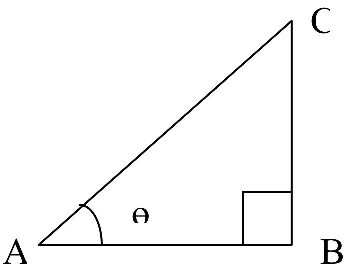
Chapter –11

త్రికోణమితి (Trigonometry)

లంబకోణ త్రిభుజం ABC లో



AC = కర్ణం

BC = ∠A ఆసన్న భుజం

AB = ∠A ఎదుటి భుజం

త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు:

Sin A = ∠A యొక్క ఎదుటి భుజం/ కర్ణం = $\frac{BC}{AC}$

Cos A = ∠A యొక్క ఆసన్న భుజం/ కర్ణం = $\frac{AB}{AC}$

Tan A = ∠A యొక్క ఎదుటి భుజం/∠A యొక్క ఆసన్న భుజం = $\frac{BC}{AB}$

Sec A = కర్ణం/ ∠A యొక్క ఆసన్న భుజం = $\frac{AC}{AB} = \frac{1}{\cos A}$

Cosec A = కర్ణం/∠A యొక్క ఎదుటి భుజం = $\frac{AC}{BC} = \frac{1}{\sin A}$

Cot A = ∠A యొక్క ఆసన్న భుజం/ ∠A యొక్క ఎదుటి భుజం

www.sakshieducation.com

Note: $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$, $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$

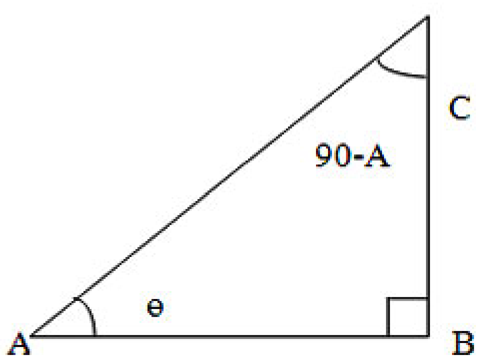
ప్రత్యేక కోణాల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు:

∠A	0°	30°	45°	60°	90°
Sin A	0	1/√2	1/√2	√3/2	1
Cos A	1	√3/2	1/√2	1/2	0
Tan A	0	1/√3	1	√3	నిర్వచించలేము
Cot A	నిర్వచించలేము	√3	1	1/√3	0
Sec A	1	2/√3	√2	2	నిర్వచించలేము
Cosec A	నిర్వచించలేము	2	√2	2/√3	1

- కోణం A విలువ 0^0 నుంచి 90^0 కు పెరుగుతూ ఉంటే sin A విలువ కూడా పెరుగుతూ ఉంది.
- కోణం A విలువ 0^0 నుంచి 90^0 కు పెరుగుతూ పోతుంటే cos A విలువ తగ్గుతూ ఉంది.
- ఒక లఘు కోణం త్రికోణమితి నిష్పత్తి విలువ తెలిస్తే మిగిలిన అన్ని త్రికోణమితి నిష్పత్తులను కనుక్కోవచ్చు.
- ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో ఒక భుజం, ఇంకొక కొలత (మరోక భుజం లేదా కోణం) ఇచ్చిన మిగిలిన భుజాలు, కోణాలను కనుక్కోవచ్చు.

www.sakshieducation.com

పూరక కోణాల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల మధ్య సంబంధం:



$\text{Sin}(90^0 - A) = \text{CosA}$

$\text{Cos}(90^0 - A) = \text{SinA}$

$\text{Tan}(90^0 - A) = \text{CotA}$

$\text{Cot}(90^0 - A) = \text{TanA}$

$\text{Cosec}(90^0 - A) = \text{SecA}$

$\text{Sec}(90^0 - A) = \text{CosecA}$

www.sakshieducation.com

త్రికోణమితీయ సర్వసమీకరణాలు

త్రికోణమితీయ నిష్పతుల ఆధారంగా ఏర్పడిన సర్వ సమీకరణాన్ని త్రికోణమితీయ సర్వ సమీకరణం అంటారు. ఈ సర్వ సమీకరణం త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల అన్ని కోణాలకు సత్యం అవుతుంది.

(1) $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$, కోణం A ను చరరాశిగా పరిగణిస్తాం ఈ సర్వసమీకరణం నుంచి కింది ఫలితాలు ఏర్పరచవచ్చు

$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$; $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$

$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{(1+\cos A)(1-\cos A)}$

$\cos A = \sqrt{1-\sin^2 A} = \sqrt{(1+\sin A)(1-\sin A)}$

(2) $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$, ఈ సమీకరణం నుంచి

$\sec^2 A - \tan^2 A = 1$ లేదా $\tan^2 A - \sec^2 A = -1$

$(\sec A + \tan A)(\sec A - \tan A) = 1$; $\sec^2 A - 1 = \tan^2 A$

$\sec A + \tan A = \frac{1}{\sec A - \tan A}$ లేదా $\sec A - \tan A = \frac{1}{\sec A + \tan A}$

(3) $1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$, లేదా ఈ సమీకరణం నుంచి

$\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$ లేదా $\cot^2 A - \operatorname{cosec}^2 A = -1$

$(\operatorname{cosec} A + \cot A)(\operatorname{cosec} A - \cot A) = 1$; $\operatorname{cosec}^2 A - 1 = \cot^2 A$

$\operatorname{cosec} A + \cot A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A - \cot A}$ లేదా $\operatorname{cosec} A - \cot A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A + \cot A}$

- $(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2 = 2$
- $(\sec^2\theta - 1)(\operatorname{cosec}^2\theta - 1) = 1.$
- A కోణం ఎంతైనప్పటికి sin A లేదా cos A విలువలు ఎప్పటికి 1 కంటే తక్కువగాను లేదా సమానంగాను ఉంటాయి..
- A కోణం ఎంతైనప్పటికి sec A లేదా cosec A ల విలువలు ఎప్పటికి 1 కంటే ఎక్కువగాను లేదా సమానంగాను ఉంటాయి.

www.sakshieducation.com

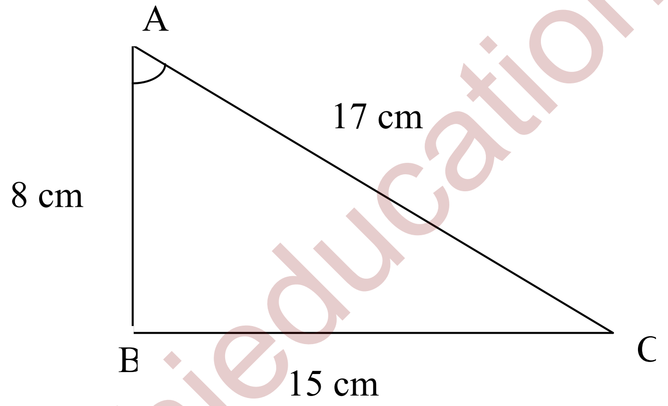
అభ్యాసం – 11.1

1. ఒక లంబకోణ త్రిభుజం **ABC** లో భుజాలు **AB, BC, CA** ల పొడవులు వరుసగా 8 సెం.మీ, 5 సెం.మీ, 17సెం.మీ అయితే **sin A, cos A, tan A** ల విలువలు కనుగొనండి.

A. ΔABC లో, AB = 8 సెం.మీ

BC = 15 సెం.మీ

AC = 17 సెం.మీ



Sin A = $\angle A$ యొక్క ఎదుటి భుజం/ కర్ణం = $\frac{BC}{AC} = \frac{15}{17}$

Cos A = $\angle A$ యొక్క ఆసన్న భుజం/ కర్ణం = $\frac{AB}{AC} = \frac{8}{17}$

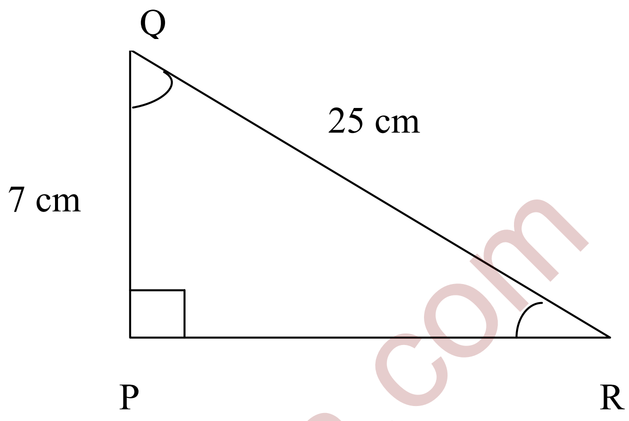
Tan A = $\angle A$ యొక్క ఎదుటి భుజం/$\angle A$ యొక్క ఆసన్న భుజం = $\frac{BC}{AB} = \frac{15}{8}$

2. లంబకోణ త్రిభుజం **PQR** భుజాలు **PQ = 7** సెం.మీ, **QR = 25** సెం.మీ, **$\angle P = 90°$** అయితే **tan Q – tan R** కనుగొనండి.

Sol: PQR లంబకోణ త్రిభుజం అని ఇచ్చారు. కావున పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

www.sakshieducation.com

$QR^2 = PQ^2 + PR^2$ నుంచి



$PR = \sqrt{QR^2 - PQ^2}$

$= \sqrt{25^2 - 7^2}$

$= \sqrt{625 - 49}$

$= \sqrt{576} = 24$

$\therefore PR = 24$

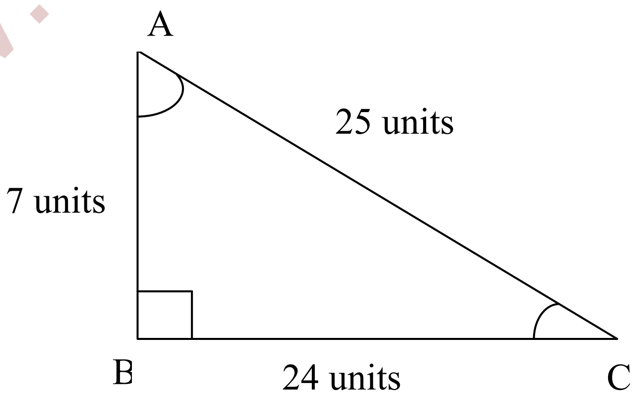
$\therefore \tan Q = \frac{PR}{PQ} = \frac{24}{7}$

$\tan R = \frac{PQ}{PR} = \frac{7}{24}$

$\therefore \tan Q - \tan R = \frac{24}{7} - \frac{7}{24} = \frac{576 - 49}{168} = \frac{527}{168}$

3. **B వద్ద లంబకోణం కల్గిన లంబకోణ త్రిభుజం ABC లో a = 24 యూనిట్లు, b = 25 యూనిట్లు, $\angle BAC = \theta$. అయితే $\cos\theta$, $\tan\theta$ ల విలువలు కనుగొనండి.**

A. లంబకోణ త్రిభుజం ABC లో $\angle B = 90^0$, AC = 25 యూనిట్లు, BC = 24 యూనిట్లు



పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

$AC = AB^2 + BC^2$

$AB^2 = AC^2 - BC^2$

$= (25)^2 - (24)^2$

$AB^2 = 625 - 576 = 49$

$AB = 7$ యూనిట్లు

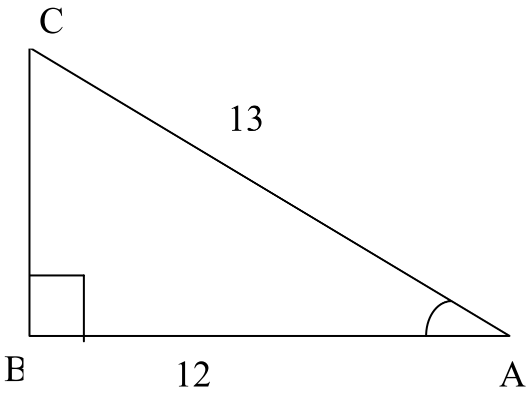
$\angle BAC = \theta$ కాబట్టి

$\cos\theta =$ $\angle\theta$ యొక్క ఆసన్న భుజం/ కర్ణం $= \frac{AB}{AC} = \frac{7}{25}$

$\tan\theta =$ $\angle\theta$ యొక్క ఎదుటి భుజం/$\angle\theta$ యొక్క ఆసన్న భుజం $= \frac{BC}{AB} = \frac{24}{7}$

4. $\cos A = \frac{12}{13}$ అయితే sinA, tanA ల విలువలు కనుగొనండి.

A. $\cos A = \frac{12}{13} =$ $\angle A$ యొక్క ఆసన్న భుజం/ కర్ణం $= \frac{AB}{AC}$



$\therefore$ ఆసన్న భుజం $AB = 12$ యూనిట్లు

కర్ణం $AC = 13$ యూనిట్లు.

$CA^2 = AB^2 + BC^2$

www.sakshieducation.com

$BC^2 = AC^2 - AB^2$

$= (13)^2 - (12)^2$

$= 169 - 144$

$BC^2 = 25$

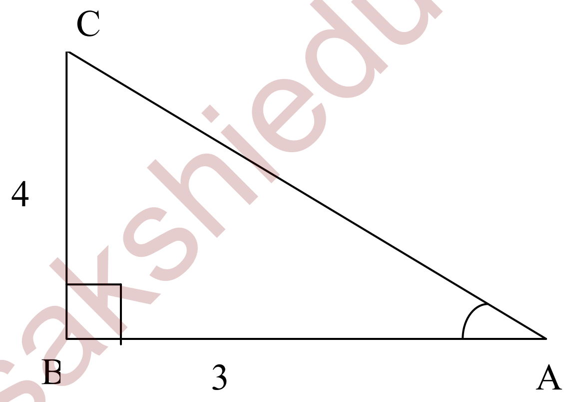
BC = 5 యూనిట్లు

$\therefore$ Sin A = ∠A యొక్క ఎదుటి భుజం/ కర్ణం = $\frac{BC}{AC} = \frac{5}{13}$

Tan A = ∠A యొక్క ఎదుటి భుజం/∠A యొక్క ఆసన్న భుజం = $\frac{BC}{AB} = \frac{5}{12}$

5. 3 tan A = 4 అయితే sinA, cosA ల విలువలు కనుగొనండి.

A. 3 tan A = 4



ప్రక్క పటం లంబకోణ త్రిభుజం ABC నుంచి

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= (3)^2 + (4)^2$

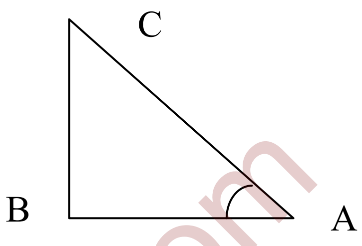
$= 9 + 16 = 25$

AC = 5

6. cosA= cosX, అయ్యేటట్లు ∠A, ∠X లు లఘు కోణాలయితే ∠A= ∠X అని చూపండి.

Sol: ΔABC, ΔXYZ లు రెండు లంబ కోణ త్రిభుజాలు అనుకుంటే

cosA = cosX అని ఇచ్చారు కావున

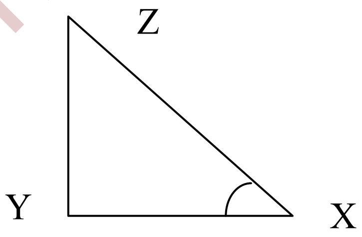


$$\cos A = \frac{AB}{AC}$$

$$\cos X = \frac{XY}{XZ}$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{XY}{XZ} = k \text{ అనుకుంటే } \frac{AB}{XY} = \frac{AC}{XZ} = k \quad \text{--------------- (1)}$$

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం



$$\frac{BC}{YZ} = \frac{\sqrt{AC^2 - AB^2}}{\sqrt{XZ^2 - XY^2}} = \frac{\sqrt{k^2 XZ^2 - XY^2}}{\sqrt{XZ^2 - XY^2}}$$

$$\frac{BC}{YZ} = \frac{k\sqrt{XZ^2 - XY^2}}{\sqrt{XZ^2 - XY^2}} = k \text{ ---------(2)}$$

(1), (2) ల నుంచి

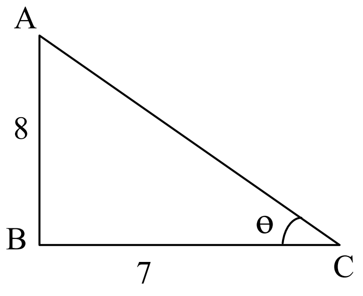
$$\frac{AB}{XY} = \frac{AC}{XZ} = \frac{BC}{YZ}$$ అగును.

∴ ΔABC ~ ΔXYZ అగును.

∴ ∠ A = ∠X అవుతుంది.

7. $\cot\theta = \frac{7}{8}$, అయితే i) $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$ ii) $\frac{(1+\sin\theta)}{\cos\theta}$ లను కనుగొనండి.

Sol: $\cot\theta = \frac{7}{8} =$ ఆసన్న భుజం/ ఎదుటి భుజం



www.sakshieducation.com

ΔABC నుంచి $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$= (8)^2 + (7)^2$$

$$AC^2 = 64 + 49 = 113$$

$$AC = \sqrt{113}$$

Sin θ= ఎదుటి భుజం/ కర్ణం= $\frac{8}{\sqrt{113}}$

Cos θ= ఆసన్న భుజం/ కర్ణం= $\frac{7}{\sqrt{113}}$

$$i)\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)} = \frac{1-\sin^2\theta}{1-\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1-(\frac{8}{\sqrt{113}})^2}{1-(\frac{7}{\sqrt{113}})^2} = \frac{1-\frac{64}{113}}{1-\frac{49}{113}}$$

$$= \frac{\frac{113-64}{113}}{\frac{113-49}{113}} = \frac{49}{64}$$

$$\therefore \frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)} = \frac{49}{64}$$

$$\frac{(1+\sin\theta)}{\cos\theta} = \frac{1+\frac{8}{\sqrt{113}}}{\frac{7}{\sqrt{113}}} = \frac{\frac{8+\sqrt{113}}{\sqrt{113}}}{\frac{7}{\sqrt{113}}}$$

$$\therefore \frac{(1+\sin\theta)}{\cos\theta} = \frac{8+\sqrt{113}}{7}$$

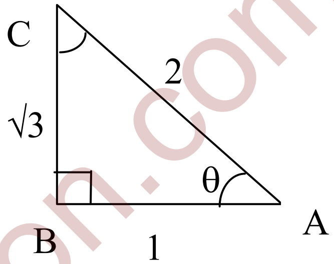
www.sakshieducation.com

8. B వద్ద లంబకోణం కల్గిన త్రిభుజం ABC లో tanA = √3 అయితే

(i) sinA cosC+ cosA sinC.

(ii) cosA cosC – sinA sinC ల విలువలు కనుగొనండి

సాధన: $\tan A = \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{1}$ = ఎదుటి భుజం/ ఆసన్న భుజం



$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (1) + (\sqrt{3})$ 1 + 3 = 4

AC = 2

sinA= ఎదుటి భుజం/ కర్ణం= $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Cos A= ఆసన్న భుజం/ కర్ణం= $\frac{1}{2}$

sinC = ఎదుటి భుజం/ కర్ణం= $\frac{1}{2}$

Cos C= ఆసన్న భుజం/ కర్ణం= $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(i) sinA cosC + cos A sinC $= \frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} . \frac{1}{2}$

$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$

(ii) cosA cosc – sinA sinC

$= \frac{1}{2} . \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$

$\therefore$ cosA cosc – sinA sinC = 0.

అభ్యాసం 11. 2

1. కింది వాటి విలువలను కనుగొనండి.

(i) $\sin 45^0 + \cos 45^0$

సాధన: $\sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\therefore \sin 45^0 + \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1+1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{(ii)} \ \frac{\cos 45^0}{\sec 30^0 + \operatorname{cosec} 60^0}$$

$$\cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sec 30^0 = \frac{2}{\sqrt{3}}, \operatorname{cosec} 60^0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

సాధన: $$\frac{\cos 45^0}{\sec 30^0 + \operatorname{cosec} 60^0} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

www.sakshieducation.com

(iii) $\dfrac{\sin 30^0 + \tan 45^0 - \operatorname{cosec} 60^0}{\cot 45^0 + \cos 60^0 - \sec 30^0}$

సాధన:

$$\sin 30^0 = \frac{1}{2}; \tan 45^0 = 1, \operatorname{cosec} 60^0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 45^0 = 1, \cos 60^0 = \frac{1}{2}, \sec 30^0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sin 30^0 + \tan 45^0 - \operatorname{cosec} 60^0}{\cot 45^0 + \cos 60^0 - \sec 30^0} = \frac{\frac{1}{2} + 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}} = 1$$

(iv) $\mathbf{2 \tan^2 45° + \cos^2 30° - \sin^2 60°}$

సాధన: $\tan 45° = 1;\quad \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2};\quad \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$2 \tan^2 45° + \cos^2 30° - \sin^2 60° = 2.(1)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2$$

$$= 2(1) + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}$$

$$= 2$$

(v) $\dfrac{\sec^2 60^0 - \tan^2 60^0}{\sin^2 30^0 + \cos^2 30^0}$

సాధన: $\tan 60° = \sqrt{3};\quad \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2};\quad \sin 30° = \dfrac{1}{2};\quad \sec 60° = 2;$

$$\frac{\sec^2 60^0 - \tan^2 60^0}{\sin^2 30^0 + \cos^2 30^0} = \frac{(2)^2 - (\sqrt{3})^2}{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{4-3}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\therefore \frac{\sec^2 60^0 - \tan^2 60^0}{\sin^2 30^0 + \cos^2 30^0} = 1$$

www.sakshieducation.com

2. sin 60°. cos 30° + sin 30°. cos 60° విలువ గణించండి. sin (60° + 30°) విలువ ఎంత? దీని నుంచి మీరేం గమనించారు?

సాధన: $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 60° = \frac{1}{2}$; $\cos 60° = \frac{1}{2}$

$\sin 60° . \cos 30° + \sin 30° \cos 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} . \frac{1}{2}$

$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

$\therefore$ Sin 60°. cos 30° + sin 30° cos 60° = 1

Sin (60° + 30°) = sin (90°) = 1

దీని నుంచి Sin (A + B) = sinA cosB + cosA sinB అని గమనించవచ్చు.

4. **cos (60° + 30°) = cos 60° cos 30° – sin 60° sin 30° అనడం సబబేనా?**

సాధన: L.H.S cos (60° + 30°) = cos 90° = 0

R.H.S cos 60° cos 30° – sin 60° sin 30°

$= \frac{1}{2} . \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$

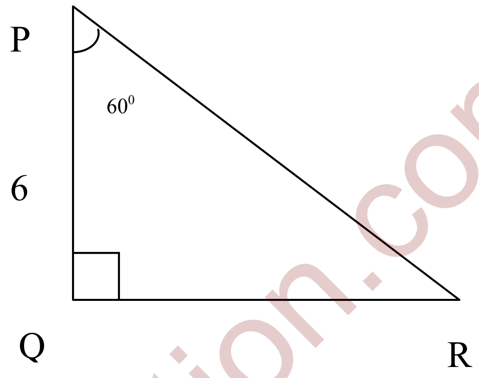
$\therefore$ cos (60° + 30°) = cos 60° cos 30° – sin 60° sin 30°.

అనడం సముచితం దీని నుంచి

cos (A + B) = cosA cosB – sinA sinB అని గమనించవచ్చు.

5. **Q వద్ద లంబకోణం కల్గిన ΔPQR లో PQ = 6సెం.మీ, $\angle$RPQ = 60° అయితే QR, PR విలువలను కనుగొనండి.**

సాధన: ΔPQR లో $\angle RPQ = 60°$, $PQ = 6$ సెం.మీ.



$$\cos 60^0 = \text{ఆసన్న భుజం/ కర్ణం} = \frac{PQ}{PR}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{PQ}{PR}$$

$\therefore$ PR = 2 × PQ = 2 × 6 = 12 సెం.మీ.

lly $\sin 60° =$ ఎదుటి భుజం/ కర్ణం= $\frac{QR}{PR}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{QR}{12}$$

$$QR = \frac{12 \times \sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$ సెం.మీ.; $PR = 12$ సెం.మీ

$\therefore$ QR = 6 3 సెం.మీ; PR = 12 సెం.మీ.

www.sakshieducation.com

అభ్యాసం 11.3

1. విలువ కనుక్కోండి.

(i) $\dfrac{\tan 36^0}{\cot 54^0}$

$=\dfrac{\tan 36^0}{\cot(90-36^0)}=\dfrac{\tan 36^0}{\tan 36^0}=1$ $(\because \cot(90^0-\theta)=\tan\theta)$

ii) cos 12° – sin 78°

$= \cos(90 - 78°) - \sin 78°$ $(\because \cos(90^0-\theta)=\sin\theta)$

$= \sin 78° - \sin 78° = 0.$

$= 0$

iii) cosec 31°- sec 59°

$= \operatorname{cosec} 31° - \sec(90° - 31°)$

$= \sec 31° - \operatorname{cosec} 31°$ $(\because \sec(90^0-\theta)=\cos ec\theta)$

$= 0.$

iv) sin 15° sec 75°

$= \sin 15°. \sec(90° - 15°)$ $(\because \sec(90^0-\theta)=\cos ec\theta)$

$= \sin 15°. \operatorname{Cosec} 15°$

$= \sin 15°. \dfrac{1}{\sin 15°} = 1$ $(\because \sin\theta = \dfrac{1}{\cos ec\theta})$

v) tan 26° . tan 64°

$\tan 26° . \tan 64° = \tan 26° .\tan(90° - 26°)$

$= \tan 26°. \operatorname{Cot} 26°$ $(\because \tan(90^0-\theta)=\cot\theta)$

$= \tan 26°.\frac{1}{\tan 26°}$ $\quad (\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta})$

$= 1$

2. నిరూపించండి?

(i) tan 48°. tan 16° tan 42° . tan 74° = 1

సాధన: L.H.S tan 48°. tan 16°. tan 42°. tan 74°

= tan (90° - 42°). tan (90° - 74°) .tan 42°. tan 74°
$(\because \tan(90^0\text{-}\theta) = \cot\theta)$

= cot 42°. Cot 74°. tan 42°. tan 74°. $\quad (\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta})$

= 1 R.H.S.

(ii) cos 36° . cos 54° - sin 36° sin 54° = 0

సాధన: L.H.S. cos 36°. cos 54° - sin 36°. sin 54°

= cos 36°.cos (90° - 36°) – sin 36° (90° - 36°)
$(\because \cos(90^0\text{-}\theta) = \sin\theta)$ $\quad (\because \sin(90^0\text{-}\theta) = \cos\theta)$

= cos 36°. sin36° - sin 36°. cos 36°.

= 0 R.H.S.

3. tan 2A = cot (A - 18°), 2A లఘు కోణం అయితే A విలువ కనుక్కోండి.

సాధన: tan 2A = cot (A - 18°) $\quad (\because \cot(90^0\text{-}\theta) = \tan\theta)$

cot (90° - 2A) = cot (A - 18°)

2A లఘుకోణం అని ఇచ్చారు కాబట్టి (90° - 2A), (A - 18°)లు కూడా లఘు కోణాలు అవుతాయి.

$90° - 2A = A - 18°$

$3A = 108°$

$\therefore\ A = 36°.$

4. **A, B లు లఘు కోణాలు tan A = cot B, అయితే A + B = 90°.**

సాధన: tan A = cot B

$\tan A = \tan (90° - B)$ $(\because \tan(90^0 - \theta) = \cot\theta)$

$A = 90° - B$ (A, B లు లఘు కోణాలు)

$\Rightarrow A + B = 90°$

5. **A, B, C లు ΔABC లోని అంతర కోణాలు అయితే** $\tan(\frac{A+B}{2}) = \cot\frac{C}{2}$

సాధన: A, B, C లు ΔABC లోని కోణాలు. కాబట్టి A + B + C = 180°

ఇరువైపులా 2 చే భాగించగా

$$\frac{A+B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{180^0}{2} = 90^0$$

$$\frac{A+B}{2} = 90^0 - \frac{C}{2}$$

ఇరువైపులా త్రికోణమితీయ నిష్పత్తి tan తీసుకొనగా

$$\tan(\frac{A+B}{2}) = \tan(90^0 - \frac{C}{2})$$

$$\tan(\frac{A+B}{2}) = \cot\frac{C}{2}$$ $(\because \tan(90^0 - \theta) = \cot\theta)$

www.sakshieducation.com

6. **sin 75° + cos 65° ను o°, 45° మధ్య గల విలువలు త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులలో కనుక్కోండి.**

సాధన: sin 75° = sin (90° - 15°) = cos 15° $(\because \cos(90^0 - \theta) = \sin\theta)$

cos 65° = cos (90° - 25°) = sin 25°. $(\because \sin(90^0 - \theta) = \cos\theta)$

$\therefore$ sin 75° + cos 65° = cos 15° + sin 25°.

అభ్యాసం 11.4

1. కింది వాటిని సూక్ష్మీకరించండి.

(i) (1 + tan θ + sec θ) (1 + cot θ - cosec θ).

సాధన: (1 + tan θ + sec θ) (1 + cot θ - cosec θ) $(\because \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta})$

$$= (1 + \tan\theta + \sec\theta)\left(1 + \frac{1}{\tan\theta} - \text{cosec}\theta\right) \quad (\because \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta})$$

$$= (1 + \tan\theta + \sec\theta)\left(1 + \frac{1}{\tan\theta} - \text{cosec}\theta\right) \quad (\because \text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta})$$

$$= (1 + \tan\theta + \sec\theta)\left(\frac{1 + \tan\theta - \tan\theta.\text{cosec}\theta}{\tan\theta}\right)$$

$$= \frac{(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \tan\theta - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.\frac{1}{\sin\theta})}{\tan\theta}$$

$$= \frac{(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \tan\theta - \sec\theta)}{\tan\theta}$$

www.sakshieducation.com

$$= \frac{(1 + \tan\theta)^2 - \sec^2\theta)}{\tan\theta}$$

$$= \frac{1 + \tan^2\theta + 2\tan\theta - \sec^2\theta}{\tan\theta}$$

$$= \frac{1 + 2\tan\theta - (\sec^2\theta - \tan^2\theta)}{\tan\theta} \qquad (\because \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1)$$

$$= \frac{1 + 2\tan\theta - 1}{\tan\theta}$$

$$= \frac{2\tan\theta}{\tan\theta} = 2$$

ii) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2$

A. $(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2$

$= 2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \qquad [(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)]$

$= 2(1) = 2.$

iii) $(\sec^2\theta - 1)(\mathrm{cosec}^2\theta - 1)$

$(\sec^2\theta - 1)(\mathrm{cosec}^2\theta - 1) \qquad (\because \sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

$= \tan^2\theta . \cot^2\theta \qquad \mathrm{cosec}^2\theta - 1 = \cot^2\theta$

$= 1 \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

2. $(\mathrm{cosec}\,\theta - \cot\theta)^2 = \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$ అని చూపించండి.

సాధన: L.H.S $(\mathrm{cosec}\,\theta - \cot\theta)^2$

$$= \left(\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$$

$$=\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}$$

$$=\frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta} \qquad (\because \sin^2\theta = 1-\cos^2\theta)$$

$$=\frac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$$

$$=\frac{(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)} \qquad \text{R.H.S}$$

3. $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$ అని చూపండి

సాధన: $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sqrt{\frac{(1+\sin A)(1+\sin A)}{(1-\sin A)(1+\sin A)}} = \sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{1-\sin^2 A}}$

$$=\sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{\cos^2 A}} = \frac{1+\sin A}{\cos^2 A} \qquad (\because 1-\sin^2 A = \cos^2 A)$$

$$=\frac{1}{\cos A}+\frac{\sin A}{\cos A}$$

$= \sec A + \tan A$ R.H.S.

4. $\frac{1-\tan^2 A}{\cot^2 A-1} = \tan^2 A$ అని చూపండి.

సాధన: L.H.S $\frac{1-\tan^2 A}{\cot^2 A-1}$

$$=\frac{1-\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}{\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}-1} = \frac{\frac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\cos^2 A}}{\frac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\sin^2 A}} \qquad \left(\because \tan A = \frac{\sin A}{\cos A},\ \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}\right)$$

$$\frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A} \times \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A - \sin^2 A} = \tan^2 A \qquad \text{R.H.S}$$

II Method:

L.H.S $\quad \dfrac{1-\tan^2 A}{\cot^2 A - 1} = \dfrac{1-\tan^2 A}{\dfrac{1}{\tan^2 A} - 1} \qquad (\because \cot A = \dfrac{1}{\tan A})$

$$= \frac{1-\tan^2 A}{\dfrac{1-\tan^2 A}{\tan^2 A}} = (1-\tan A) \times \frac{1-\tan^2 A}{\tan^2 A} = \tan^2 A \qquad \text{R.H.S}$$

5. $\dfrac{1}{\cos\theta} - \cos\theta = \tan\theta.\sin\theta$ అని చూపండి.

సాధన: L.H.S $\quad \dfrac{1}{\cos\theta} - \cos\theta$

$$= \frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.\sin\theta$$

$$= \tan\theta.\sin\theta \qquad \text{R.H.S.}$$

6. **sec A (1 – sin A) (sec A + tan A)** సూక్ష్మీకరించండి

సాధన: sec A (1 – sin A) (sec A + tan A)

= (sec A – sin A. sin A) (sec A + tan A)

$$= \left(\sec A - \frac{1}{\cos A}.\sin A\right)(\sec A + \tan A) \qquad (\because \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta})$$

= (sec A – tan A) (sec A + tan A)

www.sakshieducation.com

$= \sec^2 A - \tan^2 A$ $\quad (\because \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1)$

$= 1$

7. $(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$ అని నిరూపించండి.

సాధన: L.H.S $(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2$

$= (\sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A + 2 \sin A.\operatorname{cosec} A) + (\cos^2 A + \sec^2 A + 2 \cos A \sec A)$

$= \sin^2 A + \cos^2 A + \operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A + 2\sin A.\ \operatorname{cosec} A + 2\cos A \sec A$

$= (\sin^2 A + \cos^2 A) + (1 + \cot^2 A) + (1 + \tan^2 A) + 2\sin A \operatorname{cosec} A$
$+ 2\cos A \sec A$

$= 1 + 2 + \cot^2 A + \tan^2 A + 2\sin A \frac{1}{\sin A} + 2\cos A \frac{1}{\cos A}$

$= 3 + \cot^2 A + \tan^2 A + 2 + 2$

$= 7 + \cot^2 A + \tan^2 A$ R.H.S.

8. $(1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)(1 + \cot^2\theta)$ సూక్ష్మీకరించండి.

సాధన: $(1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)(1 + \cot^2\theta)$

$= (1 - \cos^2\theta)(1 + \cot^2\theta)$ $\quad (\because \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$, $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta)$

$= \sin^2\theta.\ \operatorname{cosec}^2\theta.$ $\quad (\because \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta})$

$= \sin^2\theta.\frac{1}{\sin^2\theta}$

$= 1.$

9. **$\sec\theta + \tan\theta = P$ అయితే $\sec\theta - \tan\theta$ విలువ ఎంత?**

సాధన: $\sec\theta + \tan\theta = P$

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ అని మనకు తెలుసు

$\Rightarrow (\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta) = 1$

$\Rightarrow P(\sec\theta - \tan\theta) = 1$

$\Rightarrow \sec\theta - \tan\theta = 1/p$ అగును.

10. **$\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = k$, $\cos\theta = (k^2-1)/(k^2+1)$ అయితే అని చూపండి.**

సాధన: $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = k \rightarrow (1)$

సర్వ సమీకరణం $\operatorname{cosec}^2\theta + \cot^2\theta = 1$ నుంచి

$(\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta) = 1$

$k(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta) = 1$

$\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta = 1/k \rightarrow (2)$

(1), (2) లను కూడగా

$$\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = k$$

$$\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta = 1/k$$

$$2\operatorname{cosec}\theta = k + 1/k$$

$$2\operatorname{cosec}\theta = (k^2+1)/k$$

$\operatorname{cosec}\theta = (k^2+1)/2k \rightarrow (3)$

సమీ (1) నుంచి (2) ను తీసివేయగా

$\text{cosec}\,\theta + \cot\theta = k$

$\text{cosec}\,\theta - \cot\theta = 1/k$

$+ \quad -$

$2\cot\theta = k - 1/k$

$2\cot\theta = (k^2 - 1)/k$

$\cot\theta = (k^2 - 1)/2k \quad \rightarrow (4)$

సమీ (4) ను (3) చే భాగించగా

$$\frac{\cot\theta}{\cos ec\theta} = \frac{\frac{k^2-1}{2k}}{\frac{k^2+1}{2k}}$$

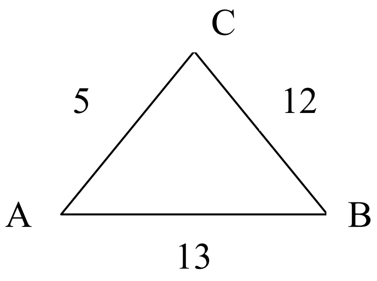
$$\frac{\cos\theta/\sin\theta}{1/\sin\theta} = \frac{k^2-1}{k^2+1}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{k^2-1}{k^2+1}$$

www.sakshieducation.com

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు:

1. పక్క పటంలో, cot A = ________ [ ]



a) 12/13 b) 5/12 c) 5/13 d) 13/5

2. Δ ABC లో, ∠B = 90°, AB = 12 సెం.మీ, BC = 5 సెం.మీ అయితే cos c విలువ [ ]

a) 5/13 b) 5/12 c) 12/5 d) 13/5

3. $\cot\theta = \frac{b}{a}$ అయితే $\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$ విలువ **[ ]**

a) (b – a)/(b+a) b) b – a c) b + a d)

4. sinθ గరిష్ట విలువ ________ [ ]

a) 1/2 b) √3/2 c) 1 d) 1/√2

5. Δ ABC లో A ఒక లఘుకోణం, B వద్ద లంబకోణం ఉన్నచో sin A + cos A విలువ [ ]

a) 1 కి సమానం b) 1 కన్నా ఎక్కువ

c) 1 కి కన్నా తక్కువ d) 2 కు సమానం

6. $\frac{2\tan\theta 30^0}{1+\tan^2 30^0}$ విలువ ________ [ ]

a) sin 60° b) cos 60° c) tan 60° d) sin 30°

7. sinθ = 1/2 అయితే $(\tan\theta + \cot\theta)^2$ విలువ ________ [ ]

a) 16/3 b) 8/3 c) 4/3 d) 10/3

www.sakshieducation.com

8. sinθ - cosθ = 0 అయితే $\sin^4\theta + \cos^4\theta$ విలువ _______ [ ]

a) 1/2 b) 1/4 c) 3/4 d) 1

9. θ = 45° అయితే $\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$ విలువ _______ [ ]

a) 0 b) 1 c) 2 d) ∝

10. tanθ = cot అయితే secθ విలువ [ ]

a) 2 b) 1 c) 1/√3 d) √2

11. A + B = 90°, cot B = అయితే tan A= ______ [ ]

a) 5/3 b) 1/3 c) 3/4 d) 1/4

12. sin (x - 20°) = cos (3x - 10) అయితే x విలువ [ ]

a) 60° b) 30° c) 45° d) 35.5

13. 1 + tan 5° cot 85° = ______ [ ]

a) $\sin^2 5°$ b) $\cos^2 5°$ c) $\sec^2 5°$ d) $\text{cosec}^2 5°$

14. ఏదైనా ΔABC లో, $\sin(\frac{B+C}{2}) =$ ______ [ ]

a) cos A/2 b) sin A/2 c) -sin A/2 d)- cos A/2

15. cos θ =a/b అయితే cosec θ = ______ [ ]

a) b/a b) $b/\sqrt{(b^2 - a^2)}$ c) $\sqrt{(b^2 - a^2)}/b$ d) $a/\sqrt{(b^2 - a^2)}$

16. cos 20° cos 70° - sin 20° sin 70° విలువ [ ]

a) 0 b) 1 c) ∝ d) cos 50°

www.sakshieducation.com

17. $\tan 5° \tan 25° \tan 45° \tan 65° \tan 85°$ విలువ ______ [ ]

a) 2 b) 3 c) 1 d) 4

18. $\tan\theta + \cot\theta = 5$ అయితే $\tan^2\theta + \cot^2\theta =$ ______ [ ]

a) 23 b) 25 c) 27 d) 15

19. $\text{cosec}\,\theta = 2$, $\cot\theta = \sqrt{3}\,p$ (θ లఘు కోణం అయితే) p విలువ [ ]

a) 2 b) 1 c) 0 d) $\sqrt{3}$

20. $\sqrt{\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}} =$ ______ [ ]

a) $\sin A + \cos A$ b) $\sec A + \tan A$

c) $\sec A - \tan A$ d) $\sec^2 A + \tan^2 A$

Key:

1. b; 2. a; 3. d; 4. c; 5. b; 6. a; 7. a; 8. a; 9. b; 10. d;

11. c; 12. b; 13. c; 14. a; 15. c; 16. b; 17. c; 18. a; 19. b; 20. b.

www.sakshieducation.com

ఖాళీలను పూరించండి.

1. cosecθ - cotθ అయితే cosecθ + cotθ విలువ ________

2. $\sin 45° + \cos 45° =$ ___________

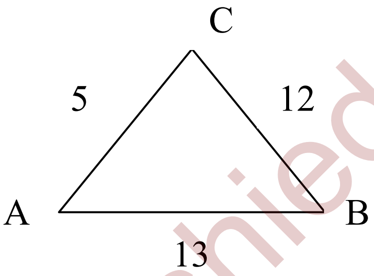
3. $2\tan^2 45° + \cos^2 30° - \sin^2 60° =$ _____________

4. $\sin (90° - A) =$ _______________

5. $\sin A = \cos B$ అయితే $A + B =$ ______

6. $\sec\theta = \frac{m+n}{2\sqrt{mn}}$ అయితే $\sin\theta =$ ______________

7. పటంలో sec A విలువ _____________.



8. sin 2A= 1/2 , $\tan^2 45°$, (A లఘు కోణం) అయితే A విలువ ______

9. $\frac{1}{\sec\theta}$, $0° < \theta < 90°$ గరిష్ఠ విలువ _________

10. $\frac{\sin^2\theta}{1-\cos^2\theta}$ విలువ ________

11. $\cot\theta = 1$ అయితే $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$ _________

12. $\sec^2\theta - 1 =$ ________

13. $\sec\theta + \tan\theta = p$, అయితే $\sec\theta - \tan\theta =$ ________.

www.sakshieducation.com

14. sin A లేదా cos A ల విలువలు ఎప్పటికీ ________ కంటే తక్కువ గాను లేదా సమానంగాను ఉంటాయి.

15. sec (90° - A) = _______

Key:

1) 4; 2) √2; 3) 2; 4) cos A; 5) 90°; 6) $\frac{m+n}{m-n}$

7) 13/5; 8) 15°; 9) 1; 10) 1; 11) √2 + 1;

12) $\tan^2 \theta$; 13) 1/p ; 14) 1; 15) cosec A.

www.sakshieducation.com