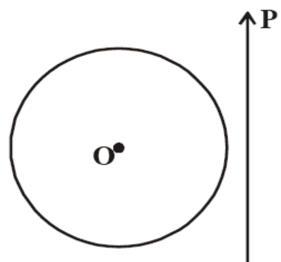
అధ్యాయం – 9

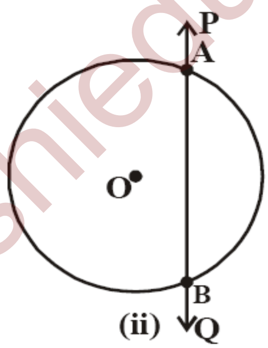
వృత్తాలకు స్పర్శరేఖలు, ఛేదనరేఖలు

1.



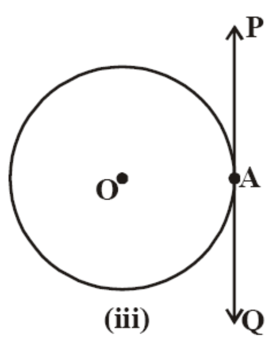
(i)

⇒ పై పటంలో PQ రేఖకు, వృత్తానికి ఉమ్మడి బిందువు లేదు. ఈ సందర్భంలో PQని వృత్తానికి **అఖండిత రేఖ** అంటాం.



(ii)

⇒ పై పటంలో PQ రేఖ వృత్తాన్ని రెండు బిందువులు A, B వద్ద ఖండించింది. ఈ రెండు ఉమ్మడి బిందువులతో AB జ్యా ఏర్పడింది. ఈ సందర్భంలో PQ రేఖను వృత్తానికి **ఖండిత రేఖ** లేదా **ఛేదన రేఖ** అంటాము.



(iii)

⇒ పై పటంలో PQ రేఖకు వృత్తానికి ఒకే ఒక్క ఉమ్మడి బిందువు ఏర్పడింది. ఈ సందర్భంలో PQ రేఖను వృత్తానికి స్పర్శ రేఖ అంటాం.

2. స్పర్శ రేఖ(tangent) అనే పదం లాటిన్ పదం టాన్ గ్రీ (tangere) అనే పదం నుంచి వచ్చింది. దీని అర్థం "స్పర్శించడం". ఈ పదాన్ని మొదటిసారిగా డెన్మార్క్ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు థామస్ ఫిన్కే, 1583 సంవత్సరంలో ప్రవేశపెట్టాడు.

3. వృత్తాన్ని సర్శరేఖ తాకినప్పుడు ఏర్పడే ఉమ్మడి బిందువును మనం "స్పర్శ బిందువు" అంటాము. స్పర్శబిందువు ద్వారా పోయే రేఖను మనం వృత్తానికి స్పర్శరేఖ అంటాము.

4. వృత్తంపై ఉన్న ఏ బిందువు నుంచైనా స్పర్శరేఖను గీయగలం.

5. ఒక తలంలో వృత్తంపై వ్యాసార్థం, చివరి బిందువు ద్వారా గీసిన రేఖ దీనికి లంబంగా ఉంటే ఆ రేఖా వృత్తనికి స్పర్శరేఖ అవుతుంది.

6. వృత్తాన్ని, ఒక స్పర్శరేఖ ఒకటో బిందువు వద్ద ఖండిస్తుంది.

7. వృత్తాన్ని, ఒక రేఖ రెండు వేరువేరు బిందువుల వద్ద ఖండిస్తే దీనిని ఛేదన రేఖ అంటారు.

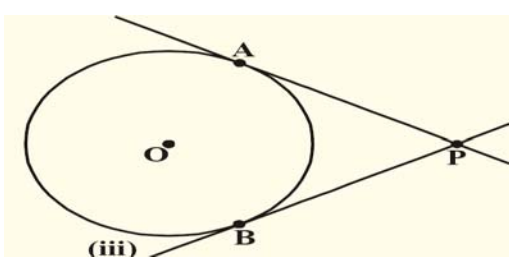
8. ఒక వృత్తానికి గరిష్టంగా గీయగలిగే సమాంతర రేఖలు రెండు.

9. ఒక వృత్తానికి, దాని స్పర్శరేఖకు గల ఉమ్మడి బిందువును స్పర్శ బిందువు అంటారు.

10. ఒక వృత్తానికి మనం అనంత స్పర్శరేఖలను గీయగలం.

11. ఒక వృత్త వ్యాసం చివరి బిందువుల వద్ద గీసిన స్పర్శరేఖలు సమాంతరం.

12.



సందర్భం(i): వృత్త అంతరంలో ఉన్న ఏ బిందువు గుండానైనా వృత్తానికి స్పర్శరేఖ గీయలేం.

సందర్భం(ii): వృత్తంపై ఉన్న ఏ బిందువు గుండానైనా పోయే వృత్తానికి ఒకే ఒక స్పర్శరేఖ గీయవచ్చు.

సందర్భం(iii): వృత్త బాహ్యంలో ఉన్న ఏదైనా బిందువు గుండా వృత్తానికి కచ్చితంగా రెండు స్పర్శరేఖలు గీయవచ్చు.

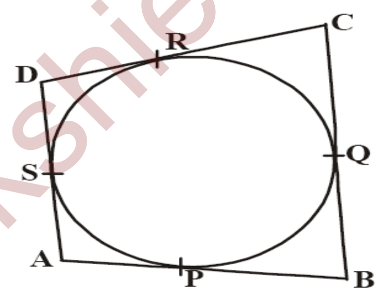
ఈ సందర్భంలో వృత్తానికి A, B అనేవి స్పర్శ బిందువులు, PA, PB లు స్పర్శరేఖలు. వృత్తంలో బాహ్యబిందువు P నుంచి స్పర్శ బిందువుకు గీసిన రేఖాఖండం పొడవును ఆ వృత్తానికి బాహ్య బిందువు P నుంచి గీసిన స్పర్శరేఖ పొడవు అంటాం.

13. వృత్తానికి బాహ్య బిందువు గుండా గీసిన స్పర్శరేఖల పొడవు సమానం.

14. వృత్తానికి బాహ్య బిందువు నుంచి గీసిన స్పర్శరేఖల మధ్య ఏర్పడే కోణం సమద్వి ఖండన రేఖపై ఆ వృత్తం కేంద్రం ఉంటుంది.

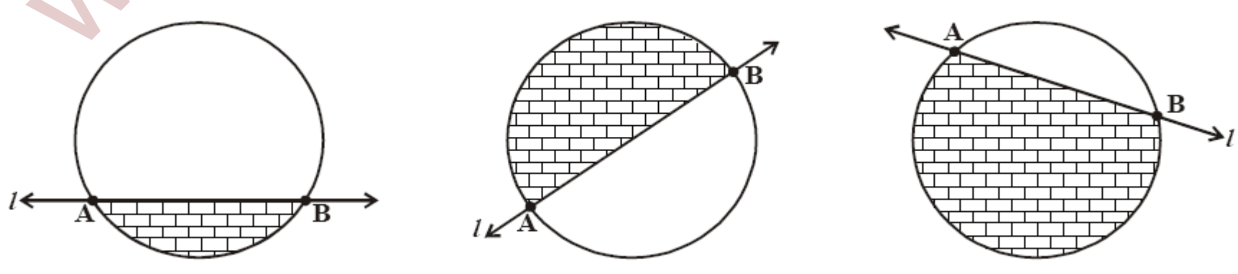
15. రెండు ఏక కేంద్ర వృత్తాల్లో బాహ్యవృత్తం జ్యా, అంతర వృత్తం స్పర్శబిందువు వద్ద సమద్వి ఖండన అవుతుంది.

16. ఒక వృత్తం ABCD చతుర్భుజాన్ని PQRS బిందువుల వద్ద తాకింది.



అయితే AB + CD = BC + DA అవుతుంది.

17.



$\Rightarrow$ వృత్త చాపం చేతను, జ్యా చేతను ఏర్పడే వృత్త ప్రదేశాన్ని వృత్త ఖండం అంటారు. దీని వైశాల్యం షేడ్ చేసిన భాగం (▦) తెలుపుతుంది. మొదటి పటంలో అల్పవృత్త ఖండంలో పై, రెండో పటంలో అర్ధ వృత్తం పై, మూడో పటంలో అధిక వృత్త ఖండం తెలుపుతాయి.

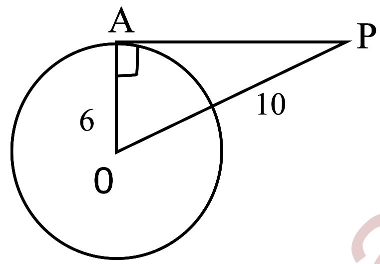
18. వృత్తకేంద్రం వద్ద కోణ పరిమాణం x^{o} అయితే సెక్టరు వైశాల్యం $\frac{x^{o}}{360^{o}} \times \pi r^{2}$

లఘు ప్రశ్నలు (Short Answer Questions)

1. 'O' కేంద్రంగా ఉన్న వృత్తంలో వ్యాసార్థం 6 సెం.మీ. స్పర్శరేఖ పై ఉన్న బిందువు P నుంచి దూరం OP = 10 సెం.మీ. అయితే స్పర్శరేఖ ఖండం PA ను కనుక్కోండి.

జ: వృత్త స్పర్శరేఖ, స్పర్శ బిందువు వద్ద దీని వ్యాసార్థానికి లంబం ఇప్పుడు వృత్తానికి PA అనేది స్పర్శ రేఖాఖండం, OA వ్యాసార్థం.

$\therefore OA \perp PA \Rightarrow \angle OAP = 90°$



ఇప్పుడు ΔOAP లో $OP^2 = OA^2 + PA^2$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతం)

$10^2 = 6^2 + PA^2$

$100 = 36 + PA^2$

$PA^2 = 100 - 36$

$PA^2 = 64$

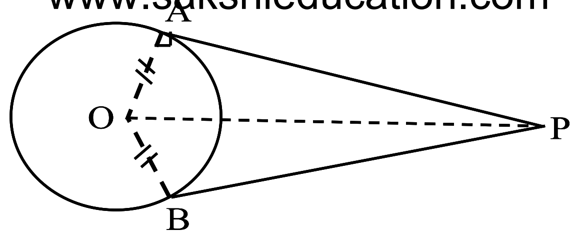
$\therefore PA = \sqrt{64} = 8$ సెం.మీ.

2. 'O' కేంద్రంగా ఉన్న వృత్తానికి P అనే బిందువు బాహ్యంలో ఉంది. P బిందువు గుండా వృత్తానికి గీసిన స్పర్శరేఖలు PA, PB.

జ: సారాంశం: PA = PB

ఉపపత్తి: OA, OB, OP లను కలపండి.

$\angle OAP = \angle OBP = 90°$



ఇప్పుడు ΔOAP, ΔOBP లల్లో

OA = OB (ఒకే వృత్త వ్యాసార్ధాలు)

OP = OP (ఉమ్మడి భుజం)

అందుకని లం.క.భు సర్వసమాన స్వీకృతం ప్రకారం

$\Delta OAP \cong \Delta OBP$ అయ్యింది.

దీని నుంచి PA = PB అవుతుంది. (సర్వసమాన త్రిభుజాల్లో సరూపభాగాలు) నిరూపించడమైనది.

3. 10 సెం.మీ. వ్యాసార్థంగా ఉన్న వృత్తంలో ఒక జ్యా కేంద్రం వద్ద లంబ కోణాన్ని ఏర్పరిస్తే, కింద ఇచ్చిన వృత్తఖండాల వైశాల్యాలు కనుక్కోండి. (π= 3.14 తీసుకోండి.)

(i) అల్ప వృత్తఖండం **(ii) అధిక వృత్తఖండం**

జ: వృత్త వ్యాసార్థం (r) = 10 సెం.మీ.

$\angle AOB = 90°$

ΔOAB వైశాల్యం = $\frac{1}{2}\times OA\times OB = \frac{1}{2}\times 10cm\times 10cm$

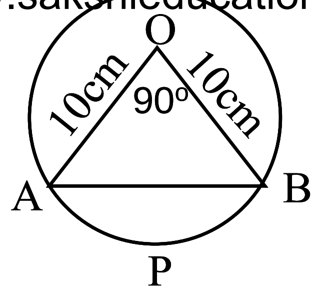
= 50 సెం.మీ^{2}

సెక్టరు వైశాల్యం OAPB = $\frac{x^o}{360^o}\times \pi r^2$

$= \frac{90°}{360°}\times 3.14\times 10cm\times 10cm$

$= \frac{1}{4}\times 314cm^2$

= 78.5సెం.మీ^{2}.



(i) అల్ప వృత్త ఖండం వైశాల్యం = OAPB సెక్టరు వైశాల్యం – AOAB వైశాల్యం.

= 78.5 సెం.మీ^{2} – 50సెం.మీ^{2}

= 28.5 సెం.మీ^{2}.

(ii) వృత్త వైశాల్యం $=\pi r^2$

= 3.14 × 10 సెం.మీ. × 10సెం.మీ.

= 3.14 సెం.మీ^{2}.

అల్పవృత్త ఖండం వైశాల్యం = వృత్త వైశాల్యం – అల్ప వృత్తఖండం వైశాల్యం

= 314 సెం.మీ^{2} – 28.5సెం.మీ .

= 285.5 సెం.మీ^{2}.

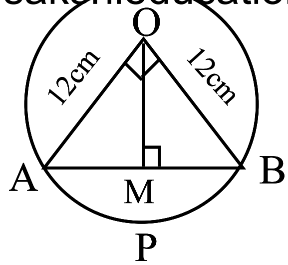
4. 12సెం.మీ. వ్యాసార్థంగా ఉన్న వృత్తంలో ఒక జ్యా కేంద్రం వద్ద 120° కోణాన్ని ఏర్పరచింది. జ్యాతో ఏర్పడే సంబంధిత అల్పవృత్త ఖండం వైశాల్యం కనుక్కోండి. (π= 3.14, $\sqrt{3}$ = 1.732 తీసుకోండి.)

జ: వృత్త వ్యాసార్థం (r) = 12 సెం.మీ.

$\angle AOB = 120°$

OM $\perp$ AB గీయాలి.

ΔAOM లో $\angle AOM = \frac{120°}{2} = 60°$



$$\cos 60° = \frac{OM}{OA} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{OM}{2}$$

$$\Rightarrow OM = \frac{12}{2} = 6cm$$

$$\sin 60° = \frac{AM}{OA} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AM}{12}$$

$$\Rightarrow AM = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 12 = 6\sqrt{3}cm$$

AB = 2 × AM = 2 × 6√3 సెం.మీ. = 12√3 సెం.మీ.

ΔAOM వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times AB \times OM = \frac{1}{2} \times 12\sqrt{3}cm \times 6cm$

= 36√3 సెం.మీ. = 36 × 1.732 సెం.మీ.

= 62.352 సెం.మీ^{2}.

OAPB సెక్టరు వైశాల్యం $= \frac{x°}{360°} \times \pi r^2$

$= \frac{120°}{360°} \times 3.14 \times 12cm \times 12cm$

= 3.14 × 12 సెం.మీ. × 4 సెం.మీ.= 150.72 సెం.మీ^{2}.

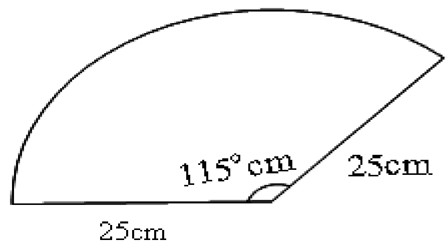
సంబంధిత అల్ప వృత్త ఖండం వైశాల్యం = OAPBసెక్టారు వైశాల్యం - ΔOAB వైశాల్యం.

= 150.72 సెం.మీ^{2} – 62.352 సెం.మీ^{2}

= 88.368 సెం.మీ^{2}.

5. ఒక కారు అద్దంపై ఒకదానిపై అధ్యారోహణం (overlap) కాని నీటిని తుడిచే రెండు వైపర్లు ఉన్నాయి. ప్రతి వైపర్ పొడవు 25సెం.మీ. 115° కోణంలో నీటిని తుడుస్తోంది. ఒకేసారి రెండు వైపర్లు పనిచేయు సందర్భంలో మొత్తం అద్దాన్ని శుభ్రపరిచే వైశాల్యం కనుక్కోండి. ($\pi = \frac{22}{7}$ గా తీసుకొనండి.)

జ: వైపర్ వైశాల్యం = సెక్టారు వైశాల్యం



సెక్టరు వైశాల్యం = $\frac{x^{o}}{360^{o}} \times \pi r^{2}$

$= \frac{115^{\circ}}{360^{\circ}} \times \frac{22}{7} \times 25cm \times 25cm$

$= \frac{158125}{252}$ సెం.మీ^{2}.

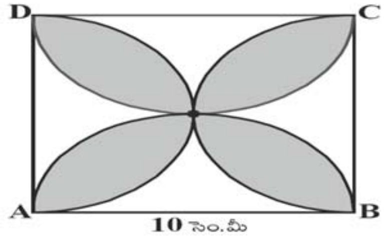
రెండు వైపర్‌లు తుడిచిన వైశాల్యం

$= 2 \times \frac{158125}{252}$ సెం.మీ^{2}.

$= \frac{158125}{126}$ సెం.మీ^{2}.

= 1254.96 సెం.మీ^{2}.

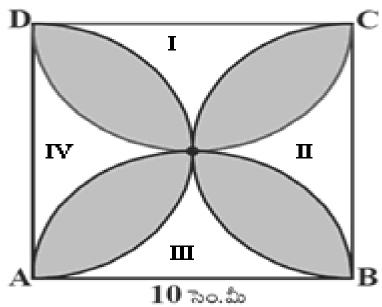
6. పక్క పటంలో ABCD చతురస్ర భుజం 10సెం.మీ. పొడవు కలిగి ఉంది, చతురస్రభుజం వ్యాసంగా ఉన్న అర్ధవృత్తాలు ప్రతి భుజం వైపు గీసి ఉన్నాయి. షేడ్ చేసిన ప్రదేశ వైశాల్యం కనుక్కోండి. (π= 3.14 అని తీసుకోండి).



జ: పక్క పటంలో షేడ్ చేసిన భాగాలను I, II, III, IV అనుకొండి.

I వ భాగం వైశాల్యం + III వ భాగం వైశాల్యం

= ABCD వైశాల్యం – 5 సెం.మీ. వ్యాసార్ధం ఉన్న రెండు అర్ధ వృత్త వైశాల్యాలు



= ABCD వైశాల్యం – వ్యాసార్ధం 5 సెం.మీ. ఉన్న రెండు అర్ధ వృత్త వైశాల్యాలు

= 10 సెం.మీ. × 10 సెం.మీ. – $2 \times \frac{1}{2} \times \pi r^2$

= 100 సెం.మీ^{2} – 3.14 × 5 సెం.మీ. × 5 సెం.మీ.

= 100 సెం.మీ^{2} – 78.5 సెం.మీ^{2} = 21.5 సెం.మీ^{2}.

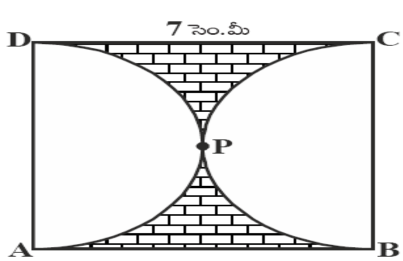
ఇదే విధంగా II భాగం వైశాల్యం + IV భాగం వైశాల్యం = 21.5 సెం.మీ^{2}.

షేడ్ చేసిన వైశాల్యం = ABCD వైశాల్యం – (I + II + III + IV) వైశాల్యం

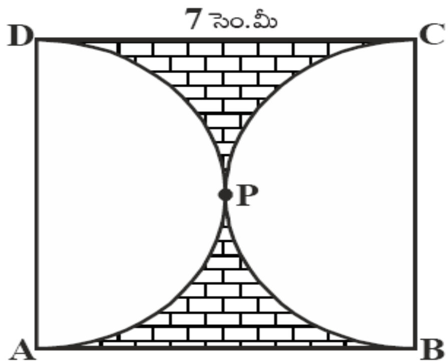
= (100 – 2 × 21.5)సెం.మీ^{2}.

= (100 – 43) సెం.మీ^{2} = 57 సెం.మీ^{2}.

7. పక్కపటంలో ABCD చతురస్ర భుజం 7 సెం.మీ., APB, BPC లు అర్ధ వృత్తాలైతే షేడ్ చేసిన ప్రదేశ వైశాల్యం కనుక్కోండి. ($\pi = \frac{22}{7}$ తీసుకొండి.)



జ: చతురస్ర భుజం = 7 సెం.మీ.



చతురస్ర వైశాల్యం = $7 \times 7 = 49$ సెం.మీ^{2}.

అర్ధవృత్త వ్యాసార్ధం = $\frac{7}{2}$ సెం.మీ.

APD అర్ధవృత్త వైశాల్యం = $\frac{1}{2}\pi r^2$

$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$ సెం.మీ^{2} = $\frac{77}{4}$ సెం.మీ^{2}.

BPC అర్ధవృత్త వైశాల్యం = సెం.మీ^{2}.

రెండు అర్ధవృత్తాల మొత్తం వైశాల్యం = $\frac{77}{4} + \frac{77}{4} = \frac{154}{4} = 38.5$ సెం.మీ^{2}.

షేడ్ చేసిన వైశాల్యం = ABCD వైశాల్యం – అర్ధ వృత్తాల మొత్తం వైశాల్యం

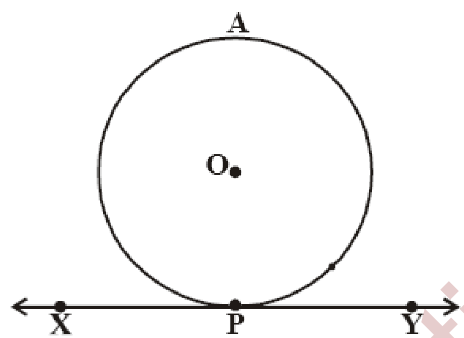
= 49 సెం.మీ^{2} – 38.5 సెం.మీ^{2}.

= 10.5 సెం.మీ^{2}.

వ్యాసరూప ప్రశ్నలు

1. ఒక వృత్తంపై ఉన్న ఏదైనా బిందువు గుండా గీసిన స్పర్శరేఖ, ఆ స్పర్శ బిందువు వద్ద వ్యాసార్థానికి లంబంగా ఉంటుంది.

జ: దత్తాంశం: 'O' కేంద్రంగా ఉన్న వృత్తానికి స్పర్శరేఖ XY, P బిందువు గుండా గీయడమైనది.



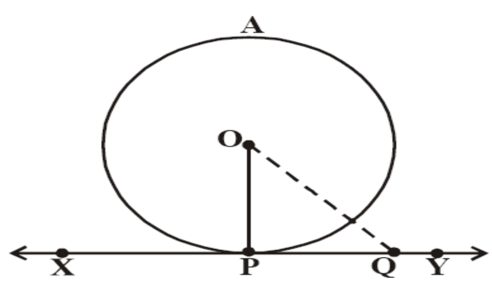
సారాంశం: OP, XY లకు లంబం అంటే ($OP \perp XY$)

ఉపపత్తి: ఇక్కడ మనం నిరూపించవలసిన వాక్యాన్ని తప్పుగా భావించి ఒక కొత్త ప్రతి పాదన చేస్తాం.

ఈ ప్రతిపాదన లేదా ఊహా విరుద్ధతికు దారి తీస్తుంది. ఈ పద్ధతిలో మనం OP అనేది XY పైన P కాకుండా మరో బిందువు తీసుకొని OQ ను కలుపుదాం.

Q బిందువు కచ్చితంగా వృత్తానికి బాహ్యంలోనే ఉంటుంది. (ఎలా?) (Q ఒక వేళ వృత్త అంతరంలో ఉంటే XY అనేది వృత్తానికి స్పర్శరేఖ కాకుండా ఛేదన రేఖ అవుతుందని గమనించండి)

అంటే $OQ > OP$



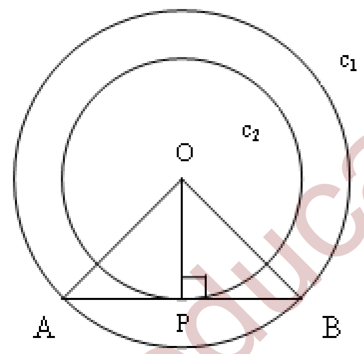
XY పైన ఉన్న ఏ ఇతర బిందువులకైనా ఇది వర్తిస్తుంది. అందుకని 'O' నుంచి XY పైకి గీసిన అన్ని పొడవుల్లో OP మాత్రమే మిక్కిలి చిన్నది అవుతుంది.

కనుక మనం ఊహించినట్లుగా OP, XY కు లంబంగా ఉండదు అనే భావన తప్పు అని తేలింది. అందువల్ల OP, XY రేఖకు లంబం.

2. రెండు ఏక కేంద్ర వృత్తాల్లో బాహ్యవృత్తం జ్యా, అంతర వృత్తం స్పర్శబిందువు వద్ద సమద్విఖండన అవుతుందా?

జ: అవుతుంది.

నిరూపణ: O కేంద్రంగా ఉన్న రెండు వృత్తాలు c_1, c_2 అని ఇచ్చారు.



c_1 వృత్తం జ్యా AB, చిన్న వృత్తం c_2 ను P వద్ద తకింది. మనం AP = PB అగునని నిరూపించాలి.

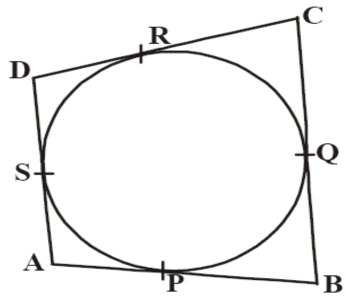
O, P లను కలపండి.

C_2 వృత్తానికి AB స్పర్శరేఖ, OP వ్యాసార్థం. కాబట్టి సిద్ధాంతం.

$OP \perp AB$ అవుతుంది.

ఇప్పుడు ΔOAP, ΔOBP లు సర్వసమానాలు. దీని నుంచి AP = PB అయ్యింది. OP అనేది కేంద్రం నుంచి గీసిన లంబం కాబట్టి అది AB జ్యా ను సమద్వి ఖండన చేస్తుంది.

3. ఒక వృత్తం ABCD చతుర్భుజాన్ని P, Q, R, S బిందువుల వద్ద తాకింది. అయితే AB + CD = BC + DA అవుతుంది.



నిరూపణ ఏ విధంగా మొదలు పెడతాం? AB, CD, BC, DA లు వృత్తానికి గీసిన స్పర్శరేఖలు. ఎందుకంటే చతుర్భుజం నాలుగు భుజాలను తాకుతూ వృత్తంలో దాని అంతరంలో గీశారు, P, Q, R, S బిందువుల వద్ద స్పర్శించింది. మరి ముందుకు ఎలా వెళాతం?

జ: పై పటంలో చూపిన విధంగా ABCD భుజాలు AB, BC, CD, DA లను వృత్తం, P, Q, R, S బిందువుల వద్ద వరుసగా స్పర్శించింది. బాహ్య బిందువు నుంచి వృత్తం పైకి గీసిన స్పర్శరేఖల పొడవులు సమానం కాబట్టి

AP = AS

BP = BQ

DR = DS

CR = CQ

వీటిని కలిపితే మనకు AP + BP + DR + CR = AS + BQ + DS + CQ

లేదా (AP + PB) + (CR + DR) = (BQ + QC) + (DS + SA)

లేదా AB + CD = BC + DA.

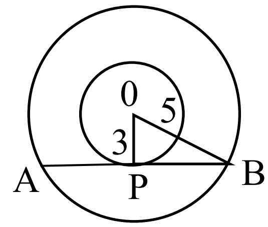
4. 5 సెం.మీ., 3 సెం.మీ., వ్యాసార్థంలో రెండు ఏక కేంద్ర వృత్తాలు గీశారు. చిన్న వృత్తాన్ని స్పర్శించే పెద్ద వృత్తం జ్యా పొడవును కనుక్కోండి?

జ: పటంలో చూపిన విధంగా OP = 3 సెం.మీ., OB = 5 సెం.మీ.

$OP \perp AB$

$\Rightarrow \angle OPB = 90°$

పైథాగరన్ సిద్ధాంతం ప్రకారం



$OB^2 = OP^2 + PB^2$

$PB^2 = OB^2 - OP^2$

$PB^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$

$\therefore PB = \sqrt{16} = 4$ సెం.మీ.

AP = PB = 4 సెం.మీ.

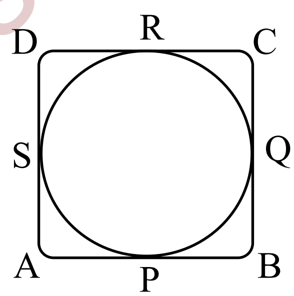
$\therefore$ AB = AP + PB = 4 సెం.మీ. + 4 సెం.మీ. = 8 సెం.మీ.

జ్యా పొడవు = 8 సెం.మీ.

5. ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలో వృత్తం అంతర్లిఖిస్తే అది సమచతుర్భుజం అవుతుందని చూపండి?

జ: ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో వృత్తం అంతర్లిఖించడమైనది.

నిరూపణ: అంతర్లిఖించిన వృత్తం సమచతుర్భుజం



AS = AP; BQ = BP; CQ = CR; DS = RD

AS + BQ + CQ + DS = AP + BP + CR + RD

AS + DS + BQ + CQ = AP + BP + CR + RD

AD + BC = AB + CD ……(1)

(1) నుంచి....

AD + AD = AB + AB

2AD = 2AB

AD = AB ------- (2)

(1), (2) ల నుంచి

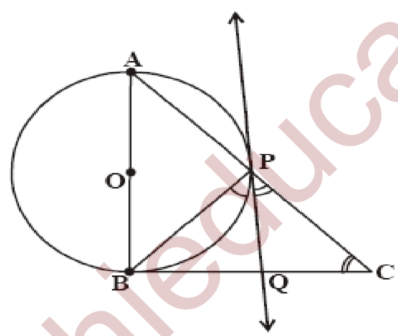
AB = BC= CD = AD

ABCD రాంబస్ అని నిరూపించడమైనది.

6. ఒక లంబకోణ త్రిభుజం ABCలో AB వ్యాసంగా ఉన్న ఒక వృత్త కర్ణం AC ని P వద్ద ఖండించునట్లు గీశారు. P గుండా వృత్తానికి గీసిన స్పర్శ రేఖ BC భుజాన్ని సమద్విఖండన చేస్తుందని నిరూపించండి.

జ: దత్తాంశం: ఒక లంబకోణ త్రిభుజం ABC లు $\angle B = 90°$

AB వ్యాసంగా గల ఒక వృత్తం కర్ణం AC ని P వద్ద ఖండించినట్లు గీయాలి.



సారాంశం: TB = TC

నిర్మాణం: BP ని కలపాలి

ఉపపత్తి: $\angle APB = 90°$ [అర్ధ వృత్త కోణం]

$\angle APB + \angle BPC = 180°$ [సరళ కోణాలు]

$90° + \angle BPC = 180°$

$\angle BPC = 180° - 90° = 90°$

$\angle ABC = 90°$ (ఇచ్చారు)

$\therefore \angle BAC + \angle ACB = 90°$ [కోణ ధర్మం ప్రకారం]

$\therefore \angle BPC = \angle BAC + \angle ACB$

$\Rightarrow \angle BPT + \angle CPT = \angle BAC + \angle ACB$

$\angle BPT + \angle CPT = \angle BAC + \angle ACB$

కాని, $\angle BPT = \angle BAC$

$\Rightarrow \angle CPT = \angle ACB$

$\Rightarrow PT = TC$

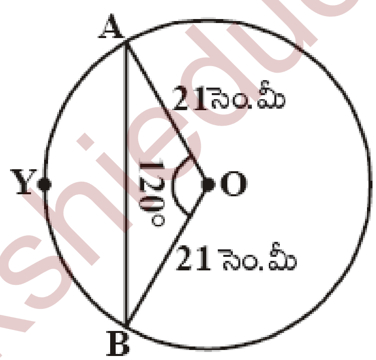
కాని PT = TB [బాహ్య బిందువు నుంచి స్పర్శ రేఖలు]

$\Rightarrow TB = TC.$

7. పక్క పటంలో వృత్త వ్యాసార్థం 21 సెం.మీ., $\angle AOB = 120°$ అయితే వృత్తఖండం AYB వైశాల్యం కనుక్కోండి.

$(\pi = \frac{22}{7}, \sqrt{3} = 1.732$ గా తీసుకోండి)

జ: AYB వృత్త ఖండ వైశాల్యం =OAYB సెక్టరు వైశాల్యం $-\Delta OAB$ వైశాల్యం

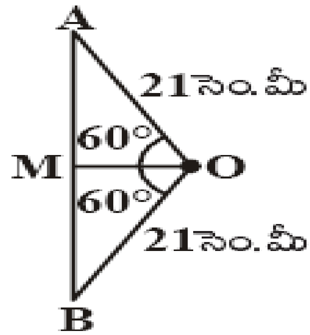


ఇప్పుడు OAYB సెక్టరు వైశాల్యం = $\frac{120°}{360°} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 = 462$ చ.సెం.మీ.

$\Rightarrow \Delta OAB$ వైశాల్యం కనుక్కోవడానికి పటంలో చూపిన విధంగా $OM \perp AB$ను గీయాలి.

$\Rightarrow OA = OB$ కాబట్టి లం.క.భు. సర్వ సమాన నియమం ప్రకారం $\Delta AMO \cong \Delta BMO$ అవుతుంది.

కాబట్టి, AB మధ్య బిందువు M అవుతుంది,



$\angle AOM = \angle BOM = \frac{1}{2} \times 120° = 60°$

ఇప్పుడు OM = x సెం.మీ. అనుకుంటే.

ΔOMA నుంచి $\frac{OM}{OA} = \cos 60°$

లేదా, $\frac{x}{21} = \frac{1}{2} \left[\because \cos 60° = \frac{1}{2}\right]$

లేదా, $x = \frac{21}{2}$

కాబట్టి $OM = \frac{21}{2}$ సెం.మీ.

అలాగే, $\frac{OM}{OA} = \sin 60° \Rightarrow \frac{AM}{21} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\because \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

కాబట్టి $AM = \frac{21\sqrt{3}}{2}$ సెం.మీ.

అందువల్ల $AB = 2AM = \frac{2 \times 21\sqrt{3}}{2} = 21\sqrt{3}$ సెం.మీ.

దీని నుంచి ΔOAB వైశాల్యం = $\frac{1}{2} \times AB \times OM$

$$= \frac{1}{2} \times 21\sqrt{3} \times \frac{21}{2} = \frac{441}{4}\sqrt{3} \text{ చ.సెం.మీ.}$$

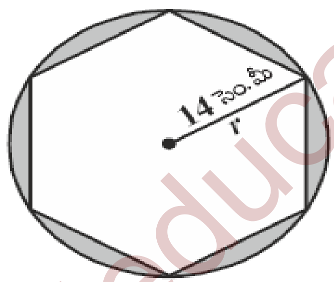
ఈ విధంగా (1), (2) లను బట్టి

AYB వృత్తఖండం వైశాల్యం = $\left[462-\frac{441}{4}\sqrt{3}\right]$ చ.సెం.మీ.

$$=\frac{21}{4}\left(88-21\sqrt{3}\right)=271.047 \text{ చ.సెం.మీ.}$$

8. పక్క పటంలో చూపిన విధంగా ఒక గుండ్రని ఉపరితలం ఉన్న బల్లపై ఆరు సమాన ఆకృతులు కలవు. బల్లపై తలం వ్యాసార్థం 14 సెం.మీ. అయితే చ.మీ. రూ. 5 చొప్పున బల్లపై ఆకృతులకు రంగు వేయడానికి ఎంత ఖర్చు అవుతుంది. ($\sqrt{3}$ = 1.732 తీసుకొండి)

జ: పక్క వృత్తంలో అంతర్లిఖించిన క్రమ షడ్భుజి భుజం వృత్త వ్యాసార్ధానికి సమానమని మనకు తెలుసు.



$\therefore$ క్రమ షడ్భుజి ఒక్కొక్క భుజం = 14 సెం.మీ.

$\therefore$ అందువల్ల, ఆకృతి చేసిన ఆరు వృత్త ఖండాల వైశాల్యం = వృత్త వైశాల్యం – క్రమషడ్భుజి వైశాల్యం.

ఇప్పుడు, వృత్తవైశాల్యం = πr^2

$$=\frac{22}{7}\times 14\times 14=616 \text{ చ.సెం.మీ.} \quad \text{-------} \ (1)$$

క్రమషడ్భుజి వైశాల్యం = $6\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 14\times 14$

= 509.2 చ.సెం.మీ ----------- (2)

(1), (2) లను బట్టి ఆరు ఆకృతుల మొత్తం వైశాల్యం

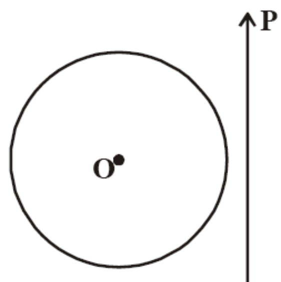
= 616 – 509.21 = 106.79 చ.సెం.మీ.

దీని నుంచి, చ.మీ. రూ. 5 చొప్పున ఆరు ఆకృతులను రంగు వేయుటకు అయ్యే ఖర్చు

= రూ 106.79 × 5 = రూ. 533.95.

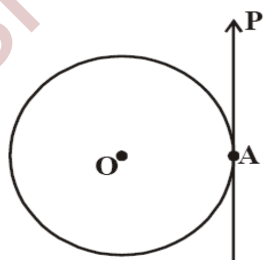
ఖాళీలు

1. PQ రేఖకు, వృత్తానికి ఉమ్మడి బిందువు లేదు. ఈ సందర్భంలో PQ ను వృత్తానికి ---- అంటాం.



(i)

2. పక్క పటంలో PQ రేఖకు వృత్తానికి ఒకే ఒక్క ఉమ్మడి బిందువు ఏర్పడింది. ఈ సందర్భంలో PQ రేఖను వృత్తానికి ---- అంటాం.



(iii)

3. స్పర్శ (tangent) అనే పదం --- పదం నుంచి వచ్చింది.

4. టాన్‌గ్రే (tangere) పదానికి ---- అని అర్థం.

5. ఈ పదాన్ని మొదటిగా --- అనే గణితశాస్త్రజ్ఞుడు ---- సం।। లో ప్రవేశ పెట్టాడు.

6. వృత్తాన్ని సర్శరేఖ తాకినప్పుడు ఏర్పడే ఉమ్మడి బిందువును ----- అంటాం.

7. వృత్తం పై ఉన్న ఏ బిందువు నుంచి అయినా ---- గీయగలం.

8. ఒక తలంలో వృత్తంపై వ్యాసార్థం చివరి బిందువు గుండా గీసిన రేఖ దానికి లంబంగా ఆ రేఖ వృత్తానికి ---- అవుతుంది.

9. వృత్తాన్ని, ఒక స్పర్శ రేఖ ---- బిందువుల వద్ద ఖండిస్తుంది.

10. వృత్తాన్ని, ఒక రేఖ రెండు వేరువేరు బిందువుల వద్ద ఖండిస్తే దానిని ----- రేఖ అంటారు.

11. ఒక వృత్తానికి గరిష్టంగా గీయగలిగే సమాంతర రేఖ స్పర్శ రేఖలు -----

12. ఒక వృత్తానికి, దాని స్పర్శరేఖకు ఉన్న ఉమ్మడి బిందువును ----- అంటారు.

13. ఒక వృత్తానికి మనం --- స్పర్శరేఖలను గీయగలం.

14. ఒక వృత్త వ్యాసం చివరి బిందువుల వద్ద గీసిన ----- సమాంతరం.

15. వృత్తంపై ఉన్న ఏ బిందువు గుండానైనా పోవునట్లు వృత్తానికి ----- స్పర్శరేఖను గీయవచ్చు.

16. వృత్త బాహ్యంలో ఉన్న ఏదైనా బిందువు గుండా వృత్తానికి కచ్చితంగా రెండు ----- లను గీయవచ్చు.

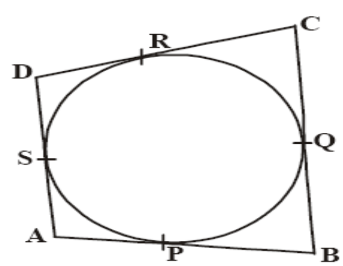
17. వృత్తానికి బాహ్యబిందువు గుండా గీసిన స్పర్శ రేఖల పొడవు ---

18. వృత్తానికి బాహ్యబిందువు నుంచి గీసిన స్పర్శ రేఖల మధ్య ఏర్పడే కోణ సమద్వి ఖండన రేఖపై ఆ వృత్తం ----- ఉంటుంది.

19. రెండు ఏక కేంద్ర వృత్తల్లో బాహ్య వృత్తం జ్యా, అంతర వృత్తం స్పర్శ బిందువు వద్ద ----అవుతుంది.

20. ఒక వృత్తం ABCD చతుర్భుజాన్ని PQRS బిందువు వద్ద తాకింది. అయితే,

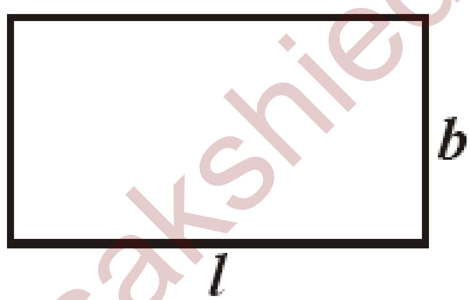
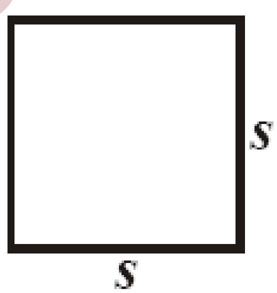
AB + CD = ---- అవుతుంది.

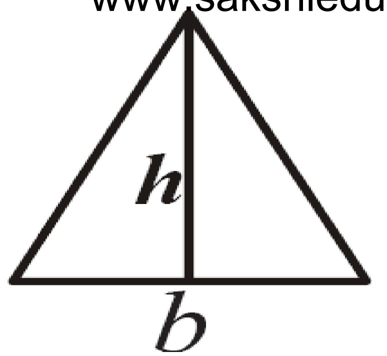
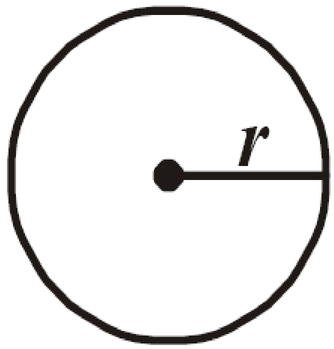


21. వృత్తకేంద్రం వద్ద కోణ పరిమాణం x° అయితే సెక్టరు వైశాల్యం ------.

Key

1. అఖండిత రేఖ
2. స్పర్శ రేఖ
3. లాటిన్ పదం టాన్‌గ్రీ (tangere).
4. స్పర్శించడం
5. థామస్ ఫిన్కీ,1583.
6. స్పర్శబిందువు
7. స్పర్శరేఖ
8. స్పర్శరేఖ
9. ఒకటి
10. ఛేదన రేఖ
11. రెండు
12. స్పర్శబిందువు
13. అనంత
14. స్పర్శరేఖలు
15. ఒకే ఒక
16. స్పర్శరేఖ
17. సమానం
18. కేంద్రం
19. సమద్వి ఖండన
20. BC +DA
21. $\frac{x^\circ}{360^\circ}\times\pi r^2$

వ.సంఖ్య	పటం	కొలతలు	వైశాల్యం
1.		పొడవు = l వెడల్పు = b	A = lb
2.		భుజం = s	A =s^2

3.		భూమి = b	$A=\frac{1}{2}$
4.		వ్యాసార్థం = r	$A = \pi r^2$