సంకీర్ణ సంఖ్యలు

1. $z_1 = (3, 5), z_2 = (2, 6)$ అయితే $z.z_2$ కనుగొనుము

Solution : -

Given $z_1 = 3 + 5i \qquad z_2 = 2 + 6i$

$z_1 - z_2 = (3+5i)(2+6i) = 6 + 28^0C + 30i^2 = 6 - 30 + 28i$

$z_1 \,.\, z_2 = -24 + 28i = (-24, 28)$

2. $(-6, 5) + (10, -4)$ కి సంకలన విలోమాలను వ్రాయండి.

3. $z_1 = (6, -3), z_2 = (2, -1)$ అయితే z_1 / z_2 కనుగొనుము

Solution : -

$z_1 = 6 + 3i \quad z_2 = 2 - i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6+3i}{z-i} = \frac{(6+3i)(2+i)}{4-i^2} = \frac{8+12i+3i^2}{5}$$

$$1 + \frac{12}{5}i = \left(1, \frac{12}{5}\right)$$

4. $z = \cos\theta + i\sin\theta$ అయితే $z - \frac{1}{2}$ కనుగొనుము

Solution : -

$$z = \cos\theta + i\sin\theta \, \frac{1}{z} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} \times \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta}$$

$$z - \frac{1}{z} = 2i\sin\theta$$

5. **(i)** $(3,4)$ **(ii)** $(\sin\theta, \cos\theta)$ **(iii)** $(7,24)$ **(iv** $(-2,1)$ కి గుణకార విలోమాలను వ్రాయండి.

Solution : -

(i) L $z = 3+4i$

z గుణకార విలోమం= $\frac{1}{3+4i} = \frac{3-4i}{(3+4i)(3-3i)}$

$= \frac{3-4i}{25} = \left(\frac{3}{25}, \frac{-4}{25}\right)$

(ii) $z = \sin\theta + i\cos\theta$

z గుణకార విలోమం $z = \frac{1}{\sin\theta + 1\cos\theta} = \frac{\sin\theta - i\cos\theta}{(\sin\theta - i\cos\theta)}$

$= \frac{\sin\theta - i\cos\theta}{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = \sin\theta - i\cos\theta$

6. $\frac{4-2i}{1-2i}$ ని $a+ib$ రూపంలో వ్రాయండి

Solution: -

Let $\frac{4-2i}{1-2i} = a+ib$

$\frac{(4-2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = a+ib \Rightarrow a+ib = \frac{4+6i-4i^2}{1-4i^2}$

$\therefore a+ib = \frac{8+6i}{5} \Rightarrow a = \frac{8}{5} \quad b = \frac{6}{5}$

7. $a=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $b=\cos\beta+i\sin\beta$ అయితే $\frac{1}{2}\left(ab+\frac{1}{ab}\right)$ కనుగొనుము

Solution : -

$$ab=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)$$

$$=\cos\alpha\cos\beta+i\sin\beta\cos\alpha+i\sin\alpha\cos\beta+i^2\sin\alpha\sin\beta$$

$$=(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\ +i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$$

$$ab=(\cos\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$$

$$\frac{a}{ab}=\frac{\cos(\alpha+\beta)-i\sin(\alpha+\beta)}{\{\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)\}\{\cos(\alpha+\beta)-\sin(\alpha+\beta)\}}$$

$$\frac{1}{ab}=\cos(\alpha+\beta)-i\sin(\alpha+\beta)$$

$$\frac{1}{2}\left(ab+\frac{1}{ab}\right)=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cancel{i\sin}(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)-\cancel{i\sin}(\alpha+\beta)\right]$$

$$=\cos(\alpha+\beta)$$

8. $3+4i$ యొక్క వర్గ మూలాన్ని కనుగొనుము

Solution : -

$$\sqrt{3+4i}=x+iy$$

ఇరు వైపులా వర్గం చేయగా

$$3+4i=x^2+i^2y^2+2ixy$$

$$3+4i=(x^2-y^2)+i(2xy)$$

$$x^2-y^2=3:2xy=4$$

$$x^2+y^2=\sqrt{(x^2-y^2)+4x^2y^2}$$

$$=\sqrt{9+16}\ \Rightarrow x^2+y^2=5:x^2-y^2-y^2=3$$

$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$y^2 = y \Rightarrow y = \pm 1$

$\sqrt{3+4i} = \pm(2+i)$

9.. $z = 3-5i$ అయితే అ $z^3 - 10z^2 + 58z - 136 = 0$ అనిచూపుము

$z^3 = (3-5i)^3 = 3^3 - (5i)^3 - 3(3)(5i)(3-5i)$

$= 27 + 125i - 135i - 225 = -198 - 10i$

$z^2 (3-5i)^2 = 9 + 25i^2 - 30i = -16 - 30i$

L.H.S $= z^3 - 10z^2 + 58z - 136$

$= -198 - 10i - 10\{-16-30i\} + 58\{3-5i\} - 136$

$334 - 334 + 10i - 10i = 0 = RHS$

10. $x + iy = \dfrac{3}{2+\cos\theta + i\sin\theta}$ అయితే $x^2 + y^2 = 4x - 3$ అనిచూపుము

Solution : - $x + iy = \dfrac{3\{2+\cos\theta - i\sin\theta\}}{(2+\cos\theta)^2 - (i\sin\theta)^2} \Rightarrow x + iy = \dfrac{3\{2+\cos\theta - \sin\theta\}}{4+\cos^2\theta + 4\cos\theta + \sin^2\theta}$

$\therefore x + iy = \dfrac{3\{2+\cos\theta - i\sin\theta\}}{5+4\cos\theta}$

$x = \dfrac{3(2+\cos\theta)}{5+4\cos\theta}\; y = \dfrac{-3\sin\theta}{5+4\cos\theta}$

LHS $x^2 + y^2 = \left\{\dfrac{3(2+\cos\theta)}{5+4\cos\theta}\right\}^2 + \left\{\dfrac{-3\sin\theta}{5+4\cos\theta}\right\}^2$

$= \dfrac{9\{4+\cos^2\theta + 4\cos\theta + \sin^2\theta\}}{(5+4\cos\theta)^2}$

$$= \frac{9\left\{\cancel{5+4\cos\theta}\right\}}{(5+4\cos\theta)^{\cancel{2}}} = \frac{9}{5+4\cos\theta}$$

RHS $4x - 3 = \dfrac{12(2+\cos\theta)}{5+4\cos\theta} - 3 = \dfrac{24+\cancel{12\cos\theta} - 15 - \cancel{12\cos\theta}}{5+4\cos\theta}$

$$RHS = \frac{9}{5+4\cos\theta}$$

$\therefore$ LHS = RHS

11 $, \dfrac{2-i}{(1-2i)^2}, \dfrac{-2-11i}{25}$, లు సంయుగ్మాలు అని చూపుము

Solution : -

$$a+ib + \frac{2-i}{(1-2i)^2} = \frac{2-i}{1+4i^2-4i}$$

$$= \frac{2-i}{-3-4i} \times \frac{-3+4i}{-3+4i} = \frac{-6+8i+3i-4i^2}{9-16i^2}$$

$$a+ib = \frac{-2+11i}{25}$$

$\dfrac{-2+11i}{25}$ యొక్క సంయుగ్మం $\dfrac{-2-11i}{25}$

12. క్రింది వానిని మాప ఆయామ రూపంలో వ్రాయండి.

(I) $1-i$ **(ii)** $1+i\sqrt{3}$ **(iii)** $-\sqrt{3}+i$ **(iv)** $-1-i\sqrt{3}$

Solution : -

$$1-i=r\{\cos\theta+i\sin\theta\}$$

$$r\cos\theta=1\, r\sin\theta=-\ 1$$

$$(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2=2\Rightarrow r=\sqrt{2}$$

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad \sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Principal value of $\theta=\pi/4 \quad \{\because -\pi\le\theta\le\pi\}$

$$\therefore 1-i=\sqrt{2}\left\{\cos i-\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin(-\pi/4)\right\}$$

(ii) $$1+i\sqrt{3}=r\{\cos\theta+i\sin\theta\}$$

$$\therefore r\ \cos\theta=1\quad r\ \sin\theta=\sqrt{3}$$

$$(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2=1+\left(\sqrt{3}\right)^2$$

$$r^2=4\Rightarrow r=2$$

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore$ Principal value of $\theta=\dfrac{\pi}{3}$

$$\therefore 1+i\sqrt{3}=2\left\{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\pi/3\right\}$$

(iii) $$-\sqrt{3}+i=r\{\cos\theta+i\sin\theta\}$$

$$r\cos\theta=-\sqrt{3}\qquad r\ \sin\theta=1$$

$$(r\cos\theta)^2(r\sin\theta)^2=3+1\Rightarrow r=2$$

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ \ \sin\theta = \frac{1}{2}$

$\therefore$ Principal value of $\theta = \frac{s\pi}{6}$

$\therefore -\sqrt{3} + i = 2\left\{\cos\frac{s\pi}{6} + i\sin\frac{s\pi}{6}\right\}$

(iv) $-1 - i\sqrt{3} = r\{\cos\theta + i\sin\theta\}$

$r\cos\theta = -1 \quad r\sin\theta = -\sqrt{3}$

$(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = (-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$

$\cos\theta = -\frac{1}{2}; \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Prove of $\theta = -2\pi/3$

$\therefore -1 - i\sqrt{3} = 2\left\{\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right\}$

13. $-2i(3+i)(2+4i)(1+i)$ ని సూక్ష్మీకరించి మాపవిలులను కనుగొనుము

Solution : -

$-2i\{3+i\}(2+4i)(1+i) = -2i(3+i)\{2+2i+4i+4i^2\}$

$= -2i(3+i)(-2+6i) = -2i\{-6+18i-2i-6\}$

$= -2i\{-12+16i\} = 24i - 32i^2 = 32 + 24i$

$|32 + 24i| = \sqrt{(32)^2 + (24)^2} = \sqrt{1024+576} = 40$

14. $z \neq 0$ అయితే $Arg\ z + Arg\ \overline{z}$ కనుగొనుము

If $Arg\ z = \theta$ then $Arg\overline{z} = -\theta$

$\therefore Argz + Arg\ \overline{z} = \theta - \theta = 0$

15 $z_1 = -1\ and\ z_2 = -i$ అయితే $Arg(z_1\, z_2)$ కనుగొనుము

Solution: -

$z_1 = -1 \ \Rightarrow Argz_1 = \pi \ \{\because -1 = \cos\pi + i\sin\pi\}$

$z_2 = -i \ \Rightarrow Arg\ z_2 = -\pi/2 \{\because -i = \cos -\pi/2 + 1\sin(-\pi/2)\}$

$Arg(z_1\, z_2) = Argz_1 + Arg\ z_2 = \pi - \pi/2 = \pi/2$

16 $z_1 = -1 : z_2 = i$ అయితే $Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ కనుగొనుము

Solution : - $Argz_1 = \pi \ \{\because -1 = \cos\pi + 1\sin\pi\}$

$Arg\ z_2 = \pi/2 \ \{\because i = \cos\pi/2 + i\sin\pi/2\}$

$Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Argz_1 - Argz_2 = \pi - \pi/2 = \pi/2$

17. ని సూక్ష్మీకరించి మాపవిలులను కనుగొనుము

(i) $\frac{(2+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}$ **(ii)** $\frac{(1+i)^3}{(2+i)(1+2i)}$

Solution: $\frac{(2+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)} = \frac{-2+4i-4i-8}{-3+i-3i+i^2}$

$= \frac{-5}{-4-2i} = \frac{5}{2+i} = \frac{5(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{\cancel{5}(2-i)}{\cancel{5}}$

$$\left|\frac{(2+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}\right| = |2-i| = \sqrt{5}$$

(ii) $$\frac{(1+i)^3}{(2+i)(1+2i)} = \frac{1+i^3+3i(1+i)}{2+5i+2i^2} = \frac{1-i+3i-3}{5i}$$

$$= \frac{-2+2i}{5i} \times \frac{5i}{5i} = \frac{-10i+10i^2}{25i^2}$$

$$\frac{-10-10i}{-25} = \frac{2+2i}{5}$$

$$\left|\frac{(1+i)^3}{(2+i)(1+2i)}\right| = \sqrt{\frac{4}{25}+\frac{4}{25}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

18. $(1-i)(2-i)(3-i)......(1-ni) = x = iy$ **అయితే** $2.5.10..................(1+n^2) = x^2+y^2$ **అనిచూపుము**

Solution: -

$$(1-i)(2-i)(3-i).......(1-ni) = x-iy$$

$$|(1-i)(2-i)(3-i).......(1-ni)| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\sqrt{2}\ \ \sqrt{5}\ \ \sqrt{10}\ ....\sqrt{1+n^2} = \sqrt{x^2+y^2}$$

ఇరు పైపులా వర్గం చేయగా

$$2.5.10.......(1+n^2) = x^2+y^2$$

19 $\frac{z+1}{z+i}$ యొక్క వాస్తవ భాగం 1 అయితే z బిందు పథం కనుగొనుము

Solution: - $z = x + iy$

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{x+iy+1}{x+iy+1}\right\} = 1 \Rightarrow \mathrm{Re}\frac{\{(x+1)+iy\}\{x-i(y+1)\}}{x^2+(y+1)^2} = 1$$

వాస్తవ భాగం 1

$$\frac{x(x+1)-i^2 iy(y+1)}{x^2+(y+1)^2} = 1$$

$$\cancel{x^2} + x + \cancel{y^2} + y = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 2y + 1 \Rightarrow x - y = 1$$

20 **If** $z = x + iy$ *and* $|z| = 1$ అయితే z బిందు పథం కనుగొనుము

Solution : -

$$|z| = 1 \Rightarrow |x+iy| = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 1$$

ఇరు వైపులా వర్గం చేయగా $x^2 + y^2 = 1$

21 $(z-1)$ యొక్క ఆయమం $\frac{\pi}{2}$ అయితే z బిందు పథం కనుగొనుము

Solution : -

Let $z = x + iy$ $Amp(z-1) = \pi/2$

Amp $\{x+iy-1\} = \pi/2 \Rightarrow Amp\{(x-1)+iy\} = \pi/2$

$$\tan^{-1}\left(\frac{y}{x-1}\right) = \pi/2 \Rightarrow \frac{y}{x-1} = \frac{\sin\pi/2}{\cos\pi/2}$$

$$\Rightarrow x - 1 = 0$$

22 **Arg** $\overline{z}_1$ **,** $Arg\ z_2$ లు వరుసగా $\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}$ అయితే $(Arg\ z_1 + Arg\ z_2)$ కనుగొనుము

Solution : -

$$Arg(\overline{z}_1) = \frac{\pi}{5} \Rightarrow Arg\ z_1 = -\pi/5$$

$$Arg\ z_2 = \pi/3 \quad Arg\ z_2 = \pi/3$$

$$\therefore Arg\ z_1 + Argz_2 = -\pi/5 + \pi/3 = \frac{-3\pi + 5\pi}{15} = \frac{2\pi}{15}$$

23. ఆర్గాండ్ తలం లో $(2+2i), -2-2i -2\sqrt{3}+2\sqrt{3}\,i$ బిందువులు సమబహు త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయనిచూపుము

Solution : -

$A(2,2)\ B(-2,-2)\ C(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ అనుకోండి.

$$AB = \sqrt{(2+2)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{32}$$

$$BC = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}+2\right)^2 + \left(2\sqrt{3}+2\right)^2} = \sqrt{32}$$

$$CA = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}-2\right)^2 + \left(2\sqrt{3}-2\right)^2} = \sqrt{32}$$

$$AB = BC = CA$$

ABC బిందువులు త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయి

25 ఆర్గాండ్ తలం లో $7+7i, 7-7i$ బిందువు ల నుకలిపే రేఖ ను లంబ సమద్విఖండన రేఖ ను కనుగొనుముఏర్పరుస్తాయని చూపుము

Solution: -

A(7, 7) B (7, - 7) బిందువు లు $(7+7i)$ *and* $(7-7i)$ లను సూచిస్తాయనుకోండి.

AB ం మధ్య బిందువు $(7,0)$

$AB=\frac{-7-7}{7-7}$

AB వాలు $\frac{-7-7}{7-7}$

$\therefore$ లంబరేఖ వాలు= 0

లంబ సమద్విఖండన రేఖా సమీకరణం $(y-0)=0(x-7)$

$y=0$

25 ఆర్గాండ్ తలం లో $z+i, 4+3i, 2+5i, 3i$ బిందువులు చతురస్రాన్ని ఏర్పరుస్తాయనిచూపుము

Solution: -

$A(2,1)\ B(4,3)\ C(2,5)\ D(0,3)$

$AB=\sqrt{(4-2)^2+(3-1)^2}=\sqrt{8}$ $BC=\sqrt{(2-4)^2+(5-3)^2}=\sqrt{8}$

$CD=\sqrt{(0-2)^2+(3-5)^2}=\sqrt{8}$ $AD=\sqrt{(0-2)^2+(3-1)^2}=\sqrt{8}$

$AC=\sqrt{(4-2)^2+(5-1)^2}=4$ $BD=\sqrt{(0-4)^2+(3-3)^2}=4$

$AB=BC=CD=AD$ *and* $AC=BD$

ABCD బిందువులు చతురస్రాన్ని ఏర్పరుస్తాయి

26 ఆర్గాండ్ తలం లో $-2+7i, \frac{-3}{2}+\frac{1}{2}i, 4-3i, \frac{7}{2}(1+i)$ బిందువులు రాంబస్ ను ఏర్పరుస్తాయనిచూపుము

Solution ; -

$A(-2,7)\ BC\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)C(4,-3)\ D\left(\frac{7}{2},\frac{7}{2}\right)$ces

$AB=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}+1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-7\right)^2}=\sqrt{\frac{170}{4}}\ CD=\sqrt{\left(\frac{7}{2}-4\right)^2+\left(\frac{7}{2}+3\right)^2}=\sqrt{\frac{170}{4}}$

$BC=\sqrt{\left(4+\frac{3}{2}\right)^2+\left(-3-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{170}{4}}$

$AD=\sqrt{\left(\frac{7}{2}+2\right)^2+\left(\frac{7}{2}-7\right)^2}=\sqrt{\frac{170}{4}}$

$AC=\sqrt{(4+2)^2+(-3-7)^2}=\sqrt{136}$

$AC=\sqrt{(4+2)^2+(-3-7)^2}=\sqrt{136}$

$AB=BC=CD=AD$ and $AC\neq BD$

ABCD బిందువులు రాంబస్ ను ఏర్పరుస్తాయి