అధ్యాయం - 7

నిరూపక రేఖాగణితం (Coordinate Geometry)

రెండు బిందువుల మధ్య దూరం:

- ఏవైనా రెండు బిందువులు X - అక్షం పై ఉన్నట్లయితే ఆ బిందువులలోని x –నిరూపకాల మధ్య వ్యత్యాసం ఆ బిందువుల మధ్య దూరాన్ని తెలుపుతుంది.
- సాధారణంగా $A(x_1, 0)$; $B(x_2, 0)$ బిందువుల మధ్య దూరం $|x_2 - x_1|$
- రెండు బిందువులు Y – అక్షంపై ఉన్నట్లయితే ఆ బిందువుల్లోని y–నిరూపకాల మధ్య వ్యత్యాసాన్ని ఆ రెండు బిందువుల మధ్య దూరాన్ని తెలుపుతుంది.
- సాధారణంగా $A(0, y_1)$; $B(0, y_2)$ బిందువుల మధ్య దూరం $|y_2 - y_1|$
- X - అక్షానికి సమాంతరంగా ఉన్న రెండు బిందువులు $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_1)$ మధ్య దూరం $= |x_2 - x_1|$
- Y – అక్షానికి సమాంతరంగా ఉన్న రెండు బిందువులు $A(x_1, y_1)$; $B(x_1, y_2)$ మధ్య దూరం $= |y_2 - y_1|$
- నిరూపక తలంలోని ఏవైనా రెండు బిందువులు $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ల మధ్య దూరం

  $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- మూల బిందువు $O(0, 0)$ నుంచి $P(x_1, y_1)$ బిందువు దూరం $= \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

సరేఖీయ బిందువులు:

ఒకే సరళరేఖ పై ఉన్న బిందువులను సరేఖీయ బిందువులు అంటారు. A, B, C బిందువులు ఒకే సరళరేఖపై ఉంటే AB + BC = AC కావాలి.

- ❖ A, B, C బిందువులు త్రిభుజ శీర్షాలు, AB, BC, CA లు త్రిభుజ భుజాలు అయితే
  - ABC సమబాహు త్రిభుజం కావాలంటే AB = BC = CA కావాలి.
  - ABC సమద్విబాహు త్రిభుజం కావాలంటే AB = BC లేదా BC = AC లేదా AB = AC కావాలి.

- ABC లంబకోణ త్రిభుజం కావాలంటే $AB^2 + BC^2 = AC^2$ లేదా $BC^2 + AC^2 = AB^2$ లేదా $AB^2 + AC^2 = BC^2$ కావాలి.
- ABC లంబకోణ సమద్విబాహు త్రిభుజం కావాలంటే లంబకోణ త్రిభుజం, సమద్విబాహు త్రిభుజం కావాలి.
- ABC విషమబాహు త్రిభుజం అయితే $AB \neq BC \neq CA$.

❖ A, B, C, D బిందువులు చతుర్భుజి నాలుగు శీర్షాలు, AB, BC, CD, BA లు చతుర్భుజి నాలుగు భుజాలు, AC, BD లు చతుర్భుజి కర్ణాలు అయితే

- చతురస్రం అయితే AB = BC = CD = DA, AC = BD కావాలి.
- రాంబస్ (సమ చతుర్భుజం) అయితే AB = BC = CD = DA, $AC \neq BD$ కావాలి.
- దీర్ఘ చతురస్రం అయితే AB = CD; BC = DA, AC = BD కావాలి.
- సమాంతర చతుర్భుజం అయితే AB = CD; BC = DA, $AC \neq BD$ కావాలి.

విభజన సూత్రం:

- $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ బిందువులను కలిపే రేఖని $m_1 : m_2$ నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజించు బిందువు P(x, y).

$$\text{బిందువు నిరూపకాలు} = \left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$$

- $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$ బిందువుల మధ్య బిందువు (1:1 నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజించే బిందువు)

$$= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

- త్రిభుజంలోని మధ్యగత రేఖల మిళిత బిందువును "గురుత్వ కేంద్రం" అంటారు. గురుత్వ కేంద్రం ప్రతి మధ్యగత రేఖను 2 : 1 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది.
- $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$; $C(x_3, y_3)$ లు త్రిభుజం ABC శీర్షాలు అయితే గురుత్వ కేంద్రం

$$G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

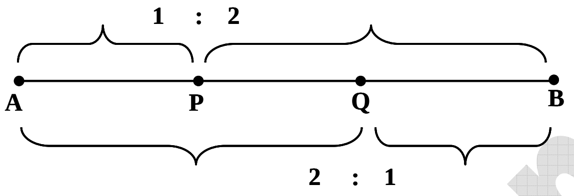
- గురుత్వ కేంద్రాన్ని 'గరిమనాభి' లేదా 'కేంద్రా భాసం' అని కూడా అంటారు.

sakshieducation.com

త్రిథాకరణ బిందువులు:

ఒక రేఖా ఖండాన్ని మూడు సమాన భాగాలుగా విభజించు బిందువుల్ని "త్రిథాకరణ బిందువులు" లేదా "సమత్రి ఖండన బిందువులు" అంటారు.

AB రేఖా ఖండాన్ని 1 : 2, 2 : 1 నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజించు బిందువులు P, Q లను త్రిథాకరణ బిందువులు అంటారు.



త్రిభుజం వైశాల్యం:

- $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$; $C(x_3, y_3)$ బిందువులు త్రిభుజ శీర్షాలు అయితే త్రిభుజ వైశాల్యం

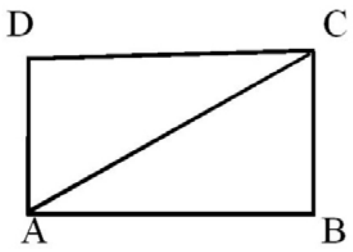
$$= \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$$

- ΔABC వైశాల్యం 'O' అయితే A, B, C బిందువులు సరేఖీయాలు.

"హెరాన్" సూత్రం: a, b, c భుజాల పొడవులు కలిగిన త్రిభుజ వైశాల్యం $A = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

ఇక్కడ $S = \dfrac{a+b+c}{2}$

- (0, 0); A(a, 0); B (0, b) శీర్షాలతో ఏర్పడే ΔOAB త్రిభుజ వైశాల్యం $= \frac{1}{2}|ab|$
- చతుర్భుజం నాలుగు శీర్షాలు ఇస్తే, రెండు త్రిభుజాలుగా విడగొట్టి; రెండు త్రిభుజ వైశాల్యాల మొత్తాన్ని చతుర్భుజ వైశాల్యం పరిగణిస్తాం.



ABCD చతుర్భుజం వైశాల్యం = ΔABC వైశాల్యం + ΔACD వైశాల్యం.

రెండు బిందువులను కలిపే రేఖ వాలు:

- X - అక్షంతో సరళరేఖ చేసే కోణం ‘θ’ అయితే వాలు m = tanθ.
- $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ బిందువులను కలిపే రేఖాఖండం $\overline{AB}$ వాలు $= m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- X - అక్షం వాలు ‘0’
- Y – అక్షం వాలు నిర్వచించలేము.

ఒక మార్కు ప్రశ్నలు

1. (0, –3), (0, –8), (0, 6), (0, 4) బిందువులు నిరూపక తలంలో ఎక్కడ ఉంటాయి?

జ.దత్త బిందువులు (0, –3), (0, –8), (0, 6), (0, 4). ప్రతి బిందువులో X - నిరూపకం సున్నా. కాబట్టి ఈ బిందువులు y– అక్షంపై ఉంటాయి.

2. కింద ఇచ్చిన బిందువుల మధ్య దూరం ఎంత?

(i) (–4, 0), (6, 0) (ii) (0, –3), (0, – 8)

జ. i) దత్త బిందువులు (– 4, 0), (6, 0). వీటిలో Y – నిరూపకం సున్నా. కాబట్టి ఇవి X - అక్షంపై ఉంటాయి.

X - అక్షంపై ఉన్న రెండు బిందువుల మధ్య దూరం $= |x_2 – x_1| = |6 – (–4)| = 10$ యూ.

ii) దత్త బిందువులు (0, –3), (0, –8) వీటిలో X – నిరూపకం సున్నా. కాబట్టి Y – అక్షంపై ఉంటాయి.

Y – అక్షంపై ఉన్న రెండు బిందువుల మధ్య దూరం $= |y_2 – y_1| = |– 8 – (–3)| = 5$ యూ.

3. కింద ఇచ్చిన బిందువుల మధ్య దూరం కనుక్కోండి?

(i) (–5, 7) , (–1, 3) (ii) (a, b) , (–a, –b)

జ. $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ అనే రెండు బిందువుల మధ్య దూరం $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

i) (–5, 7) , (–1, 3)ల మధ్య దూరం

$= \sqrt{(-1 - (-5))^2 + (3 - 7)^2} = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{2(16)} = 4\sqrt{2}$ యూ.

ii) (a, b) , (–a, –b) అనే రెండు బిందువుల మధ్య దూరం

$= \sqrt{(-a-a)^2 + (-b-b)^2}$

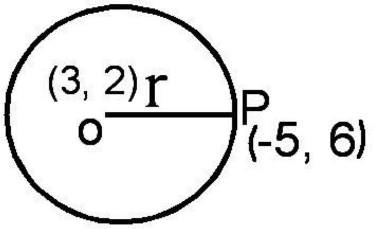
$= \sqrt{(-2a)^2 + (-2b)^2}$

$= \sqrt{4a^2+4b^2} = \sqrt{4(a^2+b^2)} = 2\sqrt{a^2+b^2}$ units

4. బిందువు (–5, 6) ద్వారా పోయే వృత్త కేంద్రం (3, 2) అయితే దాని వ్యాసార్థాన్ని కనుక్కోండి?

జ. వృత్త కేంద్రం O(3, 2) అనుకోండి.

వృత్తంపై ఉన్న బిందువు P(–5, 6)



∴ వృత్త వ్యాసార్థం r = O (3, 2), P(–5, 6)ల మధ్య దూరం

$= \sqrt{(-5-3)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80}$

$= \sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5}$ units

5. బిందువులు P (2, –3), Q(10, y) ల మధ్య దూరం 10 యూనిట్లు అయితే y విలువ ఎంత?

జ. దత్త బిందువులు P (2, –3), Q (10, y)

వీటి మధ్య దూరం PQ = 10 యూనిట్లు అని ఇచ్చారు.

$\Rightarrow \sqrt{(10-2)^2 + (y-(-3))^2} = 10$

$\Rightarrow \sqrt{8^2 + (y+3)^2} = 10$

$\Rightarrow 64 + (y+3)^2 = (10)^2 = 100$

$\Rightarrow (y+3)^2 = 100 - 64 = 36$

$\Rightarrow y + 3 = \sqrt{36} = \pm 6$

$y = \pm 6 - 3 \Rightarrow y = 6 - 3$ (or) $y = -6 - 3$

$y = 3$ (or) $y = -9$

6. (a sinα, – b cosα), (–a cosα, b sinα) అనే రెండు బిందువుల మధ్య దూరం కనుక్కోండి?

జ. $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ బిందువుల మధ్య దూరం $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

అలాగే (a sinα, – b cosα) , (–a cosα, b sinα)ల మధ్య దూరం

$$= \sqrt{(-a\cos\alpha - a\sin\alpha)^2 + (b\sin\alpha - (-b\cos\alpha))^2}$$
$$= \sqrt{a^2(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 + b^2(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}$$
$$= \sqrt{(a^2 + b^2)(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2}\ (\sin\alpha + \cos\alpha)$$

7. బిందువులు (–1, 7), (4, –3) లతో ఏర్పడే రేఖాఖండాన్ని 2:3 నిష్పత్తిలో విభజించే బిందు నిరూపకాలను కనుక్కోండి?

జ. దత్త బిందువులు (–1, 7) , (4, –3)

నిష్పత్తి $m_1 : m_2 = 2 : 3$

కనుక్కోవాల్సిన బిందువు నిరూపకాలు P (x, y) అనుకుంటే

విభజన సూత్రం ద్వారా

$$p(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$$
$$= \left(\frac{2(4) + 3(-1)}{2 + 3}, \frac{2(-3) + 3(7)}{2 + 3}\right)$$
$$= \left(\frac{8 - 3}{5}, \frac{-6 + 21}{5}\right) = \left(\frac{5}{5}, \frac{15}{5}\right) = (1, 3)$$

∴ కావాల్సిన బిందువు P(x, y) = (1, 3)

8. బిందువులు A , B లు వరుసగా (–2, –2) , (2, –4). అఆ రేఖాఖండంపై $AP = \frac{3}{7}AB$ అయ్యే విధంగా P బిందువు నిరూపకాలను కనుక్కోండి?

జ. $AP = \frac{3}{7}AB$ అని ఇచ్చారు.

$\Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{3}{7}$

$\Rightarrow \frac{AP}{AP+PB} = \frac{3}{7} (\because AB=AP+PB)$

$\Rightarrow 7AP = 3(AP + PB)$

$\Rightarrow 7AP - 3AP = 3PB$

$\Rightarrow 4AP = 3PB \Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{3}{4}$

$\therefore$ P బిందువు AB రేఖాఖండాన్ని విభజించే నిష్పత్తి = 3 : 4

విభజన సూత్రం ప్రకారం

$\therefore$ P బిందువు నిరూపకాలు $P(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$

$= \left(\frac{(3)(2) + (4)(-2)}{3+4}, \frac{3(-4) + 4(-2)}{3+4}\right)$

$= \left(\frac{6-8}{7}, \frac{-12-8}{7}\right) = \left(\frac{-2}{7}, \frac{-20}{7}\right)$

9. బిందువులు $A\left(\frac{x}{2}, \frac{y+1}{2}\right)$, B (x + 1, y – 3) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండం మధ్య బిందువు C (5, –2), అయితే x, y విలువలు కనుక్కోండి?

జ. A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండం మధ్య బిందువు నిరూపకాలు $= \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

బిందువులు $A\left(\frac{x}{2}, \frac{y+1}{2}\right)$, B (x + 1, y – 3) ల మధ్య బిందువు C (5, –2) కాబట్టి

$(5, -2) = \left(\frac{\frac{x}{2} + x + 1}{2}, \frac{\frac{y+1}{2} + y - 3}{2}\right)$

$\frac{\frac{x}{2} + x + 1}{2} = 5 \Rightarrow \frac{x + 2x + 2}{4} = 5$

$\Rightarrow 3x + 2 = 20 \Rightarrow 3x = 20 - 2 = 18$

$\frac{\frac{y+1}{2} + y - 3}{2} = -2 \Rightarrow \frac{y + 1 + 2y - 6}{4} = -2$

$\Rightarrow 3y - 5 = -8 \Rightarrow 3y = -8 + 5 \Rightarrow 3y = -3 \Rightarrow y = -1$

$\therefore x = 6, y = -1$

sakshieducation.com

10. బిందువులు (2, 3), (x, y), (3, −2) లు శీర్షాలుగా ఉన్న త్రిభుజం గురుత్వకేంద్రం మూలబిందువు అయితే (x, y) ని కనుక్కోండి?

జ. బిందువులు (x_1, y_1), (x_2, y_2) ,(x_3, y_3) లు శీర్షాలుగా ఉన్న త్రిభుజ గురుత్వ కేంద్రం

$$= \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

బిందువులు (2, 3), (x, y), (3, –2) లు శీర్షాలుగా ఉన్న త్రిభుజ గురుత్వ కేంద్రం (0, 0), అని ఇచ్చారు.

$$\therefore\ (0, 0) = \left(\frac{2 + x + 3}{3}, \frac{3 + y + (-2)}{3}\right)$$

$$(0, 0) = \left(\frac{5 + x}{3}, \frac{1 + y}{3}\right)$$

$$\frac{5 + x}{3} = 0 \quad ; \quad \frac{1 + y}{3} = 0$$

$$\Rightarrow x = -5 \quad ; \quad y = -1$$

11. బిందువులు A (6, 1), B (8, 2), C (9, 4), D (p, 3) లు వరుసగా సమాంతర చతుర్భుజం శీర్షాలైతే p విలువను కనుక్కోండి?

జ. సమాంతర చతుర్భుజంలో కర్ణాలు పరస్పరం సమద్వి ఖండన చేసుకుంటాయని మనకు తెలుసు. కాబట్టి

AC మధ్య బిందువు = BD మధ్య బిందువు

$$\Rightarrow \left(\frac{6 + 9}{2}, \frac{1 + 4}{2}\right) = \left(\frac{8 + p}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{8 + p}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{15}{2} = \frac{8 + p}{2} \Rightarrow 15 = 8 + p \Rightarrow p = 7$$

12. (0, 0), (3, 0), (0, 2) లు శీర్షాలుగా ఉన్న త్రిభుజ వైశాల్యం కనుక్కోండి?

జ. త్రిభుజం వైశాల్యం $\Delta = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$

$$= \frac{1}{2}\left|0(0 - 2) + 3(2 - 0) + 0(0 - 0)\right|$$

$$= \frac{1}{2}|6| = 3$$

గమనిక: (i) (0,0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) శీర్షాలుగా ఉన్న త్రిభుజ వైశాల్యం = $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$

(ii) (0, 0), (a, 0), (0, b) లు శీర్షాలుగా ఉన్న త్రిభుజ వైశాల్యం = $\frac{1}{2}|a \times b|$

13. A (–1.4, –3.7), B (–2.4, 1.3) బిందువులను కలుపుతూ గీసిన రేఖ వాలు కనుక్కోండి?

జ. దత్త బిందువులు A (–1.4, –3.7), B (–2.4, 1.3)

$$AB \text{ వాలు} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1.3 - (-3.7)}{-2.4 - (-1.4)} = \frac{1.3 + 3.7}{-2.4 + 1.4} = \frac{5}{-1} = -5$$

14. A(–2, 8), B(–2,–2) లతో ఏర్పడు $\overline{AB}$ రేఖాఖండం Y–అక్షానికి సమాంతరంగా ఉంటుంది. ఈ వాక్యం సరైనదేనా? ఎందుకు? అయితే వాలు ఏవిధంగా ఉంటుంది.

జ. $\overline{AB}$ రేఖ వాలు $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-8}{-2-(-2)} = \frac{-10}{0} =$ నిర్వచించడం కుదరదు.

AB వాలు నిర్వచించడం కుదరదు. కాబట్టి $\overline{AB}$ రేఖాఖండం Y–అక్షానికి సమాంతరంగా ఉంటుంది.

($\because$ Y –అక్షం వాలు కూడా నిర్వచించడం కుదరదు)

15. x–2y +k = 0 అనేది, A (–1,3), B (0,4), C (–5, 2) లు శీర్షాలుగా ఉన్న త్రిభుజ మధ్యగత రేఖ అయితే k విలువ ఎంత?

జ. A (–1,3), B (0,4), C (–5, 2) లచే ఏర్పడే త్రిభుజం గురుత్వ కేంద్రం

$$= \left(\frac{-1+0+(-5)}{3}, \frac{3+4+2}{3}\right) = \left(\frac{-6}{3}, \frac{9}{3}\right) = (-2, 3)$$

గురుత్వ కేంద్రం, త్రిభుజ మధ్యగత రేఖపై ఉండును. కాబట్టి గురుత్వ కేంద్రం (–2, 3) మధ్యగత రేఖను తృప్తిపర్చును.

$\therefore (-2) - 2(3) + K = 0$

$\Rightarrow -2 - 6 + k = 0 \Rightarrow K = 8$

16. బిందువులు P (2, 5), Q (x, 3), ల గుండా పోయ్యే రేఖవాలు 2 అయితే x విలువ కనుక్కోండి?

జ. బిందువులు P (2, 5), Q (x, 3) ల గుండా పోయే రేఖ వాలు 2.

ఇక్కడ $x_1 = 2, y_1 = 5, x_2 = x, y_2 = 3$

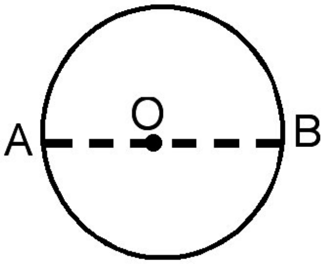
PQ రేఖ వాలు

$$\Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 2 \Rightarrow \frac{3-5}{x-2} = \frac{-2}{x-2}$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{x-2} = 2 \Rightarrow -2 = 2x - 4 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

17 ఒక వృత్తంలో వ్యాసం ఒక చివరి బిందువు (4, −1), వృత్తకేంద్రం (1, −3). అయితే ఆ వ్యాసం మరొక చివరి బిందువు నిరూపకాలను కనుక్కోండి?

జ. AB వృత్త వ్యాసం అనుకోండి. వృత కేంద్రం O (1, –3), వ్యాసపు ఒక చివరి బిందువు A (4, –1), వ్యాసం మరొక చివరి బిందువు B (x, y) అనుకొండి. వ్యాసం మధ్య బిందువు 'O' వృత్త కేంద్రం అవుతుంది.



$\therefore$ 'O' నిరూపకాలు $= \left(\frac{x+4}{2}, \frac{y+(-1)}{2}\right)$

$$(1, -3) = \left(\frac{x+4}{2}, \frac{y-1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x+4}{2} = 1 \quad ; \quad \frac{y-1}{2} = -3$$

$$\Rightarrow x + 4 = 2 \quad ; \quad y - 1 = -6$$

$$\Rightarrow x = -2 \quad ; \quad y = -6 + 1 = -5$$

$\therefore$ వ్యాసం మరొక బిందువు B(x, y) = (–2, –5).

రెండు మార్కుల ప్రశ్నలు

1. బిందువు (x, y), (–2, 8), (–3, –5) లకు సమాన దూరంలో ఉంది. అయితే x, y ల మధ్య సంబంధాన్ని కనుక్కోండి.

జ. P(x, y); A (–2, 8), B (–3, –5) లకు సమానదూరంలో ఉంది అనుకొండి.

అంటే $AP = PB \Rightarrow AP^2 = BP^2$

$\Rightarrow (x-(-2))^2 + (y-8)^2 = (x-(-3))^2 + (y-(-5))^2$

$\Rightarrow (x+2)^2 + (y-8)^2 = (x+3)^2 + (y+5)^2$

$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 + 16 - 16y = x^2 + 6x + 9 + y^2 + 10y + 25$

$\Rightarrow -2x - 26y + 68 - 34 = 0$

$\Rightarrow -2x - 26y = -34$

$x + 13y = 17$

మాదిరి సమస్య: (7, 1), (3, 5) బిందువులకు సమాన దూరంలో ఉండే బిందువు (x, y) అయితే x, y ల మధ్య సంబంధాన్ని కనుక్కోండి?

2. X – అక్షం పై ఉంటూ బిందువులు (2, –5), (–2, 9) లకు సమాన దూరంలో ఉన్న బిందువును కనుక్కోండి?

జ. X–అక్షం పై ఉండే బిందువు P(x, 0) అనుకొనండి. ఈ బిందువు A (2, –5), B (–2, 9)లకు సమాన దూరంలో ఉంటుంది. కాబట్టి PA = PB

$\Rightarrow PA^2 = PB^2$

$(x-2)^2 + (0-(-5))^2 = (x-(-2))^2 + (0-9)^2$

$x^2 - 4x + 4 + 25 = x^2 + 4x + 4 + 81$

$-4x - 4x + 29 - 85 = 0$

$-8x - 56 = 0$

$\therefore$కావలసిన బిందువు P(x, 0) = (-7, 0).

మాదిరి సమస్య: Y – అక్షం పై ఉంటూ బిందువులు A (6, 5), B (–4, 3) లకు సమాన దూరంలో ఉన్న బిందువును కనుక్కోండి?

3. బిందువులు (1, 5), (2, 3), (–2, –1) లు సరేఖీయాలవుతాయో, కాదో సరిచూడండి?

జ. దత్త బిందువులు A (1, 5), B (2, 3), C (–2, –1) అనుకొండి.

$$\overline{AB} = \sqrt{(2-1)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$
$$\overline{BC} = \sqrt{(-2-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$
$$\overline{CA} = \sqrt{(5-(-1))^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

దీని నుంచి $AB + BC \neq CA$

∴ దత్త బిందువులు సరేఖీయాలు కావు.

4. బిందువులు (5, –2), (6, 4), (7, –2) లు ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజ శీర్షాలు అవుతాయో? కాదో? చూపండి.

జ. దత్త బిందువులు A (5, –2), B (6, 4), C (7, –2) లు అనుకొండి.

∴ AB = BC, కాబట్టి దత్త బిందువులు ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజ శీర్షాలు అవుతాయి.

5. బిందువులు A(–6, 10), B (3, –8) లచే ఏర్పడు రేఖా ఖండమును బిందువు (–4, 6) ఏ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది?

జ. AB రేఖా ఖండమును బిందువు (–4, 6) అంతరంగా $m_1:m_2$ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుందనుకుంటే

$$(-4, 6) = \left(\frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}, \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}\right) \text{ ------(1)}$$

అనురూప మూలకాలు పోల్చగా

$$\Rightarrow \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2} = -4 \; ; \; \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} = 6$$
$$\Rightarrow 3m_1 + 6m_2 = -4m_1 - 4m_2$$
$$\Rightarrow 7m_1 - 2m_2 = 0 \Rightarrow 7m_1 = 2m_2$$
$$\therefore \frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{7}$$

$\therefore m_1 : m_2 = 2 : 7$

కాబట్టి దత్త బిందువులు A(-6, 10), B(3, -8) లచే ఏర్పడే రేఖాఖండాన్ని (–4, 6) అనే బిందువు 2 : 7 నిష్పత్తిలో విభజించును.

మాదిరి సమస్య: బిందువులు (–3, 10), (6, –8) లచే రేఖాఖండాన్ని బిందువు (–1, 6) ఏ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుందో కనుక్కోండి.

6. బిందువులు (5, –6), (1, –4) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండాన్ని Y – అక్షం ఏ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది? ఆ ఖండన బిందువును కనుక్కోండి.

జ. బిందువులు A(5, -6), B(1, -4) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండం AB ని Y - అక్షం పై ఉన్న బిందువు K : 1 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది అనుకుంటే ఆ బిందువు నిరూపకాలు

$$\left(\frac{K(-1)+5}{K+1}, \frac{K(-4)+(-6)}{K+1}\right) = \left(\frac{-K+5}{K+1}, \frac{-4K-6}{K+1}\right)$$

కానీ Y - అక్షం పై ఉన్న బిందువు నిరూపకాలలో X - నిరూపకం సున్నా కాబట్టి

$$\frac{-K+5}{K+1} = 0 \Rightarrow -K+5=0 \Rightarrow K=5$$

అందు వల్ల K : 1 = 5 :1

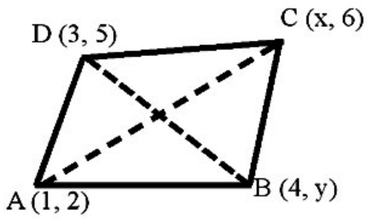
K = 5 విలువను పై బిందు నిరూపకాలలో ప్రతిక్షేపించగా ఖండన బిందువు

$$= \left(\frac{-5+5}{5+1}, \frac{-4(5)-6}{5+1}\right) = \left(0, \frac{-20-6}{6}\right) = \left(0, \frac{-26}{6}\right) = \left(0, \frac{-13}{3}\right)$$

7. బిందువులు (1, 2), (4, y), (x, 6), (3, 5) లు వరుసగా ఒక సమాంతర చతుర్భుజ శీర్షాలు అయితే x, y ల విలువలు కనుక్కోండి.

జ. దత్త బిందువులు A (1, 2), B (4, y), C (x, 6), D (3, 5) లు సమాంతర చతుర్భుజంలో శీర్షాలు అనుకుంటే సమాంతర చతుర్భుజంలో కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకుంటాయని తెలుసు.

∴ అందువల్ల కర్ణాలు AC, BD ల మధ్య బిందువులు సమానం కావాలి.



sakshieducation.com

AC మధ్య బిందువు = BD ల మధ్య బిందువు.

$$\left(\frac{1+x}{2}, \frac{2+6}{2}\right) = \left(\frac{4+3}{2}, \frac{y+5}{2}\right)$$

$$\frac{1+x}{2} = \frac{4+3}{2} \Rightarrow 1+x=7 \Rightarrow x=7-1 \Rightarrow x=6$$

$$\frac{y+5}{2} = \frac{2+6}{2} \Rightarrow y+5=8 \Rightarrow y=8-5 \Rightarrow y=3$$

$$\therefore\ x=6,\ y=3$$

8. బిందువులు (1, 1), (−4, 6), (−3, −5) శీర్షాలుగా ఉన్న త్రిభుజం వైశాల్యం కనుక్కోండి.

జ. ΔABC శీర్షాలు A (-1, 1), B (–4, 6), C (–3, –5) అనుకొండి.

త్రిభుజ వైశాల్యం $\Delta = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|$

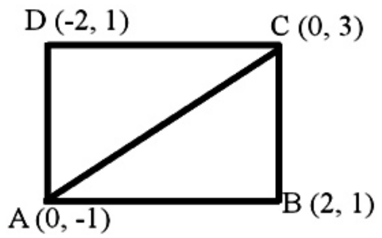
$$= \frac{1}{2}\left|1(6+5)+(-4)(-5+1)+(-3)(-1-6)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|11+16+21\right| = \frac{1}{2}\times 48 = 24$$

మాదిరి సమస్య: బిందువులు (3, -1), (5, 0), (1, -2) శీర్షాలు ఉన్న త్రిభుజ వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.

9. బిందువులు (0, −1), (2, 1), (0, 3), (−2, 1) లు శీర్షాలుగా ఉన్న చతురస్రం వైశాల్యం కనుక్కోండి.

జ. చతురస్ర వైశాల్యం = 2 × ΔABC వైశాల్యం → (1)



ΔABC వైశాల్యం = $= \frac{1}{2}\left|0(1-3)+2(3+1)+0(-1-1)\right| = \frac{1}{2}|8| = 4$ చ.యూ.

సమీ।। (1) నుంచి

చతురస్ర వైశాల్యం = 2 × 4 = 8 చ.యూనిట్లు.

గమనిక: చతురస్ర భుజం పొడవు కనుగొని చతురస్ర వైశాల్యం = a^2 నుంచి కనుక్కోవచ్చు.

10. ఒక తలంలో ఉన్న బిందువులు (3, −2), (−2, 8), (0, 4) లు. ఇవి సరేఖీయ బిందువులు అని చూపండి.

జ. త్రిభుజ వైశాల్యం కనుగొను సూత్రం ఉపయోగించి

$$\Delta = \frac{1}{2}\left|3(8-4)+(-2)(4-(-2))+0(-2-8)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|12-12+0\right| = 0$$

∴ త్రిభుజ వైశాల్యం సున్నా. కాబట్టి ఇచ్చిన బిందువులు సరేఖీయ బిందువులు.

4 మార్కులు ప్రశ్నలు

1. బిందువులు A (a, 0), B(–a, 0), C (0, a√3) అనేవి ఒక సమబాహు త్రిభుజాన్ని ఏర్పరచగలవని చూపండి.

జ. దత్త బిందువులు A (a, 0), B (–a, 0), C (0, a√3)

రెండు బిందువుల మధ్య దూరం $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$AB = \sqrt{(-a-a)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(2a)^2} = 2a$$

$$BC = \sqrt{(0-(-a))^2 + (a\sqrt{3}-0)^2} = \sqrt{a^2+3a^2} = \sqrt{4a^2} = 2a$$

$$CA = \sqrt{(0-a)^2 + (a\sqrt{3}-0)^2} = \sqrt{a^2+3a^2} = \sqrt{4a^2} = 2a$$

∴ AB = BC = CA, కాబట్టి దత్త బిందువులు సమబాహు త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుచును.

2. బిందువులు (−3, 5), (3, 1), (0, 3),(−1, −4) లచే ఏర్పడు చతుర్భుజం ఏ రకమైనదో దాని పేరు తెల్పండి. మీ సమాధానానికి సరైన కారణం తెల్పండి?

జ. దత్త బిందువులు A (–3, 5), B(3, 1), C (0, 3), D (–1, –4) అనుకోండి.

$$AB = \sqrt{(3-(-3))^2 + (1-5)^2} = \sqrt{(6)^2+(-4)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$$

$$BC = \sqrt{(0-3)^2+(3-1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$CA = \sqrt{(-1-0)^2+(-4-3)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$$

$$DA = \sqrt{(-3-(-1))^2+(5-(-4))^2} = \sqrt{4+81} = \sqrt{85}$$

$AB \neq BC \neq CD \neq DA$

$\therefore$ దత్త బిందువులు చతుర్భుజాన్ని ఏర్పరుచును.

గమనిక: i) AB = BC = CD = DA, AC = BD, అయితే ABCD ఒక చతురస్రం.

ii) AB = BC = CD = DA, AC ≠ BD, అయితే ABCD రాంబస్.

iii) AB = CD, BC = DA, AC = BD అయితే ABCD దీర్ఘ చతురస్రం.

iv) AB = CD, BC = DA, AC ≠ BD అయితే ABCD సమాంతర చతుర్భుజం.

3. బిందువులు (–7, –3), (5, 10), (15, 8), (3, –5) లు వరుసగా ఒక సమాంతర చతుర్భుజం శీర్షాలు అవుతాయని చూపండి.

జ. దత్త బిందువులు A(–7, –3), B (5, 10), C(15, 8) D (3, –5)

$$AB = \sqrt{(5 - (-7))^2 + (10 - (-3))^2} = \sqrt{(5+7)^2 + (10+3)^2} = \sqrt{144+169} = \sqrt{313}$$

$$BC = \sqrt{(15-5)^2 + (8-10)^2} = \sqrt{100+4} = \sqrt{104}$$

$$CD = \sqrt{(3-15)^2 + (-5-8)^2} = \sqrt{144+169} = \sqrt{313}$$

$$DA = \sqrt{(3+7)^2 + (-5+3)^2} = \sqrt{100+4} = \sqrt{104}$$

$$AC = \sqrt{(15+7)^2 + (8+3)^2} = \sqrt{484+121} = \sqrt{605}$$

$$BD = \sqrt{(3-5)^2 + (-5-10)^2} = \sqrt{4+225} = \sqrt{229}$$

దీని నుంచి AB = CD, BC = DA, AC ≠ BD

$\therefore$కాబట్టి ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజం అవుతుంది.

4. బిందువులు (–4, –7), (–1, 2), (8, 5), (5, –4) లు వరుసగా ఒక సమచతుర్భుజ శీర్షాలు అవుతాయని చూపండి. (సూచన: రాంబస్ వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times$ కర్ణాల లబ్ధం)

జ. దత్త శీర్షాలు A(–4, –7), B(–1, 2), C(8, 5), D(5, –4)

$$AB = \sqrt{(-1 - (-4))^2 + (2 - (-7))^2} = \sqrt{(3)^2 + (9)^2} = \sqrt{9+81} = \sqrt{90}$$

$$BC = \sqrt{(8-(-1))^2 + (5-2)^2} = \sqrt{9^2 + 3^2} = \sqrt{90}$$

$$CD = \sqrt{(5-8)^2 + (-4-5)^2} = \sqrt{9+81} = \sqrt{90}$$

$$DA = \sqrt{(-4-5)^2 + (-7+4)^2} = \sqrt{81+9} = \sqrt{90}$$

$$AC = \sqrt{(8-(-4))^2 + (5-(-7))^2} = \sqrt{144+144} = \sqrt{288}$$

$$BD = \sqrt{(5-(-1))^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72}$$

$\therefore$ AB = BC = CD = DA, AC $\neq$ BD

$\therefore$ ABCD ఒక సమచతుర్భుజాన్ని ఏర్పర్చును. (రాంబస్)

$\therefore$ రాంబస్ వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times$ కర్ణాల లబ్ధం

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{288} \times \sqrt{72}$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{288 \times 72}$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{72 \times 4 \times 72} = \frac{1}{2} \times 72 \times 2 = 72$$

మాదిరి సమస్య:

1) బిందువులు A (2, –2), B (14, 10), C (11, 13), D (–1, 1) లు దీర్ఘ చతురస్ర శీర్షాలని చూపండి.

2) బిందువులు A (3, 9), B (6, 4), C (1, 1), D (–2, 6) లు చతురస్రం ABCD శీర్షాలు అవుతాయని చూపండి.

5. బిందువులు A (2, –2), B(–7, 4) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండానికి త్రిథాకరణ బిందువులు కనుక్కోండి.

జ. ఒక రేఖాఖండాన్ని మూడు సమాన భాగాలుగా విభజించు బిందువులను “త్రిథాకరణ బిందువులు” అంటారు. (లేదా)

ఒక రేఖా ఖండాన్ని 1:2, 2:1 నిష్పత్తులలో విభజించు బిందువులను “త్రిథాకరణ బిందువులు” అంటారు.

AB రేఖా ఖండం త్రిథాకరణ బిందువులు P, Q అనుకుంటే AP = PQ= QB.

sakshieducation.com

AB రేఖా ఖండాన్ని బిందువు P అంతరంగా 1:2 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది. కాబట్టి విభజన సూత్రం నుంచి

$$P(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$$

$$= \left(\frac{1(-7)+2(2)}{1+2}, \frac{1(4)+2(-2)}{1+2}\right)$$

$$= \left(\frac{-7+4}{3}, \frac{4-4}{3}\right) = \left(\frac{-3}{3}, \frac{0}{3}\right) = (-1, 0)$$

బిందువు Q కూడా AB రేఖాఖండాన్ని అంతరంగా 2:1 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది. కాబట్టి బిందువు Q నిరూపకాలు

$$= \left(\frac{2(-7)+1(2)}{2+1}, \frac{2(4)+1(-2)}{2+1}\right)$$

$$= \left(\frac{-14+2}{3}, \frac{8-2}{3}\right) = \left(\frac{-12}{3}, \frac{6}{3}\right) = (-4, 2)$$

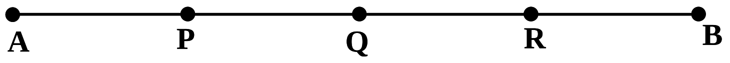
$\therefore$ AB రేఖా ఖండం త్రిథాకరణ బిందువులు P (–1, 0), Q (–4, 2).

మాదిరి సమస్య: బిందువులు (2, -6), (–4, 8) లను కలుపు రేఖాఖండం త్రిథాకరణ బిందువులను కనుక్కోండి.

6. బిందువులు A (–2, 2), B (2, 8) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండాన్ని నాలుగు భాగాలుగా విభజించి బిందువుల నిరూపకాలు కనుక్కోండి.

జ. దత్త బిందువులు A (–2, 2), B (2, 8) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండాన్ని P, Q, R అను బిందువులు నాలుగు సమాన భాగాలుగా విభజిస్తాయి అనుకుంటే.

P బిందువు $\overline{AB}$ ని 1:3 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది. కాబట్టి



$$P(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$$

$$= \left(\frac{1(2)+3(-2)}{1+3}, \frac{1(8)+3(2)}{1+3}\right)$$

$$= \left(-1, \frac{7}{2}\right)$$

Q బిందువు $\overline{AB}$ ని 2:2= 1:1 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది. అంటే $\overline{AB}$ మధ్య బిందువు అవుతుంది.

sakshieducation.com

$$Q(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{-2+2}{2}, \frac{2+8}{2}\right) = (0, 5)$$

R బిందువు $\overline{AB}$ ని 3:1 నిష్పత్తిలో విభజించును.

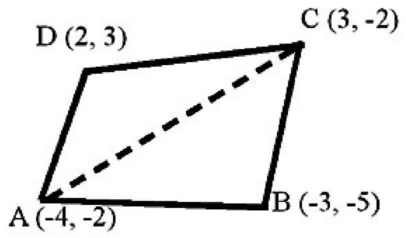
$$R(x, y) = \left(\frac{3(2)+1(-2)}{3+1}, \frac{3(8)+1(2)}{3+1}\right) = \left(\frac{4}{4}, \frac{26}{4}\right) = \left(1, \frac{13}{2}\right)$$

$\therefore$ $\overline{AB}$ ని నాలుగు సమాన భాగాలుగా విభజించు బిందువులు $P\left(-1, \frac{7}{2}\right)$, $Q(0, 5)$, $R\left(1, \frac{13}{2}\right)$.

మాదిరి సమస్య: A (–4, 0), B (0, 6) బిందువులను కలుపు రేఖా ఖండాన్ని నాలుగు సమాన భాగాలు చేసే బిందువులను కనుక్కోండి.

7. బిందువులు (–4, –2), (–3, –5), (3, –2), (2, 3) శీర్షాలుగా ఉన్న చతుర్భుజం వైశాల్యం కనుక్కోండి.

జ. దత్త శీర్షాలు A(–4, –2), B (–3, –5), C (3, –2) D(2, 3) అనుకోండి.



చతుర్భుజం ABCD వైశాల్యం = ΔABC వైశాల్యం + ΔACD వైశాల్యం

ΔABC వైశాల్యం $= \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$

$$= \frac{1}{2}\left|-4(-5-(-2)) + (-3)(-2-(-2)) + 3(-2-(-5))\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|-4(-3) + (-3)(0) + 3(3)\right| = \frac{1}{2}|12+9| = \frac{21}{2} = 10.5$$

ΔACD వైశాల్యం

$$= \frac{1}{2}\left|-4(-2-3) + 3(3-(-2)) + 2(-2-(-2))\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|-4(-5) + 3(5) + 2(0)\right| = \frac{1}{2}|20+15| = \frac{35}{2} = 17.5$$

∴ చతుర్భుజం ABCDవైశాల్యం = ΔABC వై + ΔACD వై

= 10.5 + 17.5 = 28 చ.యూ.

మాదిరి సమస్య: బిందువులు A (–5, 7), B (–4, –5), C(–1, –6), D (4, 5) లు ఒక చతుర్భుజ శీర్షాలు అయితే ABCD చతుర్భుజ వైశాల్యం కనుక్కోండి.

8. (k, k) (2, 3), (4, –1) లు సరేఖీయాలు అయితే 'k' విలువ కనుక్కోండి.

జ. దత్త బిందువులు A (k, k), B (2, 3), C (4, –1) లు సరేఖీయాలు, కాబట్టి ΔABC వైశాల్యం = 0 అవుతుంది.

$$\therefore \Delta = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right| = 0$$

$$= \frac{1}{2}\left|k(3-(-1)) + 2(-1-k) + 4(k-3)\right| = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left|k(4) - 2 - 2k + 4k - 12\right| = 0$$

$$\Rightarrow |6k - 14| = 0 \Rightarrow 6k - 14 = 0 \Rightarrow 6k = 14 \Rightarrow k = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

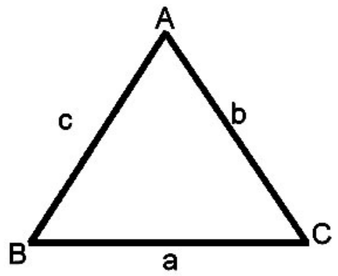
మాదిరి సమస్య:

1) బిందువులు (7, –2), (5, 1), (3, k) లు సరేఖీయాలైతే 'k' విలువ కనుక్కోండి.

2) బిందువుల A (1, 2), B (–1, b), C (–3, –4) లు సరేఖీయాలైతే 'b' విలువ కనుక్కోండి

9. బిందువులు (0,0), (4, 0), (4, 3) లతో ఏర్పడు త్రిభుజ వైశాల్యాన్ని హెరాన్ సూత్రం ద్వారా కనుక్కోండి.

జ. దత్త బిందువులు A(0, 0), B(4, 0), C(4, -3) అనుకోండి, a, b, c లు వరుసగా BC, CA, AB త్రిభుజ భుజాలు అవుతాయి.



$$a = \overline{BC} = \sqrt{(4-4)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{0+9} = \sqrt{9} = 3$$

$$b = \overline{AC} = \sqrt{(4-0)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$c = \overline{AB} = \sqrt{(4-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{16+0} = 4$$

$$\therefore\ S = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3+5+4}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

హెరాన్ సూత్రం

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{6(6-3)(6-5)(6-4)}$$

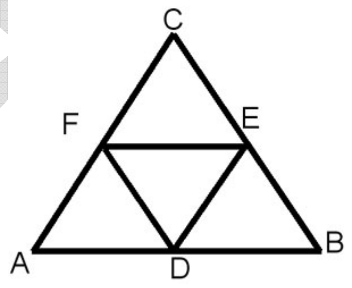
$$= \sqrt{6(3)(1)(2)} = 6$$

10. బిందువులు (0, –1), (2, 1), (0, 3) శీర్షాలు కలిగిన త్రిభుజ వైశాల్యం, దాని భుజాల మధ్య బిందువులని కలిపితే ఏర్పడిన త్రిభుజ వైశాల్యాల నిష్పత్తిని కనుక్కోండి.

జ. దత్త బిందువులు A(0, –1), B(2, 1), C(0, 3) త్రిభుజం ABC శీర్షాలు అనుకుంటే

AB మధ్య బిందువు D, BC మధ్య బిందువు E

CA మధ్య బిందువు F అనుకోండి.



$$D = \left(\frac{0+2}{2}, \frac{-1+1}{2}\right) = (1, 0)$$

$$E = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = (1, 2)$$

$$F = \left(\frac{0+0}{2}, \frac{3-1}{2}\right) = (0, 1)$$

ΔABC వైశాల్యం $= \frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|$

sakshieducation.com

$$= \frac{1}{2}\left|0(1-3)+2(3-(-1))+0(-1-1)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|0+8+0\right| = 4$$

ΔDEF వైశాల్యం $= \frac{1}{2}\left|1(2-1)+1(1-0)+0(0-2)\right| = \frac{1}{2}\left|1+1+0\right| = 1$

$\therefore \Delta ABC, \Delta DEF$ ల వైశాల్యాల నిష్పత్తి = 4 : 1.

11. బిందువులు (0, −1), (2, 1), (0, 3), (−2, 1) లచే ఏర్పడు చతురస్ర వైశాల్యం కనుక్కోండి.

జ. చతురస్రంలో నాలుగు భుజాలు సమానం. కాబట్టి

చతురస్రం భుజం $a = \sqrt{(2-0)^2+(1-(-1))^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

చతురస్ర వైశాల్యం = భుజం × భుజం = $\sqrt{8} \times \sqrt{8}$ = 8 చ.యూనిట్లు.

12. A (5, 1), B (–3, –7), C (7, –1) ల నుంచి సమాన దూరంలో ఉండే బిందు నిరూపకాలు కనుక్కోండి.

జ. p(x, y) అనే బిందువు దత్త బిందువులకు సమాన దూరంలో ఉంటుంది అనుకోండి.

అప్పుడు $PA = PB = PC \Rightarrow PA^2 = PB^2 = PC^2$

p(x, y), A (5, 1), B (–3, –7), C (7, –1)

$PA^2 = PB^2 \Rightarrow (x-5)^2 + (y-1)^2 = (x+3)^2 + (y+7)^2$

$\Rightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + 6x + 9 + y^2 + 14y + 49$

$\Rightarrow -16x - 16y + 26 - 58 = 0$

$\Rightarrow -16x - 16y - 32 = 0$

$\Rightarrow x + y + 2 = 0 \rightarrow (1)$

$PB^2 = PC^2 \Rightarrow (x+3)^2 + (y+7)^2 = (x-7)^2 + (y+1)^2$

$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 + 14y + 49 = x^2 - 14x + 49 + y^2 + 2y + 1$

$\Rightarrow 6x + 14x + 14y - 2y + 58 - 50 = 0$

$\Rightarrow 20x + 12y + 8 = 0$

$\Rightarrow 5x + 3y + 2 = 0 \rightarrow (2)$

సమీ॥ (1) & (2) ల నుంచి

$(1) \times 3 \Rightarrow 3x + 3y + 6 = 0$

$(2) \times 1 \Rightarrow 5x + 3y + 2 = 0$

$(-) \; (-) \quad (-)$

$-2x + 4 = 0$

$x = \frac{-4}{-2} = 2$

సమీ॥ (1) లో x = 2 ను ప్రతిక్షేపించగా

$x + y + 2 = 0$

$\Rightarrow 2 + y + 2 = 0 \Rightarrow y = -4$

∴కావలసిన బిందువు (2, –4) అవుతుంది.

13. బిందువులు (a, b + c), (b, c + a), (c, a + b) లు సరేఖీయాలు అని చూపండి.

జ. దత్త బిందువులు A (a, b + c), B (b, c + a), C (c, a + b) లు అనుకోండి.

ΔABC వైశాల్యం $= \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$

$= \frac{1}{2}\left|a\left(c + a - (a + b)\right) + b\left(a + b - (b + c)\right) + c\left(b + c - (c + a)\right)\right|$

$= \frac{1}{2}\left|a(c - b) + b(a - c) + c(b - a)\right|$

$= \frac{1}{2}\left|ac - ab + ba - bc + bc - ac\right|$

$= \frac{1}{2}|0| = 0$

∴ΔABC వైశాల్యం '0' కాబట్టి దత్త బిందువులు సరేఖీయాలు.

14. A (3, 2), B (–2, 1) లు శీర్షాలుగా ఉన్న త్రిభుజం ABC గురుత్వ కేంద్రం G నిరూపకాలు $\left(\frac{5}{3}, \frac{-1}{3}\right)$ అయితే త్రిభుజం మూడో శీర్షం C నిరూపకాలు కనుక్కోండి.

జ. దత్త బిందువులు A (3, 2), B (–2, 1) లు ΔABC కి రెండు శీర్షాలు. మూడో శీర్షం C(x, y)అనుకోండి.

ΔABC గురుత్వ కేంద్రం G = $\left(\frac{5}{3}, \frac{-1}{3}\right)$ అని ఇచ్చారు.

G నిరూపకాలు = $= \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

$$\left(\frac{5}{3}, \frac{-1}{3}\right) = \left(\frac{3+(-2)+x}{3}, \frac{2+1+4}{3}\right)$$

$$\left(\frac{5}{3}, \frac{-1}{3}\right) = \left(\frac{x+1}{3}, \frac{y+3}{3}\right)$$

$$\frac{x+1}{3} = \frac{5}{3} \Rightarrow x+1=5 \Rightarrow x = 5 - 1 = 4$$

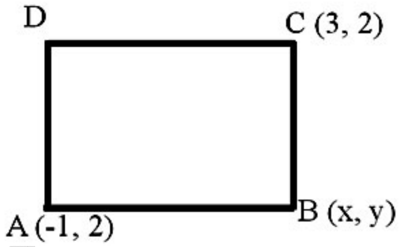
$$\frac{y+3}{3} = \frac{-1}{3} \Rightarrow y+3 = -1 \Rightarrow y = -1 - 3 = -4$$

$\therefore$ త్రిభుజ మూడో శీర్షం C నిరూపకాలు (4, –4).

15. (–1, 2), (3, 2)లు ఒక చతురస్రం ఎదుటెదుటి శీర్షాలు అయితే, దాని మిగిలిన రెండు శీర్షాలు కనుక్కోండి.

జ. చతురస్రం ఎదుటెదుటి శీర్షాలు A (–1, 2), C (3, 2)

ఒక శీర్షం B (x, y) అనుకోండి.



AB = BC ($\because$ చతురస్రంలో అన్ని భుజాలు సమానం)

$\Rightarrow$ AB = BC

$\Rightarrow AB^2 = BC^2$

$(x-(-1))^2 + (y-2)^2 = (3-x)^2 + (2-y)^2$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 9 + x^2 - 6x + 4 + y^2 - 4y$

$2x + 6x - 4y + 4y + 5 - 13 = 0$

$\Rightarrow 8x = 13 - 5 \Rightarrow x = 1 \rightarrow (1)$

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుంచి ABC లంబకోణ త్రిభుజం కాబట్టి

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$(3+1)^2 + (2-2)^2 = (x+1)^2 + (y-2)^2 + (x-3)^2 + (y-2)^2$

$16 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4$

$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 4x - 8y + 18 = 16$

$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$

సమీ।। (1)నుంచి x = 1ను ప్రతిక్షేపించగా

$(1)^2 + y^2 - 2(1) - 4y + 1 = 0$

$1 + y^2 - 2 - 4y + 1 = 0$

$y^2 - 4y = 0$

$y(y - 4) = 0 \Rightarrow y = 0$ or $y - 4 = 0$

$\Rightarrow y = 0$ or $y = 4$

$\therefore$ మిగిలిన రెండు శీర్షాలు (1, 0), (1, 4)లు.

sakshieducation.com

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

1. X - అక్షం పై ఉండే ప్రతి బిందువులో Y - నిరూపకం _______ [ ]

a) 1 b) 2 c) 3 4) 0

2. X - అక్షం నుంచి (3, 4) బిందువుకు ఉన్న దూరం = _______ [ ]

a) 3 b) 4 c) 1 d) 7

3. మూలబిందువు నుంచి (5, –2) కు ఉన్న దూరం _______ [ ]

a) $\sqrt{29}$ b) $\sqrt{21}$ c) $\sqrt{30}$ d) $\sqrt{28}$

4. (0, 0), (2, 0), (0, 2) బిందువులకు సమాన దూరంలో ఉండే బిందువు [ ]

a) (1, 2) b) (2, 1) c) (2, 2) d) (1, 1)

5. బిందువులు (3, a), (4, 1) ల మధ్య దూరం $\sqrt{10}$, అయితే a విలువ [ ]

a) 3, –1 b) 2, –2 c) 4, –2 d) 5, –3

6. (x, y) బిందువు (2, 1), (1, –2)లకు సమాన దూరంలో ఉంటుంది. అయితే [ ]

a) $x + 3y = 0$ b) $3x + y = 0$ c) $x + 2y = 0$ d) $2y + 3x = 0$

7. (–2, 0), (2, 0), (2, 2) (0, 4), (-2, 2) లచే ఏర్పడు సంవృత పటం [ ]

a) త్రిభుజం b) చతుర్భుజం c) పంచభుజి d) షడ్భుజి

8. P, Q బిందు నిరూపకాలు వరుసగా (a cosθ, b sinθ), (–a sinθ, b cosθ) అయితే

$OP^2 + OQ^2$ =___________ [ ]

a) $a^2 + b^2$ b) a + b c) ab d) 2ab

9. (–3, –3) బిందువు ఉండు పాదం [ ]

a) I b) II c) III d) IV

10. బిందువులు (k, 3), (2, 3) బిందువుల మధ్య దూరం 5 అయితే K విలువ [ ]

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8

11. A, B, C బిందువులు ఒకే సరళరేఖ పై ఉన్న మూడు వరుస బిందువులు అయినా నియమం [ ]

a) AB + BC = AC b) BC + CA = AB

c) CA + AB = BC d) AB + BC = 2AC

sakshieducation.com

12. (5, 0), (0, 4) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండాన్ని 2 : 3 నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజించే బిందువు [ ]

a) $\left(3, \frac{8}{5}\right)$ b) $\left(1, \frac{4}{5}\right)$ c) $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{4}\right)$ d) $\left(2, \frac{12}{5}\right)$

13. బిందువులు (0. 0), (a, 0), (0, b) లు సరేఖీయాలు అయితే [ ]

a) $a = b$ b) $a + b \neq 0$ c) $ab = 0$ d) $a \neq b$

14. బిందువులు (8, –5), (–4, 7), (11, 13) లు శీర్షాలుగా ఉన్న త్రిభుజ గురుత్వ కేంద్ర నిరూపకాలు [ ]

a) (2, 2) b) (3, 3) c) (4, 4) d) (5, 5)

15. ΔABC శీర్షాలు A, B, C లు వరుసగా (0, –1), (2, 1), (0, 3) అయితే, B గుండా పోయే మధ్యగతరేఖ పొడవు ______. [ ]

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

16. బిందువులు (4, y), (6, 9), (x, y)లు శీర్షాలుగా ఉన్న త్రిభుజ గురుత్వ కేంద్రం (3, 6) అయితే, x,y విలువలు ______ [ ]

a) –1, –5 b) 1, –5 c) 1, 5 d) –1, 5

17. సమాంతర చతుర్భుజం ఒక శీర్షం (2, 3), దాని కర్ణాల ఖండన బిందువు (3, –2). అయితే ఎదుటి శీర్షం ______ [ ]

a) (4, –7) b) (4, 7) c) (–4, 7) d) (–4, –7)

18. బిందువులు (–2, 1), (1, 0), (4, 3) లు వరుసగా ఒక సమాంతర చతుర్భుజ శీర్షాలు అయితే నాలుగో శీర్షం__________ [ ]

a) (1, 4) b) (1, –2) c) (–1, 2) d) (–1, –2)

19. బిందువులు (1, 2), (–1, x), (2, 3) లు సరేఖీయాలు అయితే x విలువ ______ [ ]

a) 2 b) 0 c) –1 d) 1

20. (a, 0), (0, b), (1, 1)లు సరేఖీయాలు అయితే ______ [ ]

a) 0 b) 1 c) 2 d) –1

సమాధానాలు

1) d	2) b	3) a	4) d	5) c	6) a	7) c
8) a	9) c	10) c	11) a	12) a	13) c	14) d
15) b	16) a	17) a	18) a	19) b	20) b	

ఖాళీలు పూరించండి:

1. X – అక్షం, Y – అక్షంల ఖండన బిందువు నిరూపకాలు __________.

2. Y–అక్షం పై ఉన్న ప్రతి బిందువుకి X– నిరూపకం _________.

3. Y –అక్షం నుంచి బిందువు (3, 4) కు ఉన్న దూరం ________.

4. (0, 3), (–2, 0) ల మధ్య దూరం ______.

5. (5, 4), (–3, 2)లు ఒక చతురస్రం ఎదుటెదుటి శీర్షాలు అయితే, కర్ణం పొడవు____________.

6. బిందువులు (a cosθ + b sinθ, 0), (0, a sinθ – b cosθ) ల మధ్య దూరం ___________.

7. (0, 0) (3a, 0), (0, 3b) లు శీర్షాలుగా ఉన్న త్రిభుజ గురుత్వ కేంద్రం ______.

8. మూలబిందువు 'O', P (3, 0), R (0, 4) లతో ఏర్పడిన దీర్ఘ చతురస్రం OPQR అయితే నాలుగో శీర్షం Q నిరూపకాలు _________.

9. (a, b), (b, c), (c, a) లు శీర్షాలుగా ఉన్న త్రిభుజ గురుత్వ కేంద్రం (0, 0) అయితే $a^3 + b^3 + c^3$ విలువ __________.

10. బిందువులు (–2, –1), (a, 0), (4, b), (1, 2) లు సమాంతర చతుర్భుజ శీర్షాలు అయితే a, b విలువలు _______.

11. (0, 0), (a, 0), (0, b) లు త్రిభుజంలోని మూడు శీర్షాలు అయితే, త్రిభుజ వైశాల్యం _________.

12. రేఖాఖండం ఒక చివర బిందువు (4, 0), దాని మధ్య బిందువు (4, 1) అయితే ఆ రేఖ మరొక చివర బిందువు ______.

13. (6, 8), (2, 4) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండం మధ్య బిందువు నుంచి, (1, 2) కు ఉన్న మధ్య దూరం _______.

14. (0, 0), (3, 0), (0, 4) లచే ఏర్పడు త్రిభుజ వైశాల్యం ________.

15. (x_1, y_1), (x_2, y_2) బిందువులను కలుపు రేఖాఖండం మధ్య బిందు నిరూపకాలు ___________.

16. బిందువులు $(a \cos 25^0, 0)$, $(0, a \cos 65^0)$ ల మధ్య దూరం _______.

17. (–3, –4), (1, –2) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండాన్ని Y – అక్షం విభజించే నిష్పత్తి _________.

18. A (5, 3), B (11, –5), P(12, y) లు ఒక లంబ కోణ త్రిభుజ శీర్షాలు, P వద్ద లంబ కోణం ఉంటే y = _________.

19. (0, 0), (1, 0), (0, 1) లచే ఏర్పడు త్రిభుజం చుట్టుకొలత _______.

20. O (0, 0), A (a, 0), B (0, b) లచే ఏర్పడు త్రిభుజం పరివృత్త కేంద్రం నిరూపకాలు __________.

సమాధానాలు:

1) (0, 0)	2) 0	3) 3యూనిట్లు	4) √13 యూనిట్లు
5) 10 యూనిట్లు	6) $\sqrt{a^2 + b^2}$	7) (a, b)	8) (3, 4)
9) 3abc	10) a = 1, b = 3	11) $\frac{1}{2}ab$	12) (4, 2)
13) 5 యూనిట్లు	14) 6చ.యూనిట్లు	15) $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$	
16) a యూనిట్లు	17) 3 : 1	18) 2 or -4	
19) 2 + √2	20) $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$		

sakshieducation.com