వాస్తవ సంఖ్యలు

ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యను ప్రధానాంకాల లబ్ధంగా రాయవచ్చు. ప్రధాన కారణాంకాల క్రమం ఏదైనప్పటికీ ఈ కారణాంకాల లబ్ధం ఏకైకం. దీన్నే 'అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం' అంటారు.

అంటే సంయుక్త సంఖ్య xను $x = p_1 . p_2 . p_3 \cdots p_n$ గా రాయవచ్చు. ఇక్కడ $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$ లు ఆరోహణ క్రమంలో రాసిన ప్రధానాంకాలు.

ఉదా: $21252 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23$

$8232 = 2^3 \times 3 \times 7^3$

అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించి క.సా.గు., గ.సా.భా. కనుగొనడం:

రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ సంఖ్యలను అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం ప్రకారం ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా రాయాలి. సంఖ్యల ప్రతి ప్రధాన కారణాంకాల గరిష్ఠ ఘాతాల లబ్ధాన్ని 'క.సా.గు.'గా, సంఖ్యల సామాన్య కారణాంకాల కనిష్ఠ ఘాతాల లబ్ధాన్ని 'గ.సా.భా. (గ.సా.కా.)'గా పరిగణిస్తారు.

ఉదా: $336 = 2^4 \times 3 \times 7$

$54 = 2 \times 3^3$

336, 54ల క.సా.గు. $= 2^4 \times 3^3 \times 7 = 3024$

336, 54ల గ.సా.భా $= 2^1 \times 3^1 = 6$

- a, bలు రెండు ధన పూర్ణ సంఖ్యలైతే..

  a × b = (a, bల క.సా.గు.) × (a, bల గ.సా.భా.)

అకరణీయ సంఖ్యలు (Q)

p, qలు పూర్ణ సంఖ్యలై $q \neq 0$ అయినప్పుడు $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయగలిగే సంఖ్యలను 'అకరణీయ సంఖ్యలు' అంటారు. ఇక్కడ p, qలు సాపేక్ష ప్రధానాంకాలు.

అకరణీయ సంఖ్యా సమితి

$Q = \{\frac{p}{q} / p, q \in z, q \neq 0$ గ.సా.కా.$(p,q)=1\}$

మరోవిధంగా..

'అంతమయ్యే' లేదా 'అంతం కాని ఆవర్తనమయ్యే' దశాంశ భిన్నాలను అకరణీయ సంఖ్యలు అంటారు.

ఉదా: $\frac{1}{2} = 0.5, \frac{3}{4} = 0.75$ లు అంతమయ్యే దశాంశాలు

$\frac{1}{3} = 0.333.... = 0.\bar{3}; \frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ లు అంతం కాని ఆవర్తనమయ్యే దశాంశాలు.

అకరణీయ సంఖ్యలు – అంతమయ్యే దశాంశ రూపం:

x అనేది ఒక అకరణీయ సంఖ్య అనుకుందాం. దీని దశాంశ రూపం ఒక అంతమయ్యే దశాంశమైనప్పుడు xను p, qలు పరస్పర ప్రధానాంకాలుగా ఉన్న $\frac{p}{q}$ రూపంలో వ్యక్తపరచవచ్చు. q ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధం $2^n.5^m$ అవుతుంది. n, m = రుణేతర పూర్ణ సంఖ్యలు.

విపర్యయంగా n, mలు రుణేతర పూర్ణ సంఖ్యలు, q ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధ రూపం $2^n.5^m$ ఉన్న అకరణీయ సంఖ్య $x = \frac{p}{q}$ అయితే, x దశాంశ రూపం ఒక అంతమయ్యే దశాంశం.

ఉదా:

1) $\frac{3}{40}$ అకరణీయ సంఖ్యలో $q = 40 = 2^3.5^1$. ఇది $2^n.5^m$ రూపంలో ఉంది.

కాబట్టి $\frac{3}{40}$ అంతమయ్యే దశాంశం.

2) $\frac{25}{32}$లో $q = 32 = 2^5 \times 5^0$. అంటే $2^n.5^m$ రూపంలో ఉంది. కాబట్టి

$\frac{25}{32}$ అంతమయ్యే దశాంశం.

3) $\frac{16}{125}$లో $q = 125 = 2^0 \times 5^3$. ఇది $2^n.5^m$ రూపంలో ఉంది. కాబట్టి

$\frac{16}{125}$ అంతమయ్యే దశాంశం.

అకరణీయ సంఖ్యలు – అంతం కాని ఆవర్తనమయ్యే దశాంశ రూపం:

x అనే అకరణీయ సంఖ్యను $\frac{p}{q}$ రూపంలో వ్యక్తపరిచినప్పుడు దీని దశాంశ రూపం ఒక అంతం కాని, ఆవర్తనమయ్యే దశాంశం అయినప్పుడు q ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధం $2^n.5^m$ రూపంలో ఉండదు. ఇక్కడ n, mలు రుణేతర పూర్ణ సంఖ్యలు.

విపర్యయంగా n, mలు రుణేతర పూర్ణ సంఖ్యలు, q ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధం $2^n.5^m$ రూపంలో లేకుంటే, అకరణీయ

సంఖ్య $x = \frac{p}{q}$ అయితే x దశాంశ రూపం ఒక అంతం కాని, ఆవర్తనమయ్యే దశాంశం అవుతుంది.

ఉదా:

1) $\frac{41}{75}$లో $q = 75 = 3 \times 5^2$ అనేది

$2^n.5^m$ రూపంలో లేదు. కాబట్టి $\frac{41}{75}$ అంతం కాని, ఆవర్తనమయ్యే దశాంశం.

2) $\frac{77}{210} = \frac{11}{30}$లో $q = 30 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1$ అనేది $2^n.5^m$ రూపంలో లేదు. కాబట్టి

$\frac{77}{210}$ అంతం కాని, ఆవర్తనమయ్యే దశాంశం.

కరణీయ సంఖ్యలు (Q')

p, qలు పూర్ణ సంఖ్యలు, $q \neq 0$ అయితే $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయలేనివాటిని 'కరణీయ సంఖ్యలు' అంటారు.

మరోవిధంగా అంతం కాని లేదా ఆవర్తనం కాని దశాంశ భిన్నాలను 'కరణీయ సంఖ్యలు' అంటారు. అంటే అకరణీయ సంఖ్యలు కానివాటిని 'కరణీయ సంఖ్యలు'గా పేర్కొనవచ్చు.

ఉదా:

1) $\sqrt{2} = 1.414.....$, అంతం కాదు, ఆవర్తనం కాదు.

2) $\pi = 3.14.....$, అంతం కాదు, ఆవర్తనం కాదు.

3) p ప్రధాన సంఖ్య అయితే $\sqrt{p}$ కరణీయ సంఖ్య

ఉదా: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, ...

- ఒక అకరణీయ, కరణీయ సంఖ్యల మొత్తం లేదా భేదం కరణీయ సంఖ్య అవుతుంది.

ఉదా: $2 + \sqrt{3}$, $5 - \sqrt{7}$లు కరణీయ సంఖ్యలు.

- ఒక శూన్యేతర అకరణీయ, కరణీయ సంఖ్యల లబ్ధం, భాగఫలం కూడా కరణీయ సంఖ్యే.

ఉదా: $3\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ లు కరణీయ సంఖ్యలు.

- రెండు కరణీయ సంఖ్యల మొత్తం ఎల్లప్పుడూ కరణీయ సంఖ్య కాకపోవచ్చు.

  ఉదా: $a = \sqrt{2}, b = -\sqrt{2}$ల మొత్తం

  $a + b = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$, కరణీయ సంఖ్య కాదు.

- రెండు కరణీయ సంఖ్యల లబ్ధం ఎల్లప్పుడూ కరణీయ సంఖ్య కాకపోవచ్చు.

  ఉదా: $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{8}$ల లబ్ధం $ab = \sqrt{2}.\sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$, కరణీయ సంఖ్య కాదు.

వాస్తవ సంఖ్యలు (R)

అకరణీయ సంఖ్యలు (Q), కరణీయ సంఖ్యల(Q')ను కలిపి 'వాస్తవ సంఖ్యలు' అంటారు. $R = Q \cup Q'$

- వాస్తవ సంఖ్యా సమితి (R) సంకలనం దృష్ట్యా, $R-\{0\}$ సమితి గుణకారం దృష్ట్యా సంవృత, సహచర, తత్సమ, విలోమ, స్థిత్యంతర, విభాగ న్యాయ ధర్మాలను పాటిస్తాయి.

సంవర్గమానాలు

సంవర్గమానాలను అన్ని రకాల గణన ప్రక్రియల్లో.. ముఖ్యంగా ఇంజినీరింగ్, సైన్స్, వ్యాపారం, అర్థశాస్త్రాల్లో విరివిగా వినియోగిస్తారు. చక్రవడ్డీని గణించడానికి; ఘాతాల్లో ఉండే వృద్ధిరేటును, క్షీణతను తెలుసుకోవడానికి; రసాయన శాస్త్రంలో pH విలువను కనుగొనడానికి; భూకంపాల తీవ్రత మొదలైనవాటిని లెక్కించడానికి వాడతారు.

సంవర్గమానం నిర్వచనం: a, xలు ధనపూర్ణ సంఖ్యలై $a \neq 1$, $a^n = x$ అయితే $\log_a x = n$ అవుతుంది. ఇక్కడ 'a' భూమికి x సంవర్గమానాన్ని 'n' తో సూచిస్తారు.

- $a^n = x$ సంవర్గమాన రూపం $\log_a x = n$
- $\log_a x = n$ ఘాతాంక రూపం $a^n = x$

  ఉదా: 1) $5^3 = 125$ సంవర్గమాన రూపం

  $\log_5 125 = 3$

  2) $\log_2 32 = 5$ ఘాతాంక రూపం

  $2^5 = 32$

- వేర్వేరు ఆధారాలకు ఒకే సంఖ్య సంవర్గమానాలు వేర్వేరుగా ఉంటాయి.

  ఉదా: $\log_4 64 = 3, \log_8 64 = 2$

- $a^0 = 1$ కాబట్టి $\log_a 1 = 0$. అందువల్ల ఏ ఆధారానికైనా '1' సంవర్గమానం విలువ '0'.
- $a^1 = a$ కాబట్టి $\log_a a = 1$ అంటే ఒక సంఖ్య (a) సంవర్గమానం అదే భూమి (a)కు '1' అవుతుంది.

  ఉదా: $\log_5 5 = 1, \log_{27} 27 = 1$

సంవర్గమాన న్యాయాలు:

1) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

2) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

3) $\log_a x^m = m \log_a x$

- ప్రతి సంవర్గమానంలో రెండు భాగాలు ఉంటాయి.

  ఒకటి పూర్ణాంక భాగం (లాక్షణికం).

  రెండోది దశాంశ భాగం (మాంటిస్సా).

  ఉదా:

  $\log_{10} 16 = 1.2040$లో లాక్షణికం '1', మాంటిస్సా 0.2040.

మాదిరి ప్రశ్నలు

1. 1176ను ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా రాయండి. *(వ్యక్తపరచడం)*

జ. $1176 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7$

$= 2^3 \times 3 \times 7^2$

2|1176
2|588
2|294
3|147
7|49
7

2. కింది పూర్ణ సంఖ్యల క.సా.గు., గ.సా.కా. లను ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధ పద్ధతిలో కనుగొనండి.

144, 180, 192 *(సమస్యా సాధన)*

జ. ఇచ్చిన సంఖ్యలను ప్రధాన కారణాంకాల పద్ధతిలో రాస్తే..

$144 = 2^4 \times 3^2$

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5^1$

$192 = 2^6 \times 3^1$

144, 180, 192ల

గ.సా.కా. = సంఖ్యల సామాన్య కారణాంకాల కనిష్ట ఘాతాల లబ్ధం

$= 2^2 \times 3^1 = 12$

క.సా.గు. = సంఖ్యల ప్రతి కారణాంకం గరిష్ట ఘాతాల లబ్ధం

$= 2^6 \times 3^2 \times 5^1 = 2880$

3. n ఒక సహజ సంఖ్య అయితే 6^n సంఖ్య సున్నాతో అంతమవుతుందో, కాదో వివరించండి.

(కారణాలు చెప్పడం – నిరూపించడం)

జ. n ఒక సహజ సంఖ్య

n = 1 అయితే $6^n = 6^1 = 6$

n = 2 అయితే $6^n = 6^2 = 6 \times 6 = 36$

n = 3 అయితే $6^n = 6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 216$

సహజ సంఖ్య n ఏ విలువకైనా 6^n విస్తరణలో ఒకట్ల స్థానంలో '6' ఉంది.

$\therefore$ n ఏ విలువకైనా 6^n 'సున్నా'తో అంతం కాదు.

4. రెండు సంఖ్యల క.సా.గు., గ.సా.భా. 180, 6. వాటిలో ఒక సంఖ్య 30 అయితే రెండో సంఖ్యను కనుగొనండి. *(అనుసంధానం)*

జ. రెండు సంఖ్యల క.సా.గు., గ.సా.భా.

= 180, 6

అందులో ఒక సంఖ్య = 30

రెండో సంఖ్య = x అనుకుందాం..

రెండు సంఖ్యల క.సా.గు. × గ.సా.భా. =

ఆ రెండు సంఖ్యల లబ్ధం.

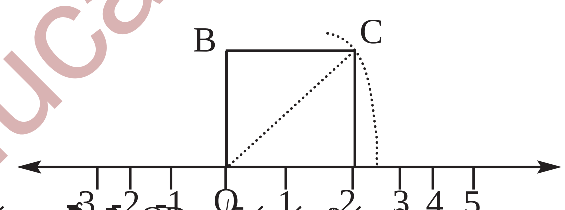
$180 \times 6 = 30 \times x$

$$x = \frac{180 \times 6}{30} = 36$$

5. √5ను వాస్తవ సంఖ్యారేఖపై గుర్తించండి.

(దృశ్యీకరణ, ప్రాతినిధ్య పరచడం)

జ.



సంఖ్యారేఖపై OD.. √5ను సూచిస్తుంది.