1. వాస్తవ సంఖ్యలు

కీలక భావనలు

వాస్తవ సంఖ్యలు కరణీయ, అకరణీయ సంఖ్యల సమ్మేళనము వాస్తవ సంఖ్యలను R చే సూచిస్తాము.

1. యూక్లిడ్ భాగహార న్యాయం $a = bq + r, o < r < b$ అయ్యే విధంగా ధనపూర్ణ సంఖ్యలు a మరియు b ల జతకు అనుగుణంగా q మరియు r లు ఏకైక పూర్ణ సంఖ్యలు వ్యవస్థితం అవుతాయి.

2. అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం ప్రకారం "ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యను ప్రధాన సంఖ్యల కారణాంకాల లబ్దంగా వ్యక్తపరచవచ్చును మరియు ప్రధానకారణాంకాల వరుసక్రమం ఏదైనప్పటికీ ఇది ఏకైకం" అని నిర్వచించవచ్చును.

3. p ఒక ప్రధాన సంఖ్య మరియు a ఒక ధనపూర్ణ సంఖ్య అయి వుండి a^2 ను p నిశ్శేషంగా భాగిస్తే అప్పుడు a ను p నిశ్శేషంగా భాగిస్తుంది.

4. x ఒక అకరణీయ సంఖ్య మరియు దీని దశాంశ రూపం ఒక అంతమైదే దశాంశం అయినప్పుడు x ను p,q లు పరస్పర ప్రధానాంకాలు అయివున్న $\frac{p}{q}$ రూపంలో వ్యక్తపరచవచ్చును మరియు p మరియు q యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్దం $2^n 5^m$ అగును ఇందులో n,m లు రుణేతర పూర్ణసంఖ్యలు.

5. n,m లు రుణేతర పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు p యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ద రూపం $2^n 5^m$ కలిగినటువంటి అకరణీయ సంఖ్య $x = \frac{p}{q}$ అయిన, x యొక్క దశాంశరూపం ఒక అంతమయ్యే దశాంశం అగును.

6. n, m లు రుణేతర పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు q యొక్క ప్రధాన కారణాంకముల లబ్దం $2^n 5^m$ రూపంలో లేకుంటే, అకరణీయ సంఖ్య $x = \frac{p}{q}$ అయిన, x యొక్క దశాంశరూపం ఒక అంతం కాని ఆవర్తన దశాంశం అగును.

7. a, x లు ధన పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు $a \neq 1$ అయివుండి $a^n = x$ అయిన మనం $\log_a x = n$ అని నిర్వచిస్తాం.

8. సంవర్గమాన న్యాయాలు

   i) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ ii) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

   iii) $\log_a x^m = m \log_a x$

9. సంవర్గమానాలను అన్ని రకాల గణిత ప్రక్రియలలో ముఖ్యంగా ఇంజనీరింగ్, సైన్సు, వ్యాపారం, అర్థ శాస్త్రంలో విరివిగా వినియోగిస్తారు.

10. రెండు కరణీయ సంఖ్యల మొత్తం ఎల్లప్పుడూ కరణీయ సంఖ్య కాకపోవచ్చును.

a, b లు రెండూనూ కరణీయ సంఖ్యలుగా $a=\sqrt{2}$ మరియు $b=-\sqrt{2}$ గా తీసుకుంటే $a+b=0$ అగును. ఇది ఒక అకరణీయ సంఖ్య.

11. రెండు కరణీయ సంఖ్యల లబ్దం ఎల్లప్పుడూ కరణీయం కాకపోవచ్చును.

ఉదాహరణకు a, b లు రెండు కరణీయ సంఖ్యలుగా $a=\sqrt{2}$ మరియు $b=\sqrt{8}$ గా తీసుకుంటే $ab=\sqrt{16=4}$ ఇది ఒక అకరణీయ సంఖ్య.

12. ఒక అకరణీయ, కరణీయ సంఖ్యల మొత్తం లేదా భేదం మరొక కరణీయ సంఖ్య మరియు

13. ఒక శూన్యేతర అకరణీయ, కరణీయ సంఖ్యల లబ్దం మరియు భాగఫలం కూడా మరొక కరణీయ సంఖ్య అగును.

అభ్యాసం

1. యూక్లిడ్ భాగహార శేషవిధి ఆధారంగా జతల గ.సా.భా.ను కనుగొనండి.

i) 900 మరియు 270

సాధన. 900 ను 270చే భాగించగా శేషము 90 వస్తుంది. దీనిని

900 = 270 × 3 + 90

పైదానిలోని భాజకం 270 మరియు శేషము 90పై యూక్లిడ్ం భాగహార న్యాయాన్ని అనువర్తింపచేయగా దానిని

270 = 90 × 3 + 0

పైదానిలో శేషము ‘0’ వచ్చింది. ఇంకా ఈ సాధనను ముందుకు కొనసాగించలేము.

90 అనేది సంఖ్యలు 900 మరియు 270లను నిశ్శేషంగా భాగిస్తుంది.

$\therefore$ వాటి గ.సా.భా. 90

ii) 196 మరియు 38220

సాధన. 38220ను 196చే భాగించగా శేషము 0 వస్తుంది.

దీనిని 38220 = 196 × 195 + 0

పైదానిలో శేషము ‘0’ వచ్చింది. ఇంకా ఈ సాధనను ముందుకు కొనసాగించలేము.

196 అనేది సంఖ్యలు 196 మరియు 38220లను నిశ్శేషంగా భాగిస్తుంది.

$\therefore$ వాటి గ.సా.భా. 196

iii) 1651 మరియు 2032

సాధన. 2032ను 1651చే భాగించగా శేషము 381 వస్తుంది.

దీనిని

2032 = 1651 × 1 + 381

పైదానిలో విభాజకం 1651 మరియు శేషము 381 పై యూక్లిడ్ భాగహార న్యాయాన్ని అనువర్తింపజేయగా దానిని

$381 = 127 \times 3 + 0$

పైదానిలో శేషము '0' వచ్చింది. ఇంకా ఈ సాధనను ముందుకు కొనసాగించలేము.

127 అనేది సంఖ్యలు 1651 మరియు 2032లను నిశ్శేషంగా భాగిస్తుంది.

$\therefore$ వాటి గ.సా.భా. 127.

2. q ఏదైనా ఒక పూర్ణ సంఖ్య అయినప్పుడు ప్రతి ధనబేసి పూర్ణసంఖ్య $6q + 1$ లేదా $6q + 3$ లేదా $6q + 5$ రూపంలో ఉంటుందని చూపుము.

సాధన. a ఏదైనా ధనబేసి పూర్ణసంఖ్య అనుకొందాం.

భాగహార శేష విధిని a మరియు $b = 6$ పై అనువర్తింపచేయగా.

$0 \leq r < 6$, కావున శేషంను 0, 1, 2, 3, 4, 5 అవుతాయి.

వీటి ఆధారంగా a యొక్క విలువలు $6q$ లేదా $6q + 1$ లేదా $6q + 2$ లేదా $6q + 3$ లేదా $6q + 4$ లేదా $6q + 5$ లేదా (q భాగఫలానికి కావచ్చు).

a భేసిసంఖ్య కావున $6q, 6q + 2$ మరియు $6q + 4$లు బేసి సంక్యలు అయ్యే అవకాశం లేదు. (ఇవన్నీ 2 చే నిశ్శేషంగా భాగిస్తాయి)

$\therefore$ q ఏదైనా ఒక పూర్ణసంఖ్య అయినప్పుడు ప్రతి ధనబేసిపూర్ణ సంఖ్య $6q + 1$ లేదా $6q + 3$ లేదా $6q + 5$ రూపంలో ఉంటుంది.

3. ఏదైనా ధనపూర్ణసంఖ్య యొక్క వర్గం $3p$ లేదా $3p + 1$ రూపంలో ఉంటుందని యూక్లిడ్ భాగహార శేష విధి ఆధారంగా చూపుము.

సాధన. a అనేది ఏదైనా ధనపూర్ణబేసిసంఖ్య కనుగొనుము. యూక్లిడ్ భాగహార శేషవిధిని a మరియు $b = 3$ పై అనువర్తింపచేయగా

$0 \leq r < 3$ కావున శేషంను 0, 1, 2

వీటి ఆధారంగా a యొక్క విలువలు $3m$ లేదా $3m + 1$ లేదా $3m + 2$ ఇక్కడి m భాగపలము.

$(3m)^2 = 9m^2$

దీనిని $3p$ రూపంలో రాయవచ్చును. 9, 3చే నిశ్శేషంగా భాగించబడుతుంది.

$$(3m + 1)^2 = 9m^2 + 6m + 1$$
$$= 3\,(3m^2 + 2m) + 1$$

దీనిని $3p + 1$ రూపంలో రాయవచ్చును.

$9m^2+6m$ దీనిని $3\,(3m^2+2m)$ గా రాయవచ్చు.

ఇది 3చే నిశ్శేషంగా భాగించబడుతుంది.

$$(3m + 2)^2 = 9m^2 + 12m+4$$
$$= 9m^2 + 12m + 3 + 1$$
$$= 3(3m^2+ 12m+ 3)$$

దీనిని $3p + 1$ గా రాయవచ్చును. $9m^2 + 12m+3$ అనేది $3(3m^2+ 4m+ 1)$గా ఉన్నప్పుడు 3చే నిశ్శేషంగా భాగించబడుతుంది.

$\therefore$ ఏదైనా ధనపూర్ణ సంఖ్య యొక్క వర్గం $3p$ లేదా $3p + 1$ లేదా $3p + 2$ రూపంలో ఉంటుంది.

4. ఏదైనా ధనపూర్ణసంఖ్య యొక్క ఘనం 9m లేదా 9m+1 లేదా 9m+8 రూపంలో ఉంటుందని చూపుము.

సాధన. a ఏదైన ధనపూర్ణ సంఖ్య అనుకొందాం.

భాగహార శేషవిధిని a మరియు $b = 3$ పై అనువర్తింపచేయగా

$0 \leq r < 3$ కావున శేషంను 0, 1, 2 అవుతాయి.

వీటి ఆధారంగా a యొక్క విలువలు 3p లేదా 3p +1 లేదా 3p +2 (ఇక్కడ p భాగఫలము) కావచ్చును.

$(3p)^3 = 27p^3$ దీనిని 9m రూపంలో రాయవచ్చును.

ఇది 9చే నిశ్శేషంగా భాగించబడుతుంది.

$$(3p + 1)^3 = 27p^3 + 29p^2 + 9p + 1$$
$$= 9 (3p^3 + 3p^2 + p) + 1$$

ఇది 9m+1 రూపంలో రాయవచ్చును.

$27p^3 + 27p^2 + 9p$ ను $9 (3p^3 + 3p^2 + p)$ గా వ్రాసిన ఇది 9చే భాగించబడుతుంది.

చివరగా $(3p + 2)^2 = 27p^3 + 54p^2 + 36p + 8$
$$= 9 (3p^3 + 6p^2 + 4p) + 8$$

దీనిని $9m + 8$ రూపంలో రాయవచ్చును.

$27p^3 + 54p^2 + 36p = 9 (3p^3 + 6p^2 + 4p)$ గా వ్రాసిన ఇది 9చే భాగించబడుతుంది.

ఏదైనా ధనపూర్ణసంఖ్య యొక్క ఘనం 9m లేదా $9m + 1$ or $9m + 8$ రూపంలో ఉంటుంది.

5. ఏదైనా ధనపూర్ణసంఖ్య n కు, n, $n + 2$ లేదా $n + 4$ లలో ఏదైనా ఒకటి మాత్రమే 3చే భాగింపబడుతుందని చూపుము.

సాధన. ఏదైనా ధనపూర్ణ సంక్య యొక్క రూపం 3q లేదా $3q + 1$ లేదా $3q + 2$, q ఏదైనా ఒక పూర్ణ సంఖ్య అయిన ఈ క్రింది సందర్భాలలో ఒకటి మాత్రమే 3చే భాగింపబడుతుంది.

సందర్భాలు:

సందర్భం

(i) $n = 3q$ అయినపుడు

ఈ సందర్భంలో $n = 3q$ అనేది 3చే నిశ్శేషంగా భాగింపబడుతుంది.

$n = 3q$

$\Rightarrow n + 2 = 3q + 2$

$\Rightarrow n + 2$ ను 3చే భాగించగా శేషము 2 వస్తుంది.

$\Rightarrow n + 2$ 3చే నిశ్శేషంగా భాగింపబడదు.

n, 3చే నిశ్శేషంగా భాగింపబడుతుంది. కాని $n + 2$ మరియు $n + 4$ లు 3చే నిశ్శేషంగా భాగింపబడవు.

సందర్భం (ii): $n = 3q + 1$ అయినప్పుడు

ఈ సందర్భంగా $n = 3q + 1$

$\Rightarrow$ n ను 3చే భాగించగా శేషము 1 వస్తుంది.

$\Rightarrow$ n, 3చే నిశ్శేషంగా భాగింపబడదు.

$n = 3q + 1$

$n + 2 = (3q + 1) + 2 = 3q + 3 = 3 (q+1)$

$\Rightarrow$ n + 2, 3చే నిశ్శేషంగా భాగింపబడుతుంది.

$n = 3q + 1$

$\Rightarrow n + 4 = 3q + 1 + 4 = 3q + 5 = 3 (q + 1) + 2$

n + 4ను 3చే భాగించిన శేషము 2 వస్తుంది.

$\Rightarrow$ n + 4, 3చే భాగించగా భాగింపబడదు.

n + 2, 3చే నిశ్శేషంగా భాగించబడుతుంది. n మరియు n + 4 3చే నిశ్శేషంగా భాగించబడవు.

సందర్భము (iii): $n = 3q + 2$ అయినప్పుడు

ఈ సందర్భములో

$n = 3q + 2$

$\Rightarrow$ n ను 3చే భాగించగా వచ్చు శేషము 2

$\Rightarrow$ n, 3చే నిశ్శేషంగా భాగించబడదు.

$n = 3q + 2$

$\Rightarrow n + 2 = 3q + 2 + 2 = 3q + 4 = 3q + 3 + 1 = 3 (q+1) + 1$

$\Rightarrow$ n + 2, 3చే భాగించగా శేషము 1 వస్తుంది.

$\Rightarrow$ n + 2, 3చే నిశ్శేషంగా భాగింపబడదు.

$n = 3q + 2$

$n + 4 = 3q + 2 + 4 = 3q + 6 = 3 (q + 2)$

$\Rightarrow$ n + 4, 3చే నిశ్శేషంగా భాగించబడుతుంది.

n + 4, 3చే నిశ్శేషంగా భాగించబడుతుంది. కాని n, n + 2లు 3చే భాగించబడవు.

6. క్రింది వానిలో ప్రతిసంఖ్యను ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా రాయండి.

సాధన. i) 140 $= 2 \times 70$

$= 2 \times 2 \times 35$

$= 2 \times 2 \times 5 \times 7$

$= 2^2 \times 5 \times 7$

ii) 156 $= 2 \times 78$

$= 2 \times 2 \times 39$

$= 2 \times 2 \times 3 \times 13$

$= 2^2 \times 3 \times 13$

iii) 3825 $= 5 \times 765$

$= 5 \times 5 \times 153$

$= 5 \times 5 \times 3 \times 51$

$= 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 17$

$= 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 17$

$= 3^2 \times 5^2 \times 17$

iv) 5005 = 5 x 1001
= 5 x 11 x 91
= 5 x 11 x 7 x 13
= 5 x 7 x 11 x 13

v) 7429 = 17 x 437
= 17 x 19 x 23

2. క్రింది పూర్ణసంఖ్యల యొక్క క.సా.గు మరియు గ.సా.కా లను ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధ పద్ధతిలో కనుగొనండి.

సాధన i) 12, 15 మరియు 21

12 $= 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3^1$

15 $= 3^1 \times 5^1$

21 $= 3^1 \times 7^1$

గ.సా.కా (12, 15 మరియు 21) $= 3^1 = 3$

= సంఖ్యల యొక్క సామాన్య కారణాంకముల కనిష్ఠ ఘాతాల లబ్ధం.

క.సా.గు(12, 15 మరియు 21)

$= 2^2 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1$

$= 4 \times 3 \times 5 \times 7$

$= 420.$

$2^2 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1$ = సంఖ్యల యొక్క సామాన్య కారణాంకముల గరిష్ఠ ఘాతాల లబ్ధం.

ii) 17, 23 మరియు 29

సాధన. 17, 23 మరియు 29 అనే సంఖ్యలు ప్రధాన సంఖ్యలు

∴ గ.సా.కా. (17, 23 మరియు 29) = 1

క.సా.గు. (17, 23 మరియు 29)

= 17 x 23 x 29 = 391 x 29 = 11339

iii) 8, 9 మరియు 25

సాధన. $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

$9 = 3 \times 3 = 3^2$

$25 = 5 \times 5 = 5_2$

.... గ.సా.కా. (8, 9 మరియు 25) = 1

క.సా.గు (8, 9 మరియు 25

$= 2^3 \times 3^2 \times 5^2$

$= 8 \times 9 \times 25$

$= 72 \times 25 = 1800$

iv) 72 మరియు 108

సాధన. 72 = 2 x 36
= 2 x 2 x 18
= 2 x 2 x 2 x 9
= 2 x 2 x 2 x 3 x 3
$= 2^3 \times 3^2$

$108 = 2 \times 54$
$= 2 \times 2 \times 27$
$= 2 \times 2 \times 3 \times 9$
$= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$
$= 2^2 \times 3^3$

గ.సా.కా (72 మరియు 108) $= 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$

క.సా.గు (72 and 108 $= 2^3 \times 3^3 = 8 \times 27 = 216$

v) 306 మరియు 657

సాధన. $306 = 2 \times 153$
$= 2 \times 3 \times 51$
$= 2 \times 3 \times 3 \times 17$
$= 2^1 \times 3^2 \times 17^1$
$657 = 3 \times 219$
$= 3 \times 3 \times 73 = 3^2 \times 73^1$

గ.సా.కా. (306 మరియు 657) $= 3^2 = 9$

క.సా.గు. (306 మరియు 657) $= 2^1 \times 3^2 \times 17^1 \times 73^1$
$= 2 \times 9 \times 17 \times 73$
$= 18 \times 17 \times 73$
$= 306 \times 73 = 22338$

3. n ఒక సహజ సంఖ్య అయిన 6^n సంఖ్య 'సున్న'తో అంతమగునో, కాదో సరిచూడండి.

సాధన. n సహజ సంఖ్యగా గల సంఖ్య 6^n సున్నతో అంతం కావాలంటే అది '5'చే నిశ్శేషంగా భాగించబడాలి. అంటే 6^n సంఖ్య యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంలో 5 ఒక ప్రధాన సంఖ్యగా ఉండాలి. కావున 2 మరియు 3 లు మాత్రమే 6^n సంఖ్య యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంలో ఉన్నాయి.. అందుచే 6^n. యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంలో 5 లేనందున, n ఏ సహజసంఖ్య విలువకైననూ 'సున్న'తో అంతము కాదు.

4. $7 \times 11 \times 13 + 13$ మరియు $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ ఏ విధంగా సంయుక్త సంఖ్యలగునో వివరించండి.

సాధన. $7 \times 11 \times 13 + 13 \times 1 = 13 \times [7 \times 11 + 1]$
$= 13 \times [77 + 1]$
$= 13 \times 78$
$= 13 \times 2 \times 39$
$= 13 \times 2 \times 3 \times 13$

కావున $7 \times 11 \times 13 + 13$ ఒక సంయుక్త సంఖ్య.

5. $(17 \times 11 \times 2) + (17 \times 11 \times 5)$ అనేది ఒక సంయుక్త సంఖ్య అని ఏ విధంగా నిరూపిస్తావు? వివరించండి.

సాధన. $(17 \times 11 \times 2) + (17 \times 11 \times 5)$
$= (17 \times 11) \times [2 + 5]$

$= 17 \times 11 \times 7$

$= 17 \times 77 = 1309$

మొదటి సంఖ్య $17 \times 11 \times 2$ కు 17×11 ఒక కారణాంకము.

రెండవసంక్య $17 \times 11 \times 5$ కు 17×11 ఒక కారణాంకము.

17 మరియు 11 ఆ రెండు సంఖ్యలకు కారణాంకము.

$\therefore (17 \times 11 \times 2) + (17 \times 11 \times 5)$ ఒక సంయుక్త సంఖ్య.

6. 6^{100} యొక్క ఫలిత సంఖ్యలో ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె ఏది?

సాధన $6^1 = 6$

$6^2 = 36$

$6^3 = 216$

$6^4 = 1296$

....

....

6^n రూపంలో నున్న ఏ ధనపూర్ణ సంఖ్యయైనా 6తో అంతమగును.

$\therefore$ 6^{100} లోని ఒకట్ల స్థానములోని అంకె = 6

7. కింది అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశ రూపంలో రాయండి. ఇందులో ఏవి అంతమయ్యే దశాంశాలో, ఏవి అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశారో తెలుపండి.

i) $\frac{3}{8}$

i) $\frac{3}{8}$

సాధన

```
8) 3 0   (0.375
   2 4
  ---------
     6 0
     5 6
    --------
       4 0
       4 0
     --------
        0
     --------
```

$\therefore \frac{3}{8} = 0.375$

శేషము నున్న కావున $\frac{3}{8}$ అంతమయ్యే దశాంశము.

ii) $\frac{229}{400}$

సాధన. 400) 2290 (0.5725
2000

2900
2800

1000
800

2000
2000

0

$$\therefore \frac{229}{400} = 0.5725$$

శేషము సున్న కావున $\frac{229}{400}$ అంతమయ్యే దశాంశము.

iii) $4\frac{1}{5} = \frac{21}{5}$

సాధన. $4\frac{1}{5} = \frac{21}{5}$

5) 2 1 (4.2
2 0
----
1 0
1 0

0

$$4\frac{1}{5} = 4.2$$

$\therefore$ శేషము సున్న కావున $4\frac{1}{5}$ అంతమయ్యే దశాంశము.

iv) $\frac{2}{11}$

సాధన. 11) 2 0 (0.181818
1 1
----
9 0
8 8

20
11

90
88

21
11

90
88

2

$\frac{2}{11} = 0.181818............ = 0.\overline{18}$

$\therefore \frac{2}{11}$ అంతం కాని ఆవర్తన దశాంశము.

v) $\frac{8}{125}$

సాధన. 125) 8 0 0 (0.064
750

500
500

0

$\therefore$ శేషము సున్న కావున $\frac{8}{125}$ అంతమయ్యే దశాంశము.

2. భాగాహార ప్రక్రియ లేకుండానే క్రింది అకరణీయ సంఖ్యలలో వేటిని అంతమయ్యే దశాంశాలుగా రాయగమో, అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశాలుగా రాయగలమో తెలపండి.

i) $\frac{13}{3125}$ ii) $\frac{11}{12}$ iii) $\frac{64}{455}$ iv) $\frac{15}{1600}$ v) $\frac{29}{343}$

vi) $\frac{23}{2^3 5^2}$ vii) $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$ viii) $\frac{9}{15}$ ix) $\frac{36}{100}$ x) $\frac{77}{210}$

సాధన. i) $\frac{13}{3125} = \frac{13}{5\times5\times5\times5\times5}$

$= \frac{13}{5^5} \rightarrow$ అంతమయ్యే దశాంశము

ii) $\frac{11}{12} = \frac{11}{2 \times 2 \times 3} = \frac{11}{2^2\ 3^1} \rightarrow$ అంతం కాని ఆవర్తన దశాంశము

iii) $\frac{64}{455} = \frac{64}{5 \times 7 \times 13} \rightarrow$ అంతం కాని ఆవర్తన దశాంశము

iv) $\frac{15}{1600} = \frac{15}{2^6 \times 5^2} \rightarrow$ అంతమయ్యే దశాంశము

v) $\frac{29}{343} = \frac{29}{7 \times 7 \times 7} = \frac{29}{7^3} \rightarrow$ అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశము

vi) $\frac{23}{2^3\ 5^2} \rightarrow$ అంతమయ్యే దశాంశము

vii) $\frac{129}{2^5\ 5^7\ 7^5} \rightarrow$ అంతం కాని ఆవర్తన దశాంశము

viii) $\frac{9}{15} = \frac{9}{3 \times 5} = 0.6 \rightarrow$ అంతమయ్యే దశాంశము

ix) $\frac{36}{100} = 0.36 \rightarrow$ అంతమయ్యే దశాంశము

x) $\frac{77}{210} = \frac{77}{2 \times 3 \times 5 \times 7} \rightarrow$ అంతం కాని ఆవర్తన దశాంశము.

3. సిద్ధాంతం 1.1 నుఅనుసరించి కింది అకరణీయ సంఖ్యల యొక్క దశాంశ రూపాన్ని తెలపండి.

i) $\frac{13}{25}$ ii) $\frac{15}{16}$ iii) $\frac{23}{2^3 . 5^2}$

iv) $\frac{7218}{3^2 . 5^2}$ v) $\frac{143}{110}$

సాధన. i) $\frac{13}{25} = \frac{13}{5 \times 5} = \frac{13 \times 2^2}{5 \times 5 \times 2^2} = \frac{13 \times 4}{5^2 \times 2^2} = \frac{52}{10^2} = 0.52$

ii) $\frac{15}{16} = \frac{15}{2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{15}{2^4} = \frac{15 \times 5^4}{2^4 \times 5^4} = \frac{15 \times 625}{(10)^4} = \frac{9375}{(10)^4} = 0.9375$

iii) $\frac{23}{2^3\ 5^2} = \frac{23 \times 5}{2^3\ 5^2 \times 5} = \frac{115}{2^3\ 5^3} = \frac{23 \times 5}{2^3\ 5^2 \times 5} = \frac{115}{2^3\ 5^3} = 0.115$

iv) $\frac{7218}{3^2\ 5^2} = \frac{7218}{9 \times 25} = \frac{7218}{225} = 32.08$

v) $\frac{143}{110} = 1.3$

4. కింది కొన్ని వాస్తవ సంఖ్యల దశాంశ రూపాలు ఇవ్వబడినవి. ప్రతి సందర్భంలోనూ ఇవ్వబడిన సంఖ్య అకరణీయమో కాదో తెలపండి. ఆ సంఖ్య అకరణీయమై ఉండి $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయగలిగితే q యొక్క ప్రధాన కారణాంకాలను గూర్చి నీవు ఏమి చెప్పగలవు?

i) 43.123456789

ii) 0.120120012000120000....

iii) $43.\overline{123456789}$

సాధన. i) 43. 123456789 $\rightarrow$ Rational

ii) 0.120120012000120000......... $\rightarrow$ కరణీయ సంఖ్య

iii) $43.\overline{123456789}$ $\rightarrow$ అకరణీయ సంఖ్య.

5. క్రింది వానిని కరణీయ సంఖ్యలుగా నిరూపించండి.

i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

సాధన. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ను ఒక అకరణీయ సంఖ్య అనుకొందాము.

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b}$, ఇందులో a మరియు b పరస్పర ప్రధానాంకాలు $b \neq 0$ గా తీసుకుందాం.

క్రమంలో అమర్చగా,

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b}, \quad \sqrt{2}\ a = b$

ఇక్కడ a మరియు b లు పూర్ణసంఖ్యలు, $\frac{b}{a}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య కావున $\sqrt{2}$ కరణీయ సంఖ్య.

కానీ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్యగా తీసుకున్నాము.

ఇది విరుద్ధం.

ii) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$

సాధన. $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ అనేది ఒక అకరణీయ సంఖ్య అని ఊహించండి.

$\sqrt{3}+\sqrt{5} = \frac{a}{b}$, ఇందు a, b లు పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు $b \neq 0$ అని తీసుకోండి.

కావున $\sqrt{3} = \frac{a}{b} - \sqrt{5}$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా మనకు

$3 = \frac{a^2}{b^2} + 5 - 2\frac{a}{b}\sqrt{5}$

క్రమంలో అమర్చగా

$$\frac{2a}{b}\sqrt{5}=\frac{a^2}{b^2}+5-3\,;\ \frac{2a}{b}\sqrt{5}=\frac{a^2}{b^2}+2$$

$$\frac{2a\sqrt{5}}{b}=\frac{a^2+2b^2}{b^2};\sqrt{5}=\frac{a^2+2b^2}{2ab}$$

a, b లు పూర్ణ సంఖ్యలు కావున, $\frac{a^2+2b^2}{2ab}$ అనేది ఒక అకరణీయసంఖ్య. ఇదే విధంగా $\sqrt{5}$ కూడా ఒక అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది.

ఇది విరుద్ధం.

$\therefore\ \sqrt{3}+\sqrt{5}$ అనేది ఒక కరణీయ సంఖ్య అగును.

iii) $6+\sqrt{2}$

సాధన. $6+\sqrt{2}$ అనేది ఒక అకరణీయ సంఖ్య అని ఊహించండి.

$6+\sqrt{2}=\frac{a}{b}$, ఇందు a, b లు పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు ($b \neq 0$) అని తీసుకోండి.

కావున $6-\frac{a}{b}=\sqrt{2}$

క్రమంలో అమర్చగా $6-\frac{a}{b}=\frac{6b-a}{b}$

a, b లు పూర్ణ సంఖ్యలు కావున, $6-\frac{a}{b}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య.

$\therefore\sqrt{2}$ అనేది అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది. ఇది విరుద్ధం.

$\therefore\ 6+\sqrt{2}$ అనేది అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది.

iv) $\sqrt{5}$

సాధన. $\sqrt{5}$ అనేది ఒక అకరణీయ సంఖ్య అని ఊహించండి.

$\sqrt{5}=\frac{a}{b}$ ఇందు a, b లు పూర్ణసంఖ్యలు మరియు $(b\neq 0)$ అని తీసుకోండి.

a, b లు పూర్ణ సంఖ్యలు కావున, $\frac{a}{b}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య.

$\therefore\sqrt{5}$ అనేది అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది.

ఇది విరుద్ధం.

$\therefore\sqrt{5}$ అనేది కరణీయ సంఖ్య అవుతుంది.

v) $3+2\sqrt{5}$

సాధన. $3+2\sqrt{5}=\frac{a}{b}$ ఇందు a, bలు పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు ($b \neq 0$) అని తీసుకోండి.

కావున $\therefore 3+2\sqrt{5}=\frac{a}{b}$

$2\sqrt{5}=\frac{a}{b}-3;\ 2\sqrt{5}=\frac{a-3b}{b}$

$\therefore \sqrt{5} = \frac{a-3b}{2b}$

a, bలు పూర్ణ సంఖ్యలు కావున, $\frac{a-3b}{2b}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య.

కావున $\sqrt{5}$ అనేది ఒక అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది. ఇది విరుద్ధం.

$3+2\sqrt{5}$ అనేది కరణీయ సంఖ్య అవుతుంది.

2. p, q లు ప్రధానాంకాలు అయితే $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి.

సాధన. $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య అని ఊహించండి.

$\sqrt{p}+\sqrt{q}=\frac{a}{b}$ అనుకుందాం, $\frac{a}{b}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య మరియు $b \neq 0$

$\therefore \sqrt{p} = \frac{a}{b}-\sqrt{q}$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా,

$\left(\sqrt{p}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}-\sqrt{q}\right)^2,\ p = \frac{a^2}{b^2}+q^2-\frac{2a}{b}\sqrt{q}$

క్రమంలో అమర్చగా

$\frac{2a}{b}\sqrt{q} = \frac{a^2}{b^2}+q-p\,;$

$\frac{2a}{b}\sqrt{q} = \frac{a^2+b^2\ q-pb^2}{b^2}$

$\sqrt{q} = \frac{a^2+b^2\ q-pb^2}{2ab}$

a, b లు రెండూ పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు $\frac{a^2+b^2\ q-pb^2}{2ab}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య కావున $\sqrt{q}$ అనేది ఒక అకరణీయ సంఖ్య.

ఇది విరుద్ధం. కావున $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య.

3. కింది వాని విలువలను కనుగొనండి.

సాధన. i) $\log_{25}5$

$\log_{25}5 = x$ అనుకొనుము.

దీని ఘాతరూపము $25^x = 5$

$\Rightarrow (5^2)^x = 5 \Rightarrow 5^{2x} = 5^1$

$\Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

II రెండవ పద్ధతి:

$\log^5{}_{25} = \log^5{}_{5^2} = \frac{1}{2}\log^5{}_5 \quad (\log^{x^m}{}_{x^n} = \frac{m}{n}\log_x{}^x)$

$= \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$

ii) $\log_{81}3$

$\log_{81}3 = x$ అనుకొనుము.

దీని ఘాతరూపము $81^x = 3$

$\Rightarrow (3^4)^x = 3 \Rightarrow 3^{4x} = 3^1$

$\Rightarrow 4x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

iii) i) $\log_2\left(\frac{1}{16}\right)$

$\log_2\left(\frac{1}{16}\right) = x$ అనుకొనుము

దీని ఘాతాంకరూపము $2^x = \frac{1}{16}$

$\Rightarrow 2x = \frac{1}{2^4} \quad \Rightarrow 2^x = 2^{-4}$

$\Rightarrow x = -4$

iv) $\log_7 1$

$\log_7 1 = x$ అనుకొనుము.

దీని ఘాతాంకరూపము $7^x = 1$

$\Rightarrow 7^x = 7^0 \quad \Rightarrow x = 0$

v) $\log_x \sqrt{x}$

$\log_x \sqrt{x} = y$ అనుకొనుము.

దీని ఘాతాంకరూపము $x^y = \sqrt{x}$

$\Rightarrow x^y = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

vi) $\log_2 512$

$\log_2 512 = x$ అనుకొనుము.

దీని ఘాతాంకరూపము $2^x = 512$

$\Rightarrow 2^x = 2^9 \quad \Rightarrow x = 9$

vii) $\log_{10} 0.01$

$\log_{10} 0.01 = x$ అనుకొనుము.

దీని ఘాతాంకరూపము $10^x = 0.01$

$$\Rightarrow 10^x = \frac{1}{100} \Rightarrow 10^x = \frac{1}{10^2}$$

$$\Rightarrow 10^x = 10^{-2} \Rightarrow x = -2$$

viii) $\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{8}{27}\right)$

$\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{8}{27}\right) = y$ అనుకొనుము

దీని ఘాతాంకరూపము

$$\left(\frac{2}{3}\right)^y = \frac{8}{27} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^y = \frac{2^3}{3^3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^y = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \Rightarrow y = 3$$

ix) $2^{2+\log_2 3}$

సాధన. $2^{2+\log_2 3} = 2^2 \text{ x } 2^{2+\log_2 3}$

$= 4 \text{ x } 2^{\log_2 3}$

$= 4 \text{ x } 3$

$= 12$

(i) $a^{m+n} = a^m \text{ x } a^n$

(ii) $a^{\log_a N} = N$

2. కింది వానిని log N రూపంలోనికి సూక్ష్మీకరించి N విలువను కనుగొనండి. (మీరు సంవర్గమాన భూమిగా 10ని తీసుకోవచ్చు. కాని ఏ భూమికైననూ ఫలితాలు తుల్యమవుతాయి.

i) log 2 + log 5 ii) log 16 - log 2 iii) 3 log4

iv) 2 log 3 - 3 log 2 v) log 10 + 2 log 3 - log 2

సాధన. i) log 2 + log5 = log (2 x 5) = log 10 ($\therefore$ log x + log y = log xy)

ii) $\log 16 - \log 2 = \log\left(\frac{16}{2}\right) = \log 8$ ($\therefore \log x - \log y = \log\left(\frac{x}{y}\right)$)

iii) 3 log 64^4 = log 4^3 = log 64 ($\therefore$ m log x = log x^m)

iv) 2 log 3 - 3 log 2

= 2 log 3 - 3 log 2 = log 3^2 - log 2^3 ($\therefore$ m log x = log x^m)

$= \log 9 - \log 8 = \log\left(\frac{9}{8}\right)$ ($\therefore \log x - \log y = \log \frac{x}{y}$)

v) $\log 10 + 2\log 3 - \log 2$

$= \log 10 + \log 3^2 - \log 2$ ($\therefore m\log x = \log x^m$)

$= \log 10 + \log 9 - \log 2$

$= \log (10 \times 9) - \log 2$ ($\therefore \log x + \log y = \log xy$)

$= \log 90 - \log 2 = \log \frac{90}{2} = \log 45.$ ($\therefore \log x - \log y = \log \frac{x}{y}$)

3. $x = \log_2 3$ మరియు $y = \log_2 5$ అని ఇవ్వబడిన కిందివాటి విలువలను x మరియు y లలో తెలపండి.

(i) $\log_2 15$

సాధన. $\log_2 15 = \log_2 (3 \times 5)$

$= \log_2 3 + \log_2 5$

$= x + y$

$\because \log_a xy = \log_a x + \log_a y$

$\log_2 3 = x$ మరియు $\log_2 5 = y$ అని ఇవ్వబడినవి.

(ii) $\log_2 7.5$

సాధన. $\log_2 7.5 = \log_2 \frac{15}{2}$

$= \log_2 15 - \log_2 2$ ($\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$)

$= \log_2 (3 \times 5) - \log_2 2$

$= \log_2 3 + \log_2 5 - \log_2 2$

$= x + y - 1$

iii) $\log_2 60$

సాధన. $\therefore \log_a xyz = \log_a x + \log_a y + \log_a z$

$\log_2 60 = \log_2 (3 \times 4 \times 5)$

$= \log_2 3 + \log_2 4 + \log_2 5$

$= \log_2 3 + \log_2 2^2 + \log_2 5$

$\therefore \log_a x^n = n\log_a x$

$= \log_2 3 + 2\log_2 2 + \log_2 5$

$= x + 2 \times 1 + y$

$= x + 2 + y$

$= 2 + x + y$

iv) $\log_2 6750$

సాధన. $\log_2 6750 = \log_2 (2 \times 3^3 \times 5^3)$

$= \log_2 2 + \log_2 3^3 + 3\log_2 5^3$

$= \log_2 2 + 3\log_2 3 + 3\log_2 5$

$= 1 + 3x + 3y$

$$\begin{array}{r|l}
2 & 6750 \\ \hline
3 & 3375 \\ \hline
3 & 1125 \\ \hline
3 & 375 \\ \hline
5 & 125 \\ \hline
5 & 25 \\ \hline
5 & 5 \\ \hline
 & 1
\end{array}$$

4. కింది వానిని విస్తరించి రాయండి.

i) $\log 1000$ (ii) $\log \left[\frac{128}{625}\right]$ (iii) $\log x^2y^3z^4$ iv) $\log \frac{p^2q^3}{r}$

v) $\log \sqrt{\frac{x^3}{y^2}}$

సాధన. i) $\log 1000 = \log (2^3 \times 5^3)$

$= \log 2^3 + \log 5^3)$

$(\therefore \log xy = \log x + \log y)$

$= 3 \log 2 + 3 \log 5$

$(\therefore \log x^m = m \log x)$

$= 3 (\log 2 + \log 5)$

ii) $\log \left[\frac{128}{625}\right] = \log 128 - \log 625$

$(\therefore \log \frac{x}{y} = \log x - \log y)$

$= \log (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) - \log (5 \times 5 \times 5 \times 5)$

$= \log 2^7 - \log 5^4 = 7 \log 2 - 4 \log 5$

$(\therefore \log x^m = m \log x)$

iii) $\log x^2y^3z^4 = \log x^2 + \log y^3 + \log z^4$

$= 2\log^x + 3 \log^y + 4 \log z$

$(\therefore \log x^m = m \log x)$

iv) $\log \frac{p^2q^3}{r} = \log (p^2q^3) - \log r$

$= \log p^2 + \log q^3 - \log r$

$(\therefore \log xy = \log x + \log y)$

$= 2 \log p + 3 \log q - \log r$

v) $\log \sqrt{\frac{x^3}{y^2}} = \log \left(\frac{x^3}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{x^3}{y^2}\right)$

$(\therefore \log x^m = m \log x)$

$= \frac{1}{2}$ [log x^3 - log y^2)

$(\therefore \log \frac{x}{y} = \log x - \log y)$

$= \frac{1}{2}$ [3 log x - 2 log y]

$(\therefore \log x^m = m \log x)$

5. $x^2 + y^2 = 25xy$ అయిన $2 \log (x+y) = 3 \log 3 + \log x + \log y$ అని నిరూపించండి.

సాధన. $x^2 + y^2 = 25\,xy$

ఇరువైపులా 2 xy కలుపగా

$x^2 + y^2 + 2xy = 25xy + 2xy$

$(x + y)^2 = 27xy$

ఇరువైపులా 'log' తీసుకొనగా

$\log (x + y)^2 = \log (27xy)$

$2 \log (x+y) = \log 27 + \log x + \log y$

$2 \log (x + y) = \log 3^3 + \log x + \log y$

$2 \log (x + y) = 3 \log 3 + \log x + \log y$

6. $\log \left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{1}{2}$ (log x + log y) అయిన $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ విలువను కనుగొనండి.

సాధన. $\log \left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log x + \log y)$

$\log \left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log xy)$

$\log \left(\frac{x+y}{3}\right) = (\log xy)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \left(\frac{x+y}{3}\right) = (xy)^{\frac{1}{2}}$

ఇరువైపులా వర్గము చేయగా

$\left(\frac{x+y}{3}\right)^2 = \left[(xy)^{\frac{1}{2}}\right]^2$

$\frac{x^2 + y^2 + 2xy}{9} = xy$

$x^2 + y^2 + 2xy = 9xy$

$x^2 + y^2 = 9xy - 2xy$

$x^2 + y^2 = 7xy$

ఇరువైపులా xy తో భాగించగా

$$\frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{7xy}{xy} \Rightarrow \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = 7$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 7$$

7. $(2.3)^x = (0.23)^y = 1000$ అయిన $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ విలువను కనుగొనండి.

సాధన. $(2.3)^x = (0.23)^y = 1000$

$(2.3)^x = 1000;$ $\quad$ $(0.23)^y = 1000$

$(2.3)^x = 10^3;$ $\quad$ $(0.23)^y = 103$

$2.3 = 10^{\frac{3}{x}};$ $\quad$ $0.23 = 10^{\frac{3}{y}}$

$2.3 = 10^{\frac{3}{x}};$ $\quad$ $\frac{23}{10} = 10^{\frac{3}{y}}$

$2.3 = 10^{\frac{3}{y}} \text{ x } 10^1$

$= 10^{\frac{3}{y}+1}$

$$\therefore\ 10^{\frac{3}{x}} = 10^{\frac{3}{y}+1}$$

$$\frac{3}{x} = \frac{3}{y} + 1$$

$$3\left(\frac{1}{x}\right) = 3\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{3}\right)$$

$$\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$$

8. $2^{x+1} = 3^{1-x}$ అయిన x విలువను కనుగొనండి.

సాధన. $2^{x+1} = 3^{1-x}$

$$2^x \,.\, 2 = 3 \,.\, 3^{-x}$$

$$2^x \,.\, 2 = 3 \,.\, \frac{1}{3^x}$$

$$2^x \,.\, 3^x = \frac{3}{2}$$

$(2 \text{ x } 3)^x = \frac{3}{2}$

ఇరువైపులా 'log' తీసుకొనగా

$\log (2x3)^x = \log \frac{3}{2}$

$x \log (2x3) = \log 3 - \log 2$

$x [\log 2 + \log 3] = \log 3 - \log 2$

$\therefore x = \frac{\log 3 - \log 2}{\log 2 + \log 3}$

9. (i) log 2 అకరణీయ సంఖ్యనా లేదా కరణీయ సంఖ్యనా? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.

సాధన. log 2 ఒక అకరణీయ సంఖ్య

$\log a^x = x \log a$

(ii) log 100 అకరణీయ సంఖ్యనా లేదా కరణీయ సంఖ్యనా? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.

సాధన. log 100 ఒక అకరణీయ సంఖ్య

$\log 100 = \log 10^2 = 2 \log 10$

ఆధారము 10 అయిన

$2 \log_{10} 10 = 2 \text{ x } 1 = 2$

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

1. పై 'ఇవి చేయండి' లోని q మరియు r ల స్వభావము ఏమిటి?

సాధన. q మరియు r లు ధన పూర్ణ సంఖ్యల జతలు.

2. 1.2 మరియు 0.12 ల గ.సా.భా.ను మీరు కనుగొనగలరా? మీ జవాబును సమర్థించండి.

సాధన. 1.2 మరియు 0.12 ల గ.సాభాను కనుగొనలేము. గ.సా.భా ను ధనపూర్ణ సంఖ్యలకు మాత్రమే కనుగొనగలము.

3. యూక్లిడ్ భాగాహార న్యాయంలోని $a = bq + r$ లో $r=0$ అయిన a, b మరియు q మధ్య సంబంధం ఏమిటి?

సాధన. $a = bq + 0$ లో $r=0$

$r = 0$ అయిన $a = bq$

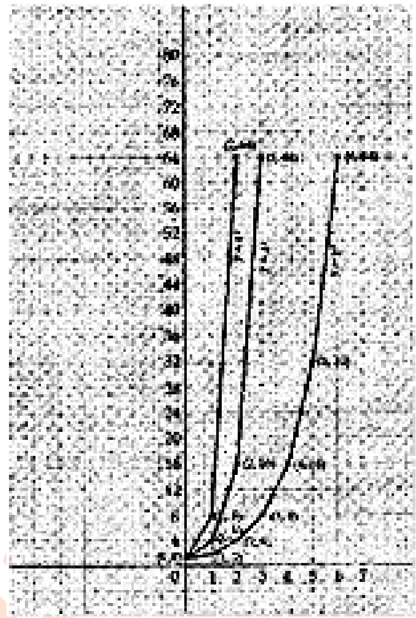
b, a ని భాగించును

b, a కి కారణాంకము.

4) $y=2^x$, $y=4^x$, $y=8^x$ మరియు $y=10^x$ లను ఒకే గ్రాఫ్‌పై గీచి మీ పరిశీలనలను తెల్పండి.

సాధన. $y=2^x$

x	0	1	2	3	4	5	6
y	1	2	4	8	16	32	64



$y=4^x$

x	0	1	2	3	4	5
y	1	4	16	64	256	1024

$y=8^x$

x	0	1	2	3	4	5
y	1	8	64	512	4096	32769

$y=10^x$

x	0	1	2	3	4	5
y	1	10	100	1000	10000	100000

పరిశీలనాంశాలు:

(i) $y=2^x$, $y=4^x$, $y=8^x$ మరియు $y=10^x$ గ్రాఫ్‌లను పరిశీలించిన y యొక్క విలువ ఎల్లప్పుడూ ధనాత్మకంగానే ఉంటుంది.

(ii) వీటిని సూచించు వక్రాలు x-అక్షాన్ని ఎప్పుడూ ఖండించుకోవు.

(iii) ఈ వక్రాలన్నీ (0,1) బిందువు గుండా పోవుచున్నవి.

$y=a^x$ లో y, a మరియు x ల స్వభావమేమిటి? y యొక్క విలువ ఇచ్చినప్పుడు దాని అనురూప x విలువను ఎల్లప్పుడూ కనుగొనగలమా? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.

సాధన. $y=a^x$ లో y, a మరియు x లన్నీ ధనసంఖ్యలు.

x విలువ మారుతున్నకొలది y విలువ గణనీయంగా మారుతుంది.

y యొక్క విలువ ఇచ్చినపుడు దాని అనురూప x విలువను నిర్ణయించడం కష్టమవుతుంది.

ఈ రెండు చరరాశుల మధ్య సంబంధం ఏ నిష్పత్తిలో లేదా భేదాన్నో అనుసరించదు.

5. మీరు ఇంతకుముందు $y=2^x$; $y=4^x$ మరియు $y=10^x$ గీచిన గ్రాఫ్‌లో ఎక్కడైనా log 1 అయిన y = 1 గమనించారా! ఏ సందర్భంలో?

సాధన. (i) $y=2^x$; $y=1$; అయినపుడు

$1=2^x \Rightarrow 1=2^0$

$(\because x=0)$

సంవర్గమాన రూపం:

$\log_4 1=0$

(ii) $y=4^x$; $y=1; 1=4^x \Rightarrow 1=4^0$

$(\because x=0)$

సంవర్గమాన రూపం:

$\log_4 1=0$

(iii) $y=10^x$ when $y=1; 1=10^x \Rightarrow 1=10^0$

$(\because x=0)$

సంవర్గమాన రూపం :

$\log_{10} 1=0$

ఏ ఆధారానికైన log 1 విలువ 0 అగును.

6. $2^1=2,\ 4^1=4,\ 8^1=8$ మరియు $10^1=10$ అని మీకు తెలుసు. వీటి నుండి $\log_2 2, \log_4 4, \log_8 8$ మరియు $\log_{10} 10$ విలువలు ఏమై ఉంటాయి. దీని నుండి మీరు ఏమి సాధారణీకరణం చేస్తారు?

సాధన.

ఘాతరూపం	సంవర్గమానం
$2^1=2 \Rightarrow 2=2^1$;	$\log_2 2=1$
$4^1=4 \Rightarrow 4=4^1$	$\log_4 4=1$
$8^1=8 \Rightarrow 8=8^1$	$\log_8 8=1$
$10^1=10 \Rightarrow 10=10^1$;	$\log_{10} 10=1$

వీటి నుండి $\log_a a=1$ అగును.

7. $\log_{10}10$ వ్యవస్థితం అవుతుందా?

సాధన. $\log_{10}0$ వ్యవస్థితం కాదు.

$\log_{10} 0=a$ అనుకొనుము.

ఘాతాంకరూపం : $10^a=0$

a యొక్క ఏ విలువకూ, 10^a ఎప్పటికీ సున్నా కాదు.

8. $7=2^x$ అయితే $x=\log_2 7$ అని మనకు తెలుసు. అయితే యొక్క విలువ ఎంత? మీ సమాధానాన్ని మరికొన్ని ఉదాహరణలు సమర్థించండి?

పై దానినుండి $a\log_a N$ ను ఏ విధంగా సాధారణీకరిస్తారు?

సాధన. $7 = 2^x$

$x = \log_2 7$

$2^{\log_2 7} = 2^x (x = \log_2 7)$

$= 7 (2^x = 7)$

$a^{\log_a N} = N$

<u>ఇవి చేయండి</u>

1. $a=bq+r$ అయ్యే విధంగా ధనపూర్ణ సంఖ్యలు a మరియు b లకు అనుగుణంగా q మరియు r ల విలువలను కనుగొనుము.

i) $a = 13$; $b = 3$

సాధన. $a = bq + r$

$13 = 3q + r$

$q = 4$, అయినప్పుడు $13=3(4) + r$

$\Rightarrow r = 13 - 12 = 1$

$q = 3$, అయినప్పుడు $13 = 3(3) + r$

$\Rightarrow r = 13 - 9 = 4$

$q = 2$, అయినప్పుడు $13 = 3(2) + r$

$\Rightarrow r = 13 - 6 = 7$

$q = 1$, అయినప్పుడు $13 = 3(1) + r \Rightarrow$

$r = 13 - 3 = 10$

ii) $a = 8$; $b = 80$

సాధన. $a = bq + r$

$8 = 80q + r$

$a = 8$; $b = 80$ అయ్యేటట్లు $a = bq + r$ ను తృప్తిపరిచే q మరియు r ధనపూర్ణ విలువలు ఉండవు.

iii) $a = 125$; $b = 5$

సాధన. $a = bq + r$

$125 = 5q + r$

When

$q = 5$, అయినప్పుడు $125 = 5(5) + r$

$\Rightarrow r = 125 - 25 = 100$

$q = 10$, అయినప్పుడు $125 = 5(10) + r$

$\Rightarrow r = 125 - 50 = 75$

$q = 15$, అయినప్పుడు $125 = 5(15) + r$

$\Rightarrow r = 125 - 75 = 50$

$q = 20$, అయినప్పుడు $125 = 5(20) + r$

$\Rightarrow r = 125 - 100 = 25$

iv. $a = 132$; $b = 11$

సాధన. $a = bq + r$

$132 = 11q + r$

$q = 4$, అయినప్పుడు $132 = 11(4) + r$

$\Rightarrow r = 132 - 44 = 88$

$q = 6$, అయినప్పుడు $132 = 11(6) + r$

$\Rightarrow r = 132 - 66 = 66$

$q = 8$, అయినప్పుడు $132 = 11(8) + r$

$\Rightarrow r = 132 - 88 = 4$

$q = 10$, అయినప్పుడు $132 = 11(10) + r$

$\Rightarrow r = 132 - 110 = 22$

2. యూక్లిడ్ భాగహార న్యాయాన్ని ఉపయోగించి క్రింది వాటి యొక్క. గ.సా.భా.ను కనుగొనుము.

i) 50 మరియు 70

సాధన. 70ను 50తే భాగించగా శేషం 20 వస్తుంది. దీనిని

$70 = 50 \times 1 + 20$

పై దానిలోని భాజకం 20 మరియు శేషము 20 పై యూక్లిడ్ భాగహార న్యాయాన్ని అనువర్తింపజేయగా దానిని

$20 = 10 \times 2 + 0$

పై దానిలో శేషము '0' వచ్చింది. ఇంకా ఈ సాధనను ముందుకు కొనసాగించలేము.

10 అనేది సంఖ్యలు 50 మరియు 70 లను నిశ్శేషంగా భాగిస్తుంది.

వాటి గ.సా.భా. 10

ii) 96 మరియు 72.

సాధన. 96ను 72చే భాగించగా శేషము 24 వస్తుంది. దీనిని

$96 = 72 \times 1 + 24$

పై దానిలోని భాజకం 72 మరియు శేషము 2 పై యూక్లిడ్ భాగహార నియమాన్ని అనువర్తింపజేయగా దానిని

$72 = 24 \times 3 + 0$

పై దానిలోని శేషము ‘0’ వచ్చింది. ఇంకా ఈ సాధనను కొనసాగించలేము.

24 అనేది సంఖ్యలు 96 మరియు 72 లను నిశ్శేషంగా భాగిస్తుంది.

వాటి గ.సా.భా. 24

iii) 300 మరియు 550

సాధన. 550ను 300చే భాగించగా శేషము 250 వస్తుంది.

దీనిని

$550 = 300 \times 1 + 250$

పై దానిలో భాజకం 300 మరియు శేషము 250పై యూక్లిడ్ భాగహార న్యాయాన్ని అనువర్తింపజేయగా దానిని

$300 = 250 \times 1 + 50$

పై దానిలో భాజకం 250 మరియు శేషము 50పై యూక్లిడ్ భాగహార న్యాయాన్ని అనువర్తింపజేయగా దానిని

$250 = 50 \times 5 + 0$

పై దానిలో శేషము ‘0’ వచ్చింది. ఇంకా ఈ సాధనను ముందుకుకొనసాగించలేము.

50 అనేది 300 మరియు 550 లను నిశ్శేషంగా భాగిస్తుంది.

iv) 1860 మరియు 2015

సాధన. 2015ను 1860చే భాగించగా వచ్చు శేషము 155.

దీనిని

$2015 = 1860 \times 1 + 155$

పై దానిలో భాజకం 1860 మరియు శేషము 155పై యూక్లిడ్ భాగహార న్యాయాన్ని అనువర్తింపజేయగా దానిని

$1860 = 155 \times 2 + 0$

పై దానిలో శేషము ‘0’ వచ్చింది. ఇంకా ఈ సాధనను ముందుకు కొనసాగించలేము.

155 అనేది 1860 మరియు 2015లను నిశ్శేషంగా భాగిస్తుంది.

$\therefore$ వాటి గ.సా.భా. 155

3. 2310ను ప్రధాన కారణాంకాల లబ్దంగా రాయండి. ఈ సంఖ్యను నీ స్నేహితులు ఏ విధంగా కారణాంకాల లబ్ధంగా రాసారో చూడండి. నీవు చేసినట్లుగానే వారు కూడా చేశారా? చివరి ఫలితాన్ని నీ స్నేహితుల ఫలితంతో సరిచూడుము. దీని కొరకు 3 లేదా 4 సంఖ్యలను తీసుకొని ప్రయత్నించుము. నీవు ఏమి గమనిస్తావు?

సాధన. $2310 = 2 \times 1155$

$= 2 \times 5 \times 231$

$= 2 \times 5 \times 3 \times 77$

$= 2 \times 5 \times 3 \times 7 \times 11$

$= 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$

రాజు, రవి మరియు వేణు ముగ్గురు స్నేహితులు. వారు 2310ను ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా ఇలా రాశారు.

రాజు : $2310 = 231 \times 10$

$= 3 \times 77 \times 2 \times 5$

$= 3 \times 7 \times 11 \times 2 \times 5$

రవి : $2310 = 3 \times 770$

$= 3 \times 10 \times 77$

$= 3 \times 10 \times 11 \times 7$

$= 3 \times 2 \times 5 \times 11 \times 7$

వేణు : $2310 = 7 \times 330$

$= 7 \times 3 \times 110$

$= 7 \times 3 \times 11 \times 10$

$= 7 \times 3 \times 11 \times 2 \times 5$

పైన ముగ్గురు స్నేహితులు చేసిన లెక్క వేరుగా ఉన్నా ఫలితం మాత్రం ఒక్కటే.

పరిశీలన: ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యను ప్రధానాంకముల లబ్ధంగా రాయవచ్చును, మరియు ప్రధాన కారణాంకాల క్రమం ఏదైనప్పటికీ ఈ కారణాంకాల లబ్ధము ఏకైకము.

4. ఇవ్వబడిన సంఖ్యల జతల యొక్క క.సా.గు. మరియు గ.సా.భా.లను ప్రధాన కారణాంక పద్ధతి ఆధారంగా కనుగొనుము.

(i) 120 , 90

సాధన. $120 = 2 \times 60$

$= 2 \times 2 \times 30$

$= 2 \times 2 \times 3 \times 10$

$= 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 5$

$= 2^3 \times 3^1 \times 5^1$

$90 = 2 \times 45$

$= 2 \times 3 \times 15$

$= 2 \times 3 \times 3 \times 5$

$= 2^1 \times 3^2 \times 5^1$

(120, 90)ల గ.సా.భా. $= 2^1 \times 3^2 \times 5^1 = 6 \times 5 = 30$

(120, 90)ల క.సా.గు. $= 2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 8 \times 9 = 5$

$= 360$

(ii) 50, 60

సాధన. $50 = 2 \times 25$

$= 2 \times 5 \times 5 = 2^1 \times 5^2$

$60 = 2 \times 30$

$= 2 \times 2 \times 15$

$= 2 \times 2 \times 3 \times 5$

$= 2^2 \times 3^1 \times 5^1$

(50, 60) ల గ.సా.భా $= 2^1 \times 5^1 = 10$

(50, 60)ల క.సా.గు. $= 2^2 \times 5^2 = 3^1$

$= 4 \times 25 \times 3 = 300$

(iii) 37 , 49

సాధన. $37 = 37^1 \times 1^1$

$49 = 1 \times 7 \times 7 = 1 \times 7^2$

(37, 49) ల గ.సా.భా. $= 1$

(37, 49)ల క.సా.గు. $= 37^1 \times 7^2$

$= 37 \times 49 = 1813$

5. క్రింది అంతమొందే దశాంశాలను అకరణీయ సంఖ్యలుగా $\frac{p}{q}, q \neq 0$ మరియు p, q లు సాపేక్ష ప్రధానాంకాలు రాయండి.

i) 15.265 ii) 0.1255 iii) 0.4 iv) 23.34 v) 1215.8

ఈ ప్రక్రియలో అకరణీయ సంఖ్యల హారాలను గురించి ఏమి చెప్పగలరు?

సాధన. i) 15.265 $= \frac{15265}{1000} = \frac{3053 \times 5}{200 \times 5}$

$= \frac{3053}{2 \times 100} = \frac{3053}{2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5}$

$= \frac{3053}{2^3 \times 5^2}$

ii) 0.1255 $= \frac{1255}{10000} = \frac{251\times5}{2000\times5} = \frac{251}{2000}$

$= \frac{251}{2\times2\times2\times2\times5\times5\times5} = \frac{251}{2^4\times5^3}$

iii) 0.4 $= \frac{4}{10} = \frac{2\times2}{5\times2} = \frac{2}{5^1}$

iv) 23.34 $= \frac{2334}{100} = \frac{1167\times2}{50\times2} = \frac{1167}{50}$

$= \frac{1167}{2\times5\times5} = \frac{1167}{2^1\times5^2}$

v) 1215.8 $= \frac{12158}{10} = \frac{6079\times2}{5\times2} = \frac{6079}{5^1}$

<u>ముగింపు:</u>

ఏ అకరణీయ సంఖ్య యొక్క దశాంశ రూపమైనా అంతమొందే దశాంసం అయినపుడు ఆ అకరణీయ సంఖ్య యొక్క హారాన్ని 10 యొక్క ఘాతంగా గల సంఖ్యగా రాయవచ్చు. 10 యొక్క ప్రధాన కారణాంకములు 2 మరియు 5 మాత్రమే.

6. కింది అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{p}{q}$ రూపంలో ఉన్నాయి. ఇందులో q యొక్క రూపం 2^n5^m మరియు ఇందులో n, m లు రుణేతర పూర్ణ సంఖ్యలు అయిన వీటిని దశాంశ రూపంలోనికి మార్చండి.

i) $\frac{3}{4}$ ii) $\frac{7}{25}$ iii) $\frac{51}{64}$ iv) $\frac{14}{25}$ v) $\frac{80}{100}$

సాధన. i) $\frac{3}{4} = \frac{3}{2^2} = \frac{3\times5^2}{2^2\times5^2} = \frac{75}{(2\times5)^2} = \frac{75}{10^2} = 0.75$

ii) $\frac{7}{5} = \frac{7}{5\times5} = \frac{7\times2^3}{5^2\times2^2} = \frac{7\times4}{10^2} = \frac{28}{10^2} = 0.28$

iii) $\frac{51}{64} = \frac{51}{2\times2\times2\times2\times2\times2} = \frac{51\times5^6}{2^6\times5^6} = \frac{796875}{10^6} = 0.796875$

iv) $\frac{14}{25} = \frac{14}{5^2} = \frac{14\times2^2}{5^2\times2^2} = \frac{56}{100} = 0.56$

v) $\frac{80}{100} = \frac{80}{5^2\times2^2} = \frac{80}{10^2} = \frac{80}{100} = 0.8$

7. కింది అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశాలుగా రాయండి. భాగఫలంలో ఆవర్తనం చెందే అంకెల సమూహాన్ని కనుగొనండి.

i) $\frac{1}{3}$ ii) $\frac{2}{7}$ iii) $\frac{5}{11}$ iv) $\frac{10}{13}$

సాధన. i) $\frac{1}{3}$

3) 1.0000000 (0.3333333
9
10
9
10
9
10
9
10
9
10
9
10
9
1

$\frac{1}{3} = 0.3333....... = 0.\overline{3}$

$\therefore \frac{1}{3}$ ఒక అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశం. భాగఫలంలో '3' అనే అంకె ఆవర్తనం చెందింది.

ii) $\frac{2}{7}$

సాధన. 7) 2.0000000 (0.28517428
14
60
56
40
35
50
49
10
7
30
28
20
14
60
56
4

$\frac{2}{7} = 0.28571428......... = 0.\overline{285171428}$

ఇది ఒక అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశం భాగఫలంలో '285714' అంకెల సమూహం ఆవర్తనం చెందింది.

iii) $\frac{5}{11}$

సాధన. 11) 5.0000000 (0.4545

44
60
55
50
44
60
55
5

$\frac{5}{11} = 0.4545.............. = 0.\overline{45}$

ఒక అంతం కాని ఆవర్తన దశాంశం. భాగఫలంలో '45' అంకెల సమూహం ఆవర్తనం చెందింది.

iv) $\frac{10}{13}$

సాధన. 13) 10.0000 (0.76923076

91
90
78
120
117
30
26
40
39
100
91
90
78
12

$\frac{10}{13} = 0.76923076.............. = 0.\overline{76923076}$

ఒక అంతం కాని ఆవర్తన దశాంశం. భాగఫలంలో '769230' అంకెల సమూహం ఆవర్తనం చెందింది.

8. p=2, p=5 మరియు a^2 = 1, 4, 9, 25, 36, 49, 64 మరియు 81 అయిన పైన నిరూపించిన ప్రవచనమును ఈ విలువలకు సరిచూడండి.

సాధన. సందర్భం – I

P = 2 ఒక ప్రధాన సంఖ్య : P a^2 ను భాగిస్తుంది.

ఇక్కడ a^2 = 1, 9, 25, 49, 81 లకు ప్రధాన కారణాంకం కాదు.

కావున a ను p భాగించదు.

సందర్భం – II

1, 9, 25, 49, 81 లకు P = 5 ప్రధాన కారణాంకం కాదు.

కావున a ను p భాగించదు.

P = 5, 25 కు ప్రధాన కారణాంకము.

∴ కావున a ను p భాగించును.

9. క్రింది సమీకరణాలలో భూములు ఏ ఘాతాంకాలకు అవి సత్యాలో రాయండి.

i) $7 = 2^x$

సాధన. $2^x = 7$

x యొక్క ఏ విలువకూ ఇది సత్యము కాదు.

ii) $100 = 5^b$

సాధన. $5^b = 100$

$5^b = 5^2 \times 2^2$

x యొక్క ఏ విలువకూ ఇది సత్యము కాదు.

iii) $\frac{1}{81} = 3^c$

సాధన. $3^c = \frac{1}{81}$

$3^c = (81)^{-1}$, $3^c = \left(3^4\right)^{-1}$

$3^c = 3^4 \Rightarrow c = -4$ కు ఇది సత్యము.

iv) $100 = 10^x$

సాధన. $10^z = 100$

$10^z = 10^2$

$\therefore z = 2$ కు ఇది సత్యము.

v) $\frac{1}{256} = 4^a$

సాధన. $4^a = \frac{1}{256}$

$4^a = (256)^{-1}$

a యొక్క ఏ విలువకూ ఇది సత్యము కాదు.

10. క్రింది లబ్ధాల సంవర్గమానాలకు రెండు సంవర్గమానాల మొత్తంగా రాయండి.

i) 35 x 46

సాధన. సూ॥ $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

log (35x 46) = log 35 + log 46

ii) 235 x 437

సాధన. సూ॥ $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

log (235 x 437) = log 235 + log 437

iii) 2437 x 3568

సాధన. సూ॥ $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

log (2437 x 3568) = log 2437 + log 3568

11. క్రింది లబ్ధాలను $\log_a x + \log_a y$ రూపంలో రాయండి.

i)8 x 32 ii) 49 x 343 iii) 81 x 729

i) log (8 x 32) = log 8 + log 32

ii) log (49 x 343) = log 49 + log 343

iii) log (81 729) = log 81 + log 729

12. కింది భాగఫలాలను $\log_a x - \log_a y$ రూపంలో రాయండి.

i) 8 ÷ 64 ii) 81÷ 27

సాధన.

i) 8 ÷ 64 = log 8 - log 64 $\left(\log_a \frac{m}{n} = \log_a{}^m - \log_a{}^n\right)$

ii) 81÷ 27 = log 81 - log 27

13. కింది ఘాతాంక రూపాలను సంవర్గమాన రూపాలలో రాయండి.

(i) $4^3 = (2^2)^3$ ii) $36^2 = (6^2)^2$

సాధన. (i) $\log 4^3 = \log(2^2)^3$

$= \log(2^6) = 6\log 2$

(ii) $\log 36^2 = \log(6^2)^2$

$= \log(6^4) = 4\log 6$

14. క్రింది వాటి సంవర్గమానాలకు రెండు సంవర్గమానాల భేదంగా రాయండి.

i) $\frac{23}{24}$

సాధన. సూ॥ $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

$\log\left(\frac{23}{34}\right) = \log 23 - \log 34$

ii) $\frac{373}{275}$

సాధన. సూ॥ $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

$\log\left(\frac{373}{275}\right) = \log 373 - \log 275$

iii) $4525 \div 3734$

సాధన. సూ॥ $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

$= \log(4525 - 3734)$

iv) $5055 \div 3303$

సాధన. సూ॥ $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

$\log(5055 \div 3303) = \log\left(\frac{5055}{3303}\right)$

$= \log\ 5055 - \log 3303$

12. $\log_a x^n = n\log_a x$ ఉపయోగించి క్రింది ఘాతసంఖ్యల సంవర్గమానాలను గూర్చి రాయండి.

i) $\log_2 7^{25}$

సాధన. సూత్రము : $\log_a x^n = n\log_a x$

$\log_2 7^{25} = 25\log_2 7$

ii) $\log_5 8^{50}$

సాధన. సూత్రము : $\log_a x^n = n\log_a x$

$\log_5 8^{50} = 50\log_5 8$

iii) $\log 5^{23}$

సాధన. సూత్రము : $\log_a x^n = n \log_a x$

$$\log 5^{23} = 23 \log 5$$

iv) $\log 1024$

సాధన. సూత్రము : $\log_a x^n = n \log_a x$

$$\log 1024 = \log 2^{10} = 10 \log 2$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 1024 \\ \hline 2 & 512 \\ \hline 2 & 256 \\ \hline 2 & 128 \\ \hline 2 & 64 \\ \hline 2 & 32 \\ \hline 2 & 16 \\ \hline 2 & 8 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline & 2 \end{array}$$

$$1024 = 2^{10}$$

<u>ఉదాహరణలు</u>

1. q ఏదైనా ఒక పూర్ణసంఖ్య అయినప్పుడు, ప్రతి ధన సరి పూర్ణ సంఖ్య 2q రూపంలో మరియు ప్రతి ధన బేసి సంఖ్య 2q+1 రూపంలో ఉంటుందని చూపుము.

సాధన. a ఏదైనా ధన పూర్ణ సంఖ్య, b=2 అనుకొనుము. యూక్లిడ్ భాగహార శేష విధిని అనుసరించి a=2q+r, ఏదైనా పూర్ణ సంఖ్య $q \geq 0$ కు మరియు r=0 లేదా r=1 అవుతుంది. ఎందుకనగా $0 \leq r < 2$ కాబట్టి, a=2q లేదా 2q+1 అవుతుంది.

a అనేది 2q రూపంలో ఉంటే అది సరిపూర్ణ సంఖ్య అవుతుంది. ఇంకా ఏదైనా ధనపూర్ణ సంఖ్య సరి లేదా బేసి సంఖ్య అవుతుంది. a అనేది సరిపూర్ణ సంఖ్య కానియెడల అది బేసి పూర్ణ సంఖ్య అయ్యే అవకాశం ఉంటుంది మరియు అది 2q+1 రూపంలో ఉంటుంది.

2. q ఏదైనా ఒక పూర్ణ సంఖ్య అయిప్పుడు, ప్రతి ధనబేసి సంఖ్య 4q+1 లేదా 4q+3 రూపంలో ఉంటుందని చూపుము.

సాధన. a ఏదైనా ఒక ధన బేసి పూర్ణ సంఖ్య అనుకొందాం. భాగహార శేష విధిని a మరియు b=4 పై అనువర్తింపచేయగా

$0 \leq r < 4$ కావున శేషంను 0,1,2, మరియు 3 అవుతాయి.

వీటి ఆధారంగా a యొక్క విలువలు 4q లేదా 4q+1 లేదా 4q+2 లేదా 4q+3 (q భాగఫలానికి కావచ్చు. 4q లేదా 4q+2 లు 2చే నిశ్శేషంగా భాగించబడతాయి. కావున అవి బేసి సంఖ్యలు అయ్యే అవకాశం లేదు. అందువల్ల బేసి సంఖ్య a యొక్క రూపం 4q+1 or 4q+3 అవుతుంది.

3. n ఒకసహజ సంఖ్యగా గల సంఖ్య 4^n తీసుకొండి. n యొక్క ఏ విలువకైనా 4^n సంఖ్య 'సున్న' అంకెతో అంతమౌతుందో లేదో సరిచూడండి.

సాధన. n సహజ సంఖ్యగా గల సంఖ్య 4^n సున్నతో అంతం కావాలంటే అది '5' చే నిశ్శేషంగా భాగించబడాలి. అంటే 4^n సంఖ్య యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్దంలో 5 ఒక ప్రధాన సంఖ్యగా వుండాలి. కాని ఇది సాధ్యం కాదు. ఎందువలన అనగా $4^n = (2)^{2n}$ అందుచే 4^n యొక్క ప్రధానకారణాంకాల లబ్దంలో '5' లేనందున, n ఏ సహజ సంఖ్య విలువకైననూ 4^n అనే సంఖ్య 'సున్న'తో అంతము కానేరదు.

4. 12 మరియు 18ల యొక్క గ.సా.కా. మరియు క.సా.గులను ప్రధాన కారణాంకాల పద్ధతిలో కనుగొనుము.

సాధన. $12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3^1$

$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2^1 \times 3^2$

(12, 18) ల గ.సా.భా. $= 2^1 \times 3^1 = 6$

(సంఖ్యల యొక్క సామాన్య ప్రధాన కారణాంకముల కనిష్ఠ ఘాతాల లబ్ధం)

(12, 18) ల క.సా.గు. $= 2^2 \times 3^2 = 36$

(సంఖ్యల యొక్క ప్రధాన కారణాంకములలో ప్రతి దాని గరిష్ట ఘాతాల లబ్ధం)

(12,18)ల గ.సా.భా $\times$ (12, 18)ల క.సా.గు $= 12 \times 18$

5. నిర్వచింపబడిన సిద్ధాంతాల ఆధారంగా, భాగహారం చేయకుండానే క్రింది అకరణీయ సంఖ్యలు అంతమయ్యే దశాంశాలో, అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశాలో తెలపండి.

i) $\frac{16}{125}$ ii) $\frac{25}{32}$ iii) $\frac{100}{81}$ iv) $\frac{41}{75}$

సాధన. i) $\frac{16}{125} = \frac{16}{5 \times 5 \times 5} = \frac{16}{5^3}$ = (అంతమయ్యే దశాంశం)

ii) $\frac{25}{32} = \frac{25}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{25}{2^5}$ = (అంతమయ్యే దశాంశం)

iii) $\frac{100}{81} = \frac{100}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{100}{3^4}$ = (అంతం కాని ఆవర్తన దశాంశం)

iv) $\frac{41}{75} = \frac{41}{3 \times 5 \times 5} = \frac{41}{3 \times 5^2}$ = (అంతం కాని ఆవర్తన దశాంశం)

6. కింది అకరణీయ సంఖ్యలను భాగహారం చేయకుండానే దశాంశరూపంలో రాయండి.

i) $\frac{35}{50}$ ii) $\frac{21}{25}$ iii) $\frac{7}{8}$

సాధన. i) $\frac{35}{50} = \frac{7 \times 5}{2 \times 5 \times 5} = \frac{7}{2 \times 5} = \frac{7}{10^1} = 0.7$

ii) $\frac{21}{25} = \frac{21}{5\times 5} = \frac{21\times 2^2}{5\times 5\times 2^2} = \frac{21\times 4}{5^2\times 2^2} = \frac{84}{10^2} = 0.84$

iii) $\frac{7}{8} = \frac{7}{2\times 2\times 2} = \frac{7}{2^3} = \frac{7\times 5^3}{\left(2^3\times 5^3\right)} = \frac{7\times 125}{\left(2\times 5^3\right)} = \frac{875}{\left(10^3\right)} = 0.875$

7. $\sqrt{2}$ ను కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి.

సాధన. నిరూపణ: ఈ నిరూపణ 'పరోక్ష పద్ధతి' ద్వారా చేయుచున్నందున మనం నిరూపించవలసిన ఫలితానికి విరుద్ధంగా $\sqrt{2}$ అనేది ఒక అకరణీయ సంఖ్య అని భావిద్దాం.

ఇది అకరణీయం అయితే, r మరియు s అనే రెండు పూర్ణ సంఖ్యలు $(s \neq 0)$ $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$ అయ్యేటట్లు వ్యవస్థితం అవుతుంది.

ఒకవేళ r మరియు s లకు 1కాకుండా ఏదైనా సామాన్య కారణాంకం ఉంటే, ఆ సామాన్య కారణాంకం చేత భాగిస్తే మనకు $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, ఇందులో a మరియు b లు పరస్పర ప్రధానాంకాలుగా వస్తుంది.

దీని నుండి b $\sqrt{2}$ = a అవుతుంది.

ఇరువైపులా వర్గం చేసి, క్రమంగా అమర్చగా, మనకు $2b^2 = a^2$ వస్తుంది. అంటే a^2 ను 2 భాగిస్తుంది.

ఇప్పుడు సిద్ధాంతం −1.6ను బట్టి a^2 ను 2 భాగించినందున a ను కూడా ఇది భాగిస్తుంది.

అందుచే మనం తిరిగి a = 2c, c అనేది ఒక పూర్ణసంఖ్యగా రాయవచ్చు.

ఇందులో a విలువను ప్రతిక్షేపించగా, మనకు $2b^2 = 4c^2$ అంటే $b^2 = 2c^2$ వస్తుంది.

అంటే b^2 ను 2 భాగిస్తుంది మరియు b ని 2 భాగిస్తుంది. (సిద్ధాంతం −1.6లో p=2)

అందువలన a మరియు b లకు 2 ఒక సామాన్య కారణాంకం అయినది.

a, b లు పరస్పర ప్రధానాంకాలు మరియు 1 తప్ప వీటికి ఎటువంటి ఉమ్మడి కారణాంకాలు లేనందున మనం ప్రతిపాదించి $\sqrt{2}$ అనేది అకరణీయం అనే భావన విరుద్ధతకు దారి తీస్తుంది. అందుచే $\sqrt{2}$ అనేది కరణీయ సంఖ్యగా నిరూపించవచ్చును.

8. $5-\sqrt{3}$ ని ఒక కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి.

సాధన. మనం నిరూపించాల్సిన భావనకు విరుద్ధంగా, $5-\sqrt{3}$ ని ఒక అకరణీయ సంఖ్యగా ఊహించండి.

అంటే $5-\sqrt{3}=\frac{a}{b}$ ఇందులో a, b లు పరస్పర ప్రధానాంకాలు మరియు $(b \neq 0)$

కావున $5-\frac{a}{b}=\sqrt{3}$

సమీకరణంను తారుమారు చేస్తే, మనకు $\sqrt{3} = 5-\frac{a}{b} = \frac{5b-a}{b}$ అని వస్తుంది.

a, b లు పూర్ణ సంఖ్యలు కావున మనకు $5-\frac{a}{b}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది. కావున $\sqrt{3}$ కూడా అకరణీయ సంఖ్యయే అగును. ఇది అసత్యం.

ఎందుకంటే $\sqrt{3}$ అనేది ఒక కరణీయ సంఖ్య.

ఈ భావన ఏర్పడడానికి, మనం ఊహించిన ప్రతిపాదన $5-\sqrt{3}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య అనే భావ తప్పు. అంటే ఇది ఒక విరోధాభాసం.

కావున $5-\sqrt{3}$ అనేది కరణీయ సంఖ్య అని మనం చెప్పవచ్చును.

ఎందుకంటే $\sqrt{2}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య అనే సత్యానికి విరుద్ధభావన అందుచే ఇది ఒక విరోధాబాసం.

కావున మనం $3\sqrt{2}$ అనేది ఒక కరణీయ సంఖ్య అని చెప్పవచ్చును.

9. $3\sqrt{2}$ అనేది ఒక కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి.

సాధన. మనం నిరూపించవలసిన భావనకు విరుద్ధంగా $3\sqrt{2}$ అనేది ఒక అకరణీయ సంఖ్యగా ఊహించండి.

a, b లు పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు మరియు $(b \neq 0)$ అయ్యేటట్లు $3\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ అవుతుంది.

క్రమంలో అమర్చగా, మనకు $\sqrt{2}=\frac{a}{3b}$ అని వస్తుంది.

ఇందులో 3, a మరియు b లు పూర్ణ సంఖ్యలు కావున $\frac{a}{3b}$ అనేది ఒక అకరణీయ సంఖ్య అందుచే $\sqrt{2}$ కూడా ఒక అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది. ఇది అసత్యం.

ఎందుకంటే $\sqrt{2}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య అనే సత్యానికి విరుద్ధభావన అందుచే ఇది ఒక విరోధాబాసం.

కావున మనం $3\sqrt{2}$ అనేది కరణీయ సంఖ్య అని చెప్పవచ్చును.

10. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ అనేది ఒక కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి.

సాధన. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ అనేది ఒక అకరణీయ సంఖ్య అని ఊహించండి.

$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\frac{a}{b}$, ఇందు a, b లు పరస్పర ప్రధానాంకములు మరియు $b\neq 0$ అని తీసుకొండి.

కావున, ... అగును.

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా, మనకు

$2=\frac{a^2}{b^2}+3-\frac{2a}{b}\sqrt{3}$ అగును.

క్రమంగా అమర్చగా

$$\frac{2a}{b}\sqrt{3}=\frac{a^2}{b^2}+3-2$$

$$=\frac{a^2}{b^2}+1$$

అంటే $\sqrt{3}=\frac{a^2+b^2}{2ab}$

a, b లు పూర్ణ సంఖ్యలు కావున, $\frac{a^2+b^2}{2ab}$ అనేది ఒక అకరణీయ సంఖ్య ఇదే విధంగా $\sqrt{3}$ కూడా ఒక అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది. ఇది అసత్యం. ఎందుకంటే $\sqrt{3}$ అనేది ఒక కరణీయ సంఖ్య అనే సత్యానికి విరుద్ధభావన. ఇది ఒక విరోధాభాసం. కావున $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ అనేది ఒక కరణీయ సంఖ్య అగును.

11. $\log\frac{343}{125}$ ను విస్తరించండి.

సాధన. $\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$ అని మనకు తెలుసు.

కావున $\log=\frac{343}{125}=\log 343-\log 125$

$$=\log 7^3-\log 5^3$$

$\log_a x^m=m\log_a x$ కావున

$\because 3\log 7-3\log 5$

కావున $\log\frac{343}{125}=3(\log 7-\log 5)$

12. 2 log 3 + 3 log 5 - 5 log 2 ను ఒకే సంవర్గమానంగా రాయండి.

సాధన. 2 log 3 + 3 log 5 - 5 log 2

$=\log 3^2+\log 5^3-\log 2^5$ ($m\log_a x=\log_a x^m$ కావున)

$=\log 9+\log 125-\log 32$

$=\log(9\times125)-\log 32$ ($\log_a x+\log_a y=\log_a xy$ కావున)

$=\log 1125-\log 32$

$=\log\frac{1125}{32}$ ($\because\log_a x-\log_a y=\log_a\frac{x}{y}$ కావున)

13. $3^x=5^{x-2}$ సమీకరణాన్ని సాధించండి.

సాధన. $3^x=5^{x-2}$

Taking "logarithm" both sides $\log_{10}3^x=\log_{10}5^{x-2}$

We know that $\log_a x^n=n\log_a x$

$x\log_{10}3=(x-2)\log_{10}5$

$x \log_{10} 3 = x \log_{10} 5 - 2\log_{10} 5$

$x \log_{10} 5 = x \log_{10} 3 - 2\log_{10} 5$

$x(\log_{10} 5 - \log_{10} 3) = 2\log_{10} 5$

$\therefore\ x = \dfrac{2\log_{10} 5}{\log_{10} 5 - \log_{10} 3}$

14. $2\log 5 + \frac{1}{2}\log 9 - \log 3 = \log x$ అయితే x విలువను కనుగొనండి.

సాధన. $\log x = 2\log 5 + \frac{1}{2}\log 9 - \log 3$

$= \log 5^2 + \log 9^{\frac{1}{2}} - \log 3$

$= \log 25 + \log \sqrt{9} - \log 3$

$= \log 25 + \log 3 - \log 3$

$\log x = \log 25$

$\therefore\ x = 25$

ప్రయత్నించండి

1. 'n' మరియు 'm' ఏవేని సహజ సంఖ్యలకు $3^n \times 4^m$ యొక్క ఫలిత సంఖ్య 0 లేదా 5తో అంతం కాదని చూపుము.

సాధన. n మరియు m ఏవేని సహజ సంఖ్యలకు $3^n \times 4^m$ యొక్క ఫలిత సంఖ్య 0 లేదా 5తో అంతం కావలెనన్న 2 మరియు 5లచే భాగించాలి.

అంటే $3^n \times 4^m$ సంఖ్య యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్దములో 5 మరియు 2లు ఒక ప్రధాన సంఖ్యగా ఉండాలి.

కాని ఇది సాధ్యం కాదు.

ఎందువలననగా $3^n \times 4^m = 3^n \times (2)^{2m}$

అందుచే 2 మరియు 3లు ప్రధాన కారణాంకాలు $3^n \times 4^m$ కు అవుతాయి.

5 అనేది $3^n \times 4^m$ యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్దములో లేదు.

n మరియు m ఏవేని సహజ సంఖ్యలకు $3^n \times 4^m$ యొక్క ఫలిత సంఖ్య 0 లేదా 5 తో అంతం కాదు.

2. ఏ సహజ సంఖ్య 'n' కు అయినా 12^n అను సంఖ్య 0 లేదా 5తో అంతము కాదని నిరూపించండి.

సాధన. n సహజ సంఖ్యగా గల సంఖ్య 12^n అను సంఖ్య సున్నతో అంతం కావాలంటే అది '5'చే నిశ్శేషంగా భాగించబడాలి. అంటే 12^n సంఖ్య యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంలో 5 ఒక ప్రధాన సంఖ్యగా ఉండాలి. కానీ ఇది సాధ్యం కాదు.

$12^n = (2 \times 2 \times 3)^n = 2^n \times 2^n \times 3^n$

అందుచే 12^n యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంలో 5 లేనందున n ఏ సహజ సంఖ్య విలువకైననూ 12^n అనే సంఖ్య సున్నతో లేదా 5తో అంతం కాదు.

2. క్రింది వాటిని ఘాతరూపంలో వ్రాసి తద్వారా చరరాసులను నిర్ణయించండి.

i) $\log_2 32 = x$

సాధన. $\log_2 32 = x$

ఘాతాంక రూపం : $2^x = 32$

$2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5$

ii) $\log_5 625 = y$

సాధన. $\log_5 625 = y$

ఘాతాంక రూపం : $5^y = 625$

$5^y = 5^4 \Rightarrow y = 4$

iii) $\log_{10} 10000 = z$

సాధన. $\log_{10} 10000 = z$

ఘాతాంక రూపం : $10^z = 10000$

$10^z = 10^4 \Rightarrow z = 4$

iv) $\log_7 \frac{1}{343} = -a$

సాధన. $\log_7 \frac{1}{343} = -a$

ఘాతాంక రూపం : $7^{-a} = \frac{1}{343}$

$7^{-a} = \frac{1}{7^3}$

$7^{-a} = 7^{-3}$

$-a = -3 \Rightarrow a = 3$

3. క్రింది వాటి విలువలను కనుగొనండి.

(i) $\log_2 32$

సాధన. $\log_2 32 = \log_2 2^5$

$= 5\log_2 2$ (i) $\log_a x^n = n\log_a x$

$= 5 \times 1 = 5$ (ii) $\log_a a = 1$

ii) $\log_c \sqrt{c}$

సాధన. $\log_c \sqrt{c} = \log_c c^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{2}\log_c$ (i) $\log_a x^n = n\log_a x$

$=\frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$ (ii) $\log_a a = 1$

iii) $\log_{10} 0.001$

సాధన. $\log_{10} 0.001 = \log_{10}\left(\frac{1}{1000}\right)$

$= \log_{10}\left(\frac{1}{10^3}\right)$ (i) $\log_a x^n = n\log_a x$

$= \log_{10} 10^{-3}$

$= -3\log_{10} 10$

$= -3\times 1 = -3$ (ii) $\log_a a = 1$

iv) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27}$

సాధన. $\log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27} = \log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^3$

$= 3\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)$

$= 3\times 1 = 3$