెపీజియం.

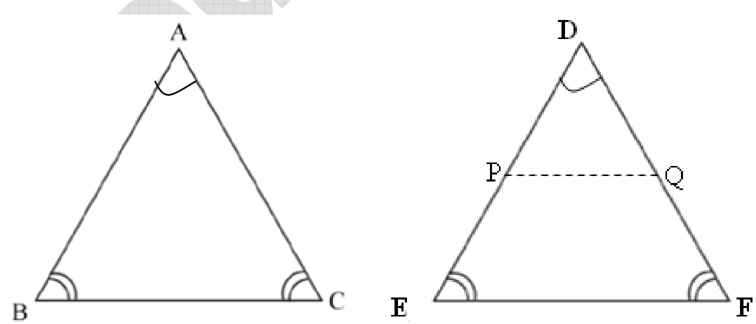
3. రెండు త్రిభుజాలలో అనురూపకోణాలు సమానంగా ఉంటే వాటి అనురూప భుజాల నిష్పత్తులు సమానంగా ఉంటాయి. (అనుపాతంలో ఉంటాయి). ఇంకా ఆ రెండు భుజాలు సరూప త్రిభుజాలు అవుతాయి అని చూపండి? (కో.కో.కో. నియమం).

జ. దత్తాంశం: ΔABC, ΔDEF లలో $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$

సారాంశం: $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

నిర్మాణం: AB = DP, AC = DQ అయినట్లు DE, DF లపై వరుసగా బిందువులు P, Q లను గుర్తించండి.

PQ లను కలపండి.



ఉపపత్తి: $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (భు.కో.భు నియమం ప్రకారం)

దీని నుంచి $\angle B = \angle P = \angle E$, $PQ \parallel EF$

$\therefore \frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ (థేల్స్ సిద్ధాంతం ప్రకారం)

$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (నిర్మాణం)

$$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

సిద్ధాంతం నిరూపించడమైనది.

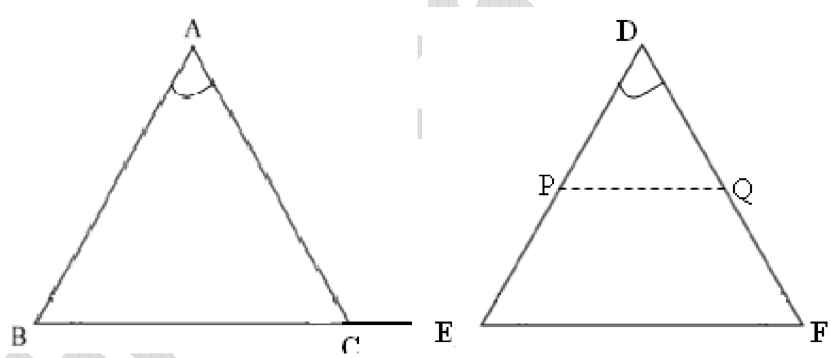
4. ఒక త్రిభుజంలోని ఒక కోణం, వేరొక త్రిభుజంలోని ఒక కోణానికి సమానమైన, ఈ కోణాలను కలిగి ఉన్న భుజాలు అనుపాతంలో ఉంటే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు అని చూపండి. (భు.కో.భు. నియమం)

జ. దత్తాంశం: $\Delta ABC, \Delta DEF$ లలో $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ $(\angle 1)$, $\angle A = \angle D$

సారాంశం: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

నిర్మాణం: $AB = DP, AC = DQ$ అయినట్లు DE, DF భుజాలపై వరుసగా P, Q బిందువులను గుర్తించాలి.

P, Q లను కలపాలి.



ఉపపత్తి: $PQ \parallel EF$, $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ కాబట్టి

$\angle A = \angle D, \angle B = \angle P, \angle C = \angle Q$

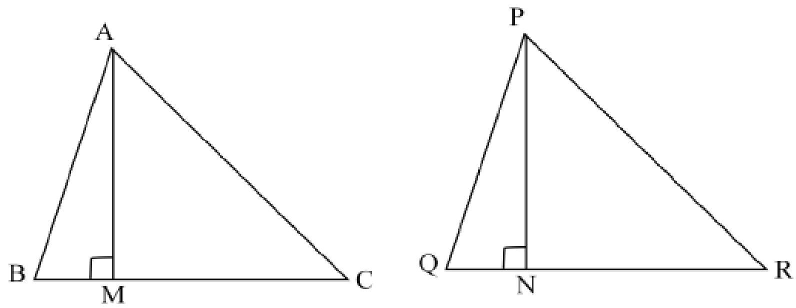
$\therefore \Delta ABC \sim \Delta DEF$.

5. రెండు సరూప త్రిభుజాల వైశాల్యాల నిష్పత్తి వాటి అనురూప భుజాల నిష్పత్తి వర్గానికి సమానం.

జ. దత్తాంశం: $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

సారాంశం: ΔABC వైశాల్యం/ΔPQR వైశాల్యం $= \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{CA}{PR}\right)^2$

నిర్మాణం: $AM \perp BC, PN \perp QR$ గీయాలి.



ఉపపత్తి: ΔABC వైశాల్యం/ΔPQR వైశాల్యం $= \dfrac{\frac{1}{2}\times BC\times AM}{\frac{1}{2}\times QR\times PN} = \dfrac{BC\times AM}{QR\times PN}$ -----(1)

$\Delta ABM, \ \Delta PQN$లో

$\angle B = \angle Q$ $(\Delta ABC \sim \Delta PQR)$

$\angle M = \angle N = 90°$

$\therefore \Delta ABM \sim \Delta PQN$ (కో.కో. సరూపనియమం)

$\dfrac{AM}{PN} = \dfrac{AB}{PQ}$ -----(2)

ఇంకా $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (దత్తాంశం)

$\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{CA}{PR}$ -----(3)

((1), (2), (3) ల నుంచి)

ΔABC వైశాల్యం/ΔPQR వైశాల్యం $= \dfrac{AB}{PQ} \times \dfrac{AB}{PQ} = \left(\dfrac{AB}{PQ}\right)^2$

(3) నుంచి

ΔABC వైశాల్యం/ΔPQR వైశాల్యం $= \left(\dfrac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\dfrac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\dfrac{CA}{PR}\right)^2$

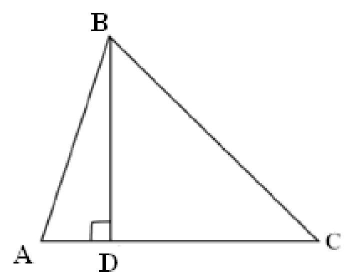
సిద్ధాంతం నిరూపించడమైనది.

6. ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో కర్ణం మీది వర్గం మిగిలిన రెండు భుజాల వర్గాల మొత్తానికి సమానం అని చూపండి. (పైథాగరస్/బౌద్ధాయన సిద్ధాంతం)

జ. దత్తాంశం: లంబకోణ త్రిభుజం ABC లో లంబకోణాన్ని కలిగిన శీర్షం B.

సారాంశం: $AC^2 = AB^2 + BC^2$

నిర్మాణం: $BD \perp AC$ గీయాలి.



ఉపపత్తి : $\Delta ADB \sim \Delta ABC$

$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$ (భుజాలు అనుపాతంలో ఉంటాయి)

$AD.AC = AB^2$ ……… (1)

$\Delta\ BDC \sim \Delta\ ABC$

$CD.AC = BC^2$ ______ (2)

(1), (2) లను కలుపగా

$AD.AC + CD.AC = AB^2 + BC^2$

$AC\ (AD + CD) = AB^2 + BC^2$

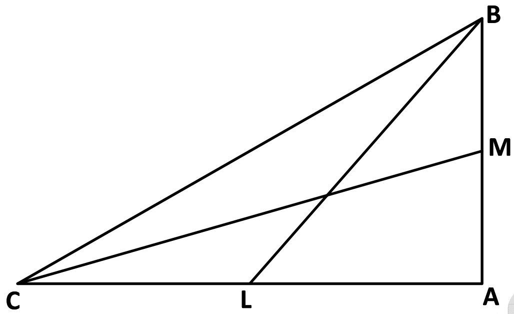
$AC.\ AC = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

బౌద్ధాయన /పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నిరూపించడమైనది.

7. లంబ కోణం త్రిభుజం ABC లో శీర్షం 'A' వద్ద లంబకోణం కలదు. BC, CM లు మధ్యగత రేఖలు అయితే $4(BC^2 + CM^2) = 5B^{2}$ అని చూపండి.

జ. ΔABC లో $\angle B = 90°$, BC, CM లు మధ్యగత రేఖలు



ΔABC లో $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతం) .... (1)

ΔABL లో $BC^2 = AL^2 + AB^2$

కానీ,

$$BL^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + AB^2$$

$$= \frac{AC^2}{4} + AB^2$$

$$4BL^2 = AC^2 + 4AB^2 \text{ -------(2)}$$

ΔCMA లో $CM^2 = AC^2 + AM^2$

$$= AC^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$$ (మధ్య బిందువు)

$4CM^2 = 4AC^2 + AB^2$............ (3)

(2), (3) లను కలుపగా

$4BL^2 + 4CM^2 = AC^2 + 4AB^2 + 4AC^2 + AB^2$

$4BL^2 + 4CM^2 = 5AC^2 + 5AB^2$

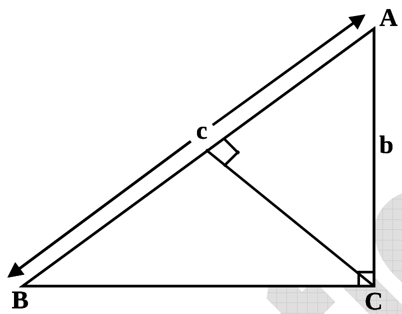
$4(BL^2 + CM^2) = 5(AC^2 + AB^2) + 5BC^2$ [(1) నుంచి]

8. లంబకోణ త్రిభుజం ABC లో లంబకోణ శీర్షం C వద్ద కలదు. BC = a, AC = b, AB = c, అనుకొండి. ఇంకా శీర్షం 'c' నుంచి AB కి గీసిన లంబం పొడవు 'p' అయితే

(i) pc = ab

(ii) $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ అని చూపండి.

జ.



(i) CD ⊥ AB, CD = P

ΔABC వైశాల్యం = $\frac{1}{2} \times AB \times CD = \frac{1}{2} . cp$

అలాగే ΔABC వైశాల్యం = $\frac{1}{2} \times BC \times AC = \frac{1}{2} ab$

$\therefore \frac{1}{2} cp = \frac{1}{2} ab$

$cp = ab$ ---------(1)

(ii) లంబకోణ త్రిభుజం ABC లో లంబకోణం శీర్షం c వద్ద కలదు.

కాబట్టి $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$c^2 = b^2 + a^2$

$\left(\frac{ab}{p}\right)^2 = a^2 + b^2$

$\frac{1}{p^2} = \frac{a^2 + b^2}{(ab)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

9. ఒక రాంబస్‌లో భుజాల వర్గాల మొత్తం, దాని కర్ణాలకు, వర్గాలకు మొత్తానికి సమానమని చూపండి.

జ. ABCD ఒక రాంబస్ AC, BD కర్ణాలు 'o' వద్ద ఖండించుకుంటాయి.

A

B o D

C

$\therefore AB = BC = CD = DA$ .... (1)

రాంబస్ కర్ణాలు ఒక దానికొకటి లంబ సమద్వి ఖండన చేసుకుంటాయి.

$\Rightarrow Ao = \frac{1}{2}AC \,;\, Bo = \frac{1}{2}BD$

AoB ఒక లంబ కోణ త్రిభుజం

$\Rightarrow AB^2 = Ao^2 + Bo^2$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతం)

$$= \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2 = \frac{AC^2}{4} + \frac{BD^2}{4}$$

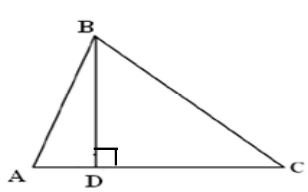
$4AB^2 = AC^2 + BD^2$

$AB^2 + AB^2 + AB^2 + AB^2 = AC^2 + BD^2$

$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$ [(1) నుంచి]

10. ఒక సమబాహు త్రిభుజంలో భుజం వర్గానికి మూడురెట్లు దాని ఉన్నతి (లంబం) వర్గానికి నాలుగు రెట్లు అని చూపండి.

జ. ΔABC లో $AB = BC = CA$, $AD \perp BC$



AB = AC

AD = AD (ఉమ్మడి భుజం)

$\angle ADB = \angle ADC$

$\Delta ADB \cong \Delta ADC$ (లం.ఉ.భు. నియమం ప్రకారం)

$\Rightarrow BD = CD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AB$

ΔADB లంబకోణ త్రిభుజం

$AB^2 = AD^2 + BD^2$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం)

$= AD^2 + \left(\frac{1}{2}AB\right)^2$

$= AD^2 + \frac{1}{4}AB^2$

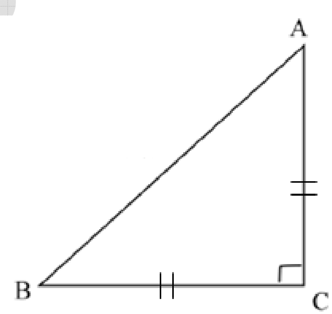
$AD^2 = AB^2 - \frac{1}{4}AB^2$

$AD^2 = \frac{3}{4}AB^2$

$\Rightarrow 3AB^2 = 4AD^2$

11. సమద్విబాహు త్రిభుజం ABC లో లంబకోణం C వద్ద కలదు. అయితే $AB^2 = 2AC^2$ అని చూపండి.

జ. ABC సమద్విబాహు త్రిభుజంలో $\angle C = 90^\circ$, AC = BC



$AB^2 = AC^2 + BC^2$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతం)

$= AC^2 + AC^2$

$AB^2 = 2AC^2$.

ఒక మార్కు ప్రశ్నలు

1. క్రమ బహుభుజి అంటే ఏమిటి?

జ. బహుభుజిలో భుజాలన్ని, కోణాలన్ని సమానంగా ఉంటే దానిని క్రమ బహుభుజి అంటారు.

2. సరూప త్రిభుజాల ధర్మాలు రాయండి?

జ. రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు కావాలంటే

(i) వాటి అనురూప కోణాలు సమానంగా ఉండాలి.

(ii) వాటి అనురూప భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో ఉండాలి.

3. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ అంటే ఏమిటి?

జ. ΔABC, ΔDEF లు సరూపాలు అని అర్థం.

4. సమబాహు త్రిభుజ భుజం a అయితే ఎత్తుకి సూత్రం రాయండి.

జ. సమబాహు త్రిభుజం ఎత్తు = $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

5. $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, $\angle A = 50°$ అయితే $\angle Q + \angle R$ ఎంత?

జ. $\angle A = 50°$ అయితే $\angle P = 50°$

$\angle Q + \angle R = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$

6. సరూప త్రిభుజ భుజాల నిష్పత్తి 4 : 9 అయితే సరూప త్రిభుజ వైశాల్యాల నిష్పత్తి ఎంత?

జ. 16 : 81

7. ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతాన్ని రాయండి.

జ. ఒక త్రిభుజంలో ఒక భుజానికి సమాంతరంగా గీసిన రేఖ మిగిలిన రెండు భుజాలకు వేరువేరు బిందువుల్లో ఖండించిన ఆ మిగిలిన రెండు భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో విభజించడమైనది.

8. కో.కో.కో. నియమాలు రాయండి.

జ. ఒక త్రిభుజంలో రెండు కోణాలు వరుసగా వేరొక త్రిభుజంలోని రెండు కోణాలకు సమానమైన ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు.

9. భు.కో.భు. నియమాలను రాయండి.

జ. ఒక త్రిభుజంలోని ఒక కోణం, వేరొక త్రిభుజంలోని ఒక కోణానికి సమానమై, ఈ కోణాలను కలిగి ఉన్న భుజాలు అనుపాతంలో ఉంటే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు.

10. ΔABC లో మూడు కోణాల మొత్తం 180° ఈ ప్రవచనానికి వ్యతిరేక ప్రవచనం రాయండి.

జ. ΔABC లో మూడు కోణాల మొత్తం 180° లు కాదు.

11. సంయుక్త ప్రవచనం అంటే ఏమిటి?

జ. రెండు ప్రవచనాలను కలుపగా ఏర్పడే ప్రవచనంను సంయుక్త ప్రవచనం అంటారు.

12. పైథాగరస్/ బౌద్ధాయన సిద్ధాంతం రాయండి.

జ. ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో కర్ణం మీది వర్గం, మిగిలిన రెండు భుజాల వర్గా మొత్తానికి సమానం.

కింది ఖాళీలను పూరించండి

1. సమాన సంఖ్యలో భుజాలు కల అన్ని క్రమ బహుభుజిలు __________

2. రెండు బహుభుజులు సరూపాలు కావాలంటే వాటి అనురూప కోణాలన్ని __________ గా ఉండాలి.

3. రెండు బహుభుజులు సరూపాలు కావలెనంటే వాటి అనురూప భుజాలన్నీ ఒకే __________లో ఉండాలి.

4. అన్ని చతురస్రాలు ఎల్లప్పడు __________

5. అన్ని సమబాహు త్రిభుజాలు ఎల్లప్పుడు __________

6. పరిమాణం తగ్గించినా లేదా పెంచిన ఒక వస్తువు ఫోటోగ్రాఫ్‌లు __________

7. '~' గుర్తును మనం __________ అని చదువుతాం.

8. ఒక త్రిభుజంలో ఏవైనా రెండు భుజాలకు ఒకే నిష్పత్తిలో విభజించు సరళరేఖ మూడో భుజానికి __________ గా ఉండును.

9. ఒక చతుర్భుజం ABCD లో కర్ణాలు 'O' బిందువు వద్ద ఖండించుకున్నాయి. $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ అయితే అది ఒక __________

10. రెండు సరూప త్రిభుజాల వైశాల్యాల నిష్పత్తి వాటి అనురూప భుజాల నిష్పత్తి వర్గానికి __________

11. రెండు సరూప త్రిభుజ వైశాల్యాలు సమానమైన అవి__________త్రిభుజాలు

12. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, వాటి వైశాల్యాలు వరుసగా 64 సెం.మీ., 121 సెం.మీ. EF = 15.4 సెం.మీ. అయితే BC = __________

13. రెండు సరూప త్రిభుజ వైశాల్యం నిష్పత్తి వాటి అనురూప మధ్యగతాల నిష్పత్తి వర్గానికి __________

14. ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో కర్ణం మీది వర్గం , మిగిలిన రెండు భుజాల __________ సమానం

15. ఒక రాంబస్‌లో భుజాల వర్గాల మొత్తం, దాని కర్ణాల వర్గాల మొత్తానికి __________

16. ఒక సమబాహు త్రిభుజంలో భుజం వర్గానికి మూడు రెట్లు దాని ఉన్నత (లంబం) వర్గానికి __________

17. $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ అయితే AB : AC= __________

18. ΔABC లో $\angle A = 90°$, $AD \perp BC$ అయితే AD^2 =__________

19. ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతాన్ని _________ అని కూడా అంటారు.

20. ΔABC ~ ΔDEF, AB = 6 సెం.మీ., PQ = 9 సెం.మీ., BC = 10 సెం.మీ., అయితే QR = _________.

Key

1. సరూపాలు	2. సమానం	3. నిష్పత్తి	4. సరూపాలు	5. సరూపాలు
6. సరూపాలు	7. సరూపాం	8. సమాంతరం	9. ట్రెపీజియం	10. సమానం
11. సర్వసమానం	12. 11.2 సెం.మీ.	13. సమానం	14. వర్గాల మొత్తానికి	15. సమానం
16. 4 రెట్లు	17. PQ : PR	18. BD. DC	19. థేల్స్ సిద్ధాంతం	20. 15 సెం.మీ.