AREAS UNDER CURVES

Very Short Answer Questions

క్రింద ఇచ్చిన వక్రాలతో ఏర్పడిన ప్రదేశాల వైశాల్యాలు కనుగొనుము

1. i) y = cos x , y = $1-\frac{2x}{\pi}$.

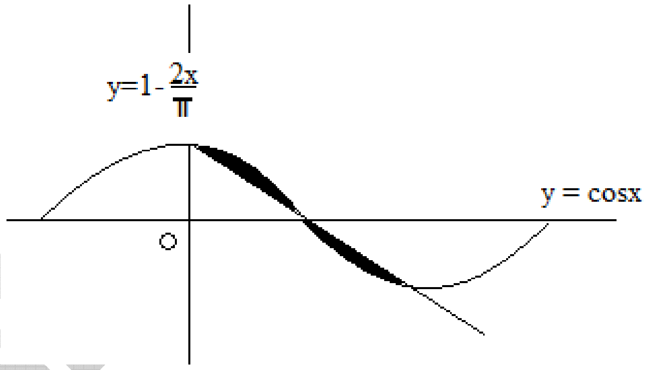
Sol: ఇచ్చిన వక్రాలు

$y = \cos x$ ....(1)

$y = 1-\frac{2x}{\pi}$ ------ (2)

(1) , (2) లనుండి

$\cos x = 1-\frac{2x}{\pi}$



$\Rightarrow x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$

$\Rightarrow x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ ల వద్దఖండించుకుంటున్నాయి.

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, లో (1) > (2) , $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ లో (2) > (1)

sakshieducation.com

కావల్సిన వైశాల్యం $= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (y \text{ of (1)-y of (2)})dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (y \text{ of (2)-y of (1)})dx =$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x - 1 + \frac{2x}{\pi}\right)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(1 - \frac{2x}{\pi} - \cos x\right)dx$$

$$= \left(\sin x - x + \frac{x^2}{\pi}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} + \left(x - \frac{x^2}{\pi} - \sin x\right)_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= 2 - \frac{\pi}{2}$$

2. y = cos x , y = sin2x , x = 0, $x = \frac{\pi}{2}$

Sol: y = cos x ---- (1)

y = sin 2x ---- (2)

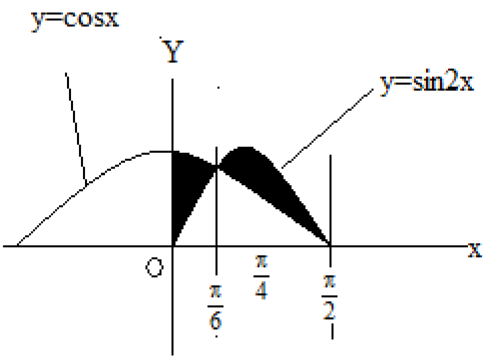
(1), (2) ల నుండి, cosx = sin2x

cosx-2sinx cosx=0

cosx=0 and 1-2sinx =0

$x = \frac{\pi}{2}, \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

వక్రాలు $x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}$ ల వద్దఖండించుకుంటున్నాయి



sakshieducation.com

కావల్సిన వైశాల్యం =

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos x-\sin 2x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-\cos x)dx$$

$$=\left(\sin x+\frac{\cos 2x}{2}\right)_0^{\frac{\pi}{6}}+\left(-\frac{\cos 2x}{2}-\sin x\right)_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-\left(0+\frac{1}{2}\right)\right]-\left[\left(\frac{1}{2}-1\right)-\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\text{sq.units}$$

3. $\mathbf{y=x^3+3,\ y=0, x=-1, x=2}$

Sol Sol: $\mathbf{y=x^3+3,\ y=0, x=-1, x=2}$

[-1.2] లో ఇచ్చిన వక్రాలు అవిచ్ఛిన్నాలు మరియు y>0 .

కావల్సిన వైశాల్యం = $\int_{-1}^{2} y\,dx$

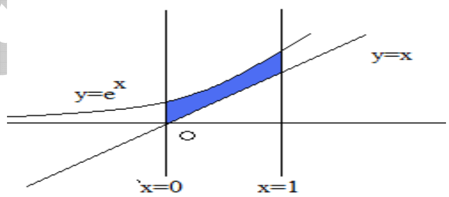
$$=\int_{-1}^{2}(x^3+3)\,dx=\left(\frac{x^4}{4}+3x\right)_{-1}^{2}$$

$$=\left(\frac{2^2}{4}+3.2\right)-\left(\frac{(-1)^4}{4}+3(-1)\right)=12\frac{3}{4}\text{sq. units}$$

4. $\mathbf{y=e^x, y=x, x=0, x=1}$

Sol: ఇచ్చిన వక్రం $\mathbf{y=e^x}$ మరియు రేఖలు

y =x, x=0 and x=1.



కావల్సిన వైశాల్యం $=\int_0^1(e^x-x)\,dx=\left(e^x-\frac{x^2}{2}\right)_0^1$

sakshieducation.com

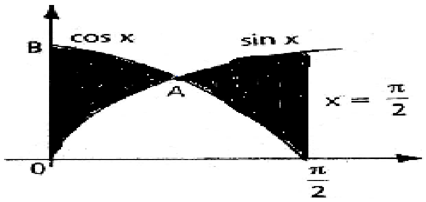
$$= \left(e - \frac{1}{2}\right) - (1-0) = e - \frac{3}{2}$$

5. $y = \sin x,\ y = \cos x\ ;\ x = 0\ ,\ x = \frac{\pi}{2}$

Sol. ఇచ్చిన వక్రాలు $y = \sin x$----(1) ,

$y = \cos x$ --- (2)

(1) , (2) ల నుండి $\cos x = \sin x \quad \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$



$(0, \frac{\pi}{4})$ లో $\cos x > \sin x$

$(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ లో $\cos x < \sin x$

కావల్సిన పైశాల్యం =

$$\int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x)\,dx = (\sin x + \cos x)_0^{\pi/4} - (\sin x + \cos x)_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} - 1) = 2(\sqrt{2} - 1) \text{ sq.units}.$$

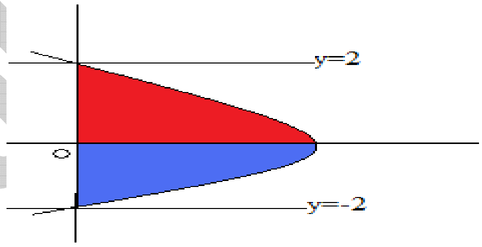
6 $x = 4 - y^2,\ x = 0.$

Sol: $x = 4 - y^2$---(1)

$y=0$ ఐతే $x=4$.

$x = 4 - y^2$ పరావలయము **x** అక్షాన్ని A(4,0).వద్ద ఖండిస్తోంది

కావల్సిన పైశాల్యం = AQPAప్రదేశము



కావల్సిన పైశాల్యం = 2 . OAPO పైశాల్యం

$$= 2\int_0^2 (4 - y^2)\,dy = 2\left(4y - \frac{y^3}{3}\right)_0^2$$

$$= 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = 2.\frac{16}{3} = \frac{32}{3} \text{ sq.units}$$

7. **Find the area enclosed within the curve** $|x| + |y| = 1$.

Sol: $|x|+|y|= 1$ సమీకరణం $\pm x \pm y = 1$ అనే నాల్గు రేఖ లను సూచిస్తోంది. మరియు ఈ రేఖలు ఒక చతురస్రాన్ని ఏర్పరుస్తాయి.

$x + y = 1$ రేఖ నుండి $\Rightarrow y = 1 - x$

పై రేఖ X అక్షము ను (1, 0).వద్ద ఖండిస్తోంది.

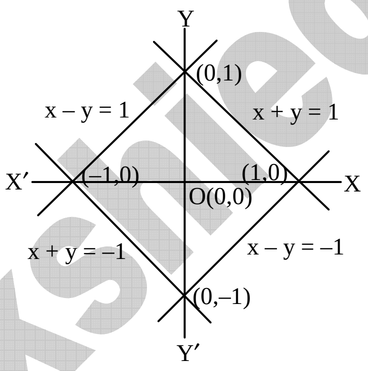
ఇచ్చిన వక్రం నిరూపక అక్షములదృష్ట్యా సౌష్టవం కావున

$|x|+|y| = 1$ చే ఏర్పడే వైశాల్యం

$$= 4\int_0^1 (1-x)dx$$

$$= 4\left(x - \frac{x^2}{2}\right)_0^1$$

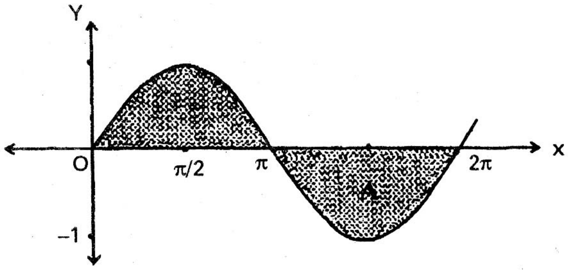
$$= 4 - \frac{4}{2} = 2\text{sq.units.}$$



sakshieducation.com

8. f(x) = sin x వక్రం **(0, 2π)** అంతరంలో ఏర్పరిచే వైశాల్యం కనుగొనుము.

Sol:



$f(x) = \sin x$,

$[0, \pi]$ లో $\sin x \geq 0$

$[\pi, 2\pi]$ లో $\sin x \leq 0$

కావల్సిన వైశాల్యం = $\int_1^{\pi} \sin x\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x)\, dx$

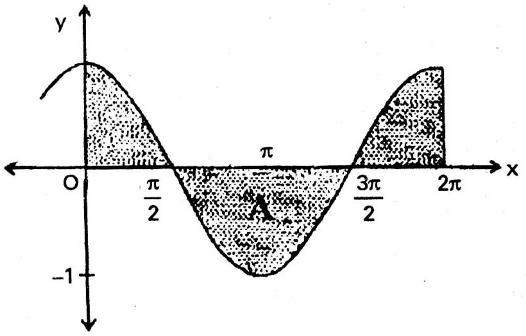
$(-\cos x)_0^{\pi} [\cos x]_{\pi}^{2\pi}$

$= -\cos\pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos\pi$

$= -(-1) + 1 + 1 - (-1) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

9. f(x) = cos x వక్రం **[0, 2π].** అంతరంలో ఏర్పరిచే వైశాల్యం కనుగొనుము.

Sol: $\cos\ x \geq 0$ in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \pi\right)$ and ≤ 0 in $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$



కావల్సిన వైశాల్యం

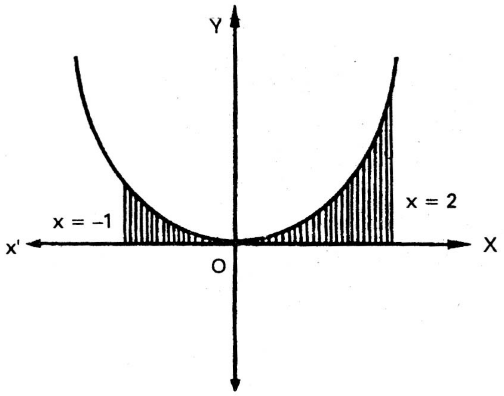
$= (\sin x)_0^{\pi/2} + (-\sin x)_{\pi/2}^{3\pi/2} + (\sin x)_{3\pi/2}^{2\pi}$

$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 - \sin\frac{3\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} + \sin 2\pi - \sin\frac{3\pi}{2}$

$= 1 - 0 - (-1) + 1 + 0 - (-1)$

$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$

10. $y = x^2$, **పరావలయం X– అక్షం తో x =-1, x =2 రేఖల మధ్య చేసే వైశాల్యం కనుగొనుము.**



Sol:

కావల్సిన వైశాల్యం= $\int_{-1}^{2} x^2 dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)_{-1}^{2}$

$= \frac{1}{3}\left(2^3 - (-1)^3\right) = \frac{1}{3}(8+1) = \frac{9}{3} = 3$

11. $y = x^2 - 4x + 3$.పరావలయం **y** =o రేఖ తో ఏర్పరిచే వైశాల్యం కనుగొనుము.

Sol:

$y = x^2 - 4x + 3,\ y = 0$ ల నుండి

$x^2 - 4x + 3 = 0, (x-1)(x-3) = 0$, x = 1,3

$1 < x < 3. \Rightarrow y < 0$

కావల్సిన వైశాల్యం $= \int_1^3 -(x^2 - 4x + 3)\,dx$

sakshieducation.com

$$= \int_1^3 \left(-x^2 + 4x - 3\right) dx$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right)_1^3$$

$$= (-9 + 18 - 9) - \left(-\frac{1}{3} + 2 - 3\right)$$

$$= \frac{10}{2} - 2 = \frac{4}{3}$$

sakshieducation.com

Short Answer Questions

1. $x = 2 - 5y - 3y^2$, $x = 0$.

Sol:

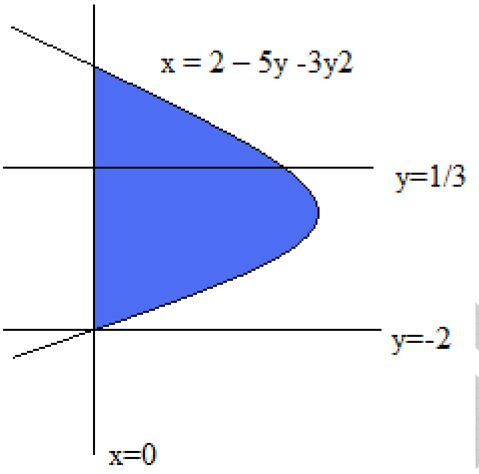
$x = 2 - 5y - 3y^2$ and $x = 0$

ఇచ్చిన వక్రాలను సాధించగా

$2 - 5y - 3y^2 = 0,$

$3y^2 + 5y - 2 = 0$

$\Rightarrow (y + 2)(3y - 1) = 0 \Rightarrow y = -2 \text{ or } \frac{1}{3}$



కావల్సిన వైశాల్యం $= \int_{-2}^{\frac{1}{3}} \left(2 - 5y - 3y^2\right) dy$

$= \left(2y - \frac{5}{2}y^2 - y^3\right)_{-2}^{\frac{1}{3}}$

$= \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{2}.\frac{1}{9} - \frac{1}{27}\right) - \left(-4 - \frac{5}{2}.4 + 8\right)$

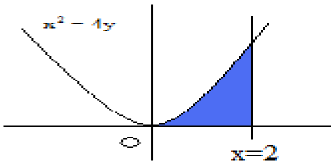
$= \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{8} - \frac{1}{27}\right) + 6$

$= \frac{36 - 15 - 2 + 324}{54} = \frac{343}{54}$ sq. units

2 $x^2 = 4y,\ x = 2\ , y = 0$

Sol. ఇచ్చిన వక్రం $x^2 = 4y$ మరియు రేఖలు

X=2 , y=0 i.e., x axis

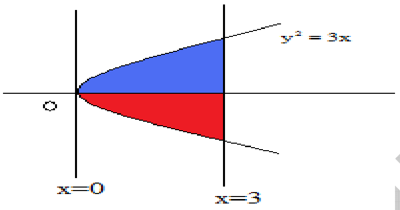


కావల్సిన వైశాల్యం = $\int_0^2 y\,dx = \int_0^2 \frac{x^2}{4}dx =$

$\left(\frac{x^3}{12}\right)_0^2 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ sq. units.

3. $y^2 = 3x, x = 3$.

ఇచ్చిన వక్రం $y^2 = 3x$ మరియు రేఖలు $x = 3$



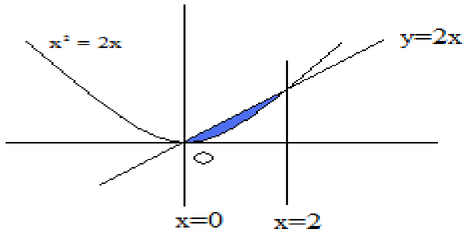
కావల్సిన వైశాల్యం = 2 (ఇచ్చిన వక్రం, X అక్షం మరియు రేఖలు x=0 , x=3)

$= 2\int_0^3 y\,dx = 2\int_0^3 \sqrt{3}.\sqrt{x}\,dx$

$= \left(2\sqrt{3}.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)_0^3 = \frac{4\sqrt{3}}{3}.\left(3\sqrt{3} - 0\right) = 12\,\text{sq.units}$

4). . $y = x^2, y = 2x$.

Sol:



ఇచ్చిన సమీకరణాలనుండి

$x^2 = 2x$

$x^2 - 2x = 0$, x(x-2) =0

x = 0 or x = 2, y=0 or y = 4

ఖండన బిందువులుO(0,0), A(2,4)

కావల్సిన వైశాల్యం $= \int_0^2 \left(2x - x^2\right)dx$

$= \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$ sq. units

5. y = sin 2x , y = $\sqrt{3}$ sin x, x =0, $x = \frac{\pi}{6}$.

Sol; y = sin 2x-------- (1)

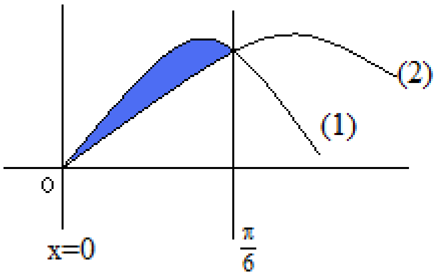
$y = \sqrt{3}\sin x$ _______(2)

పై సమీకరణాల నుండి Sin2x = $\sqrt{3}\sin x$

$\Rightarrow$ 2sinx.cosx = $\sqrt{3}\sin x$

$\Rightarrow$ Sinx =0 **or** 2 cos $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$ $x = 0$, $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$



sakshieducation.com

కావల్సిన పైశాల్యం $= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\sin 2x - \sqrt{3}\sin x\right) dx$

$$= \left(-\frac{\cos 2x}{2} + \sqrt{3}\cos x\right)_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \left(-\frac{1}{4} + \sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \sqrt{3} = \frac{7}{4} - \sqrt{3}\,\text{sq.units}$$

6. $y = x^2, y = x^3$

Sol: $y = x^2$ _______(1)

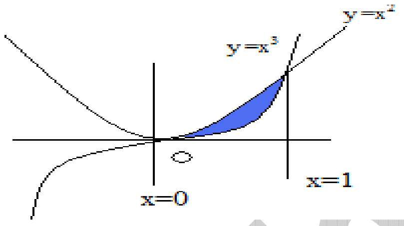
$y = x^3$ ________(2)

ఇచ్చిన సమీకరణాలనుండి

$x^2 = x^3$

$x^3 - x^2 = 0,\ x^2(x-1) = 0$

$x = 0$ or 1



కావల్సిన పైశాల్యం $= \int_0^1 \left(x^2 - x^3\right) dx$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}\,\text{sq.units}$$

7. $y = 4x - x^2,\ y = 5 - 2x$.

Sol: $y = 4x - x^2$ ________ (i)

$y = 5 - 2x$ ________ (ii)

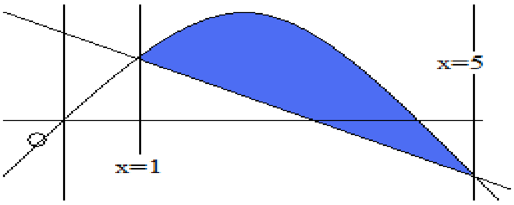
$y = -\left([x-2]^2\right) + 4,\ y-4=(x-2)^2$

ఇచ్చిన సమీకరణాలనుండి

$4x-x^2 = 5-2x,\ x^2 - 6x + 5 = 0$

$(x-5)(x-1) = 0$, $X = 1, 5$

sakshieducation.com



కావల్సిన వైశాల్యం $=\int_1^5 \left(\text{yof}(1)-\text{yof}(2)\right)dx = \int_1^5 \left(4x-x^2-5+2x\right)dx$

$= \left(75-\frac{125}{3}-25\right)-\left(3-\frac{1}{3}-5\right) = 50-\frac{125}{3}+2+\frac{1}{3}$

$= \frac{150-125+6+1}{3} = \frac{32}{3}\text{sq.units}$

8. X-అక్షంతోనూ $y=1+\frac{8}{x^2}$ అనే వక్ర భాగం తోనూ **x = 2, x = 4** రేఖల మధ్య ఏర్పడే వైశాల్యం కనుగొనుము.

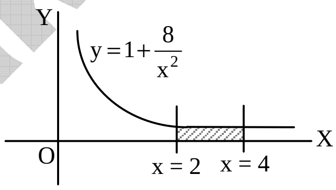
Sol: $y=1+\frac{8}{x^2}$.[2, 4] లో $y=1+\frac{8}{x^2}>0$

X-అక్షంతోనూ $y=1+\frac{8}{x^2}$ అనే వక్ర భాగం తోనూ **x = 2, x = 4** రేఖల మధ్య ఏర్పడే

వైశాల్యం $=\int_2^4 y\,dx = \int_2^4 \left(1+\frac{8}{x^2}\right)dx$

$=\left[x-\frac{8}{x}\right]_2^4 = \left(4-\frac{8}{4}\right)-\left(2-\frac{8}{2}\right)$

$=2+2=4$ sq.units.



sakshieducation.com

9. **$y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$** అనే పరావలయాల మధ్య ఏర్పడే వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.

Sol: $y^2 = 4x$ … (1)

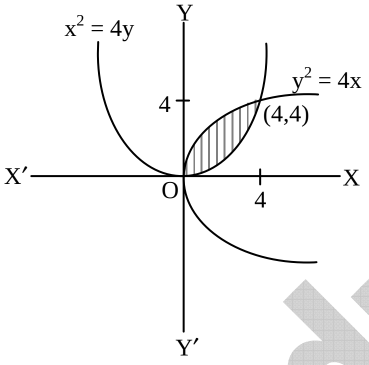
$x^2 = 4y$ …(2)

(1) , (2) ల నుండి

$Y^2 = 4x \Rightarrow y^4 = 16x^2 \Rightarrow y^4 = 64y \Rightarrow y = 4$

$\therefore\ 4x = y^2 \Rightarrow 4x = 16 \Rightarrow x = 4$

ఖండన బిందువులు (0, 0) , (4, 4).



$\therefore$ పరావలయాల మధ్య ఏర్పడే వైశాల్యం

$$= \int_0^4 \sqrt{4x}\, dx - \int_0^4 \frac{x^2}{4} dx$$

$$= 2\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^4 - \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4$$

$$= \frac{4}{3}(4^{3/2}) - \frac{1}{12}(64)$$

$$= \frac{32}{3} - \frac{16}{3} = \frac{16}{3} \text{sq.units.}$$

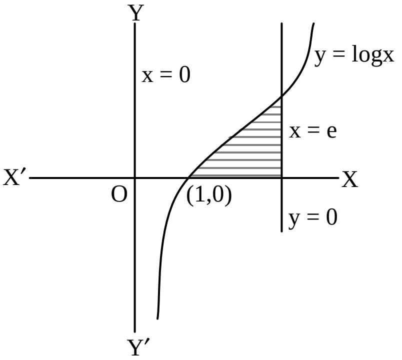
10. y = log x అనే వక్రం X-అక్షం మీద x = e.రేఖ తో ఏర్పరిచే వైశాల్యం కనుగొనుము

Sol: y = log x అనే వక్రం X-అక్షం మీద x = e.రేఖ తో ఏర్పరిచే వైశాల్యం

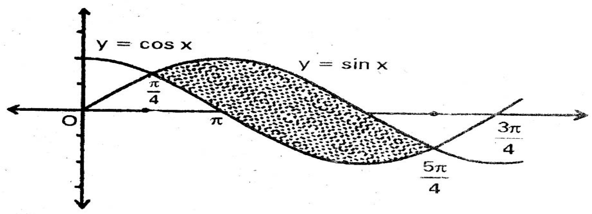
$$= \int_1^e \log_e x \, dx$$

$$= [x \log x]_1^e - \int_1^e dx$$

= (e – 0) – (e – 1) = 1 sq.units.



11. . y = sin x , y = cos x వక్రాల రెండు వరస ఖండన బిందువుల మధ్య పరిబద్ధమైన వైశాల్యం కనుగొనుము



Sol:

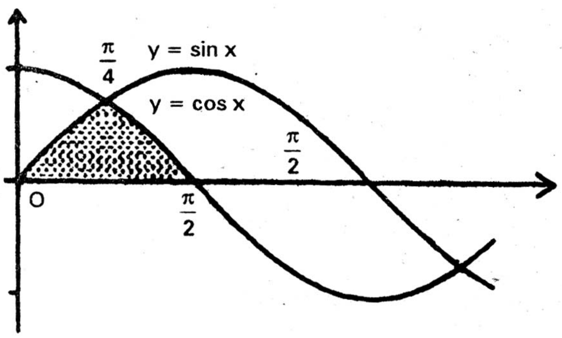
రెండు వరస ఖండన బిందువుల $x = \frac{\pi}{4}$ and $x = \frac{5\pi}{4}$,

$x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ లో $\sin x \geq \cos x$

కావల్సిన వైశాల్యం = $\int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x) dx = (-\cos x - \sin x)_{\pi/4}^{5\pi/4}$

$$= \left(-\cos\frac{5\pi}{4} - \sin\frac{5\pi}{4}\right) + \left(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 4\frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

12. **y = sin x, y = cos x** వక్రాలు **X** అక్షం తో చేసే కోణాన్ని కనుక్కోండి



Sol:

$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ లో $\cos x \geq \sin x$,

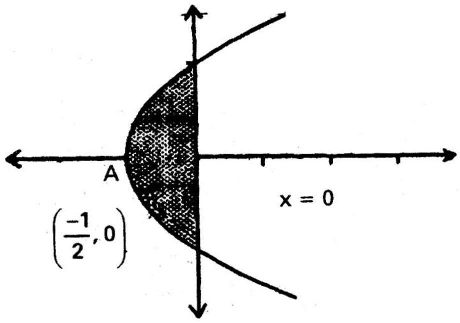
$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ లో $\cos x \leq \sin x$

కావల్సిన వైశాల్యం $= \int_0^{\pi/4} \sin x\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x\, dx$

$= (-\cos x)_0^{\pi/4} + (\sin x)_{\pi/4}^{\pi/2} = -\cos\frac{\pi}{4} + \cos 0 + \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{4}$

$= -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 - \sqrt{2}$

14. $y^2 - 1 = 2x$, $x = 0$ వక్రాలతో ఏర్పడిన వైశాల్యం కనుగొనుము



Sol:

$y^2 - 1 = 2x$ వక్రం

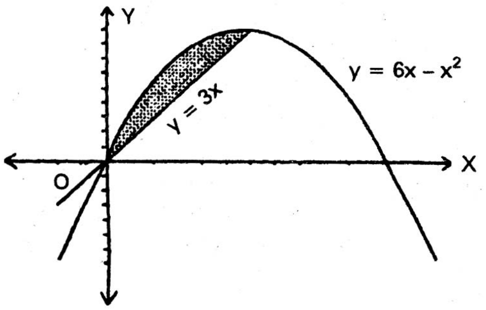
X – అక్షాన్ని A $\left(-\frac{1}{2}\ 0\right)$ వద్ద Y అక్షాన్ని y = 1 , y =-1వద్ద ఖండిస్తుంది.

కావల్సిన వైశాల్యం $= \int_{-1}^{1} (-x)\, dy = \int_{-1}^{1} -\left(\frac{y^2 - 1}{2}\right) dy$

sakshieducation.com

$$=\int_0^1 -\left(y^2-1\right)dy=\left(-\frac{y^3}{3}+y\right)_0^1=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

15. **y = 3 , y = 6x- x². వక్రాలతో ఏర్పడిన ప్రదేశాల వైశాల్యాలు కనుగొనుము**



Sol:

$y = 3x$,$y = 6x-x^2$.

పై వక్రాల నుండి

$3x=6x-x^2, x^2-3x=0$

$x(x – 3) = 0$, $x = 0$ or 3

కావల్సిన వైశాల్యం $=\int_0^3 \left(6x-x^2-3x\right)dx$

$$=\int_0^3\left(3x-x^2\right)dx=\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)_0^3$$

$$=\frac{27}{2}-\frac{27}{3}=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}.$$

sakshieducation.com

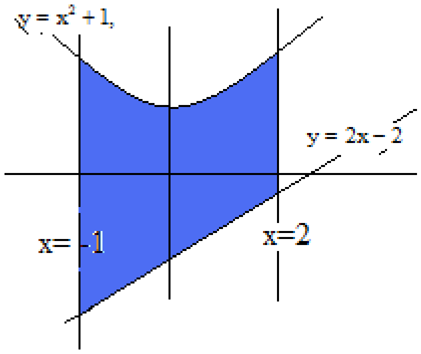
Long Answer Questions

1. **.** $y = x^2 + 1, y = 2x - 2, x = -1, x = 2$.

Sol:

$y = x^2 + 1$ ________ (1)

y = 2x – 2 _________(2)



కావల్సిన వైశాల్యం

$$= \int_{-1}^{2} (f(x) - g(x))dx = \int_{-1}^{2} (x^2 - 2x + 3)dx = \int_{-1}^{2} \left[(x^2 - 1) - (2x - 2)\right]dx$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 4 + 6\right) - \left(-\frac{1}{3} - 1 - 3\right) = \frac{8}{3} + 2 + 4 + \frac{1}{3} = 3 + 6 = 9 \text{ sq. units}.$$

2. $y^2 = 4x,\ y^2 = 4(4 - x)$

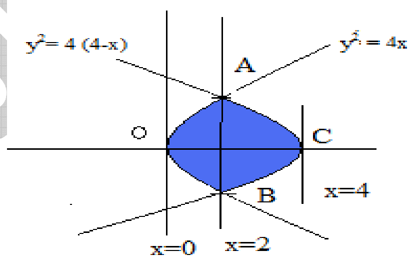
Sol: ఇచ్చిన వక్రాలు

y^2 = 4x ____(1), y^2= 4 (4-x) ______(2)

వక్రాలను సాధించగా

4x= 4 (4-x) $\Rightarrow$ 2x = 4$\Rightarrow$ x = 2

y=0 $\Rightarrow$x=0 and x=4



కావల్సిన వైశాల్యం అక్షం X దృష్ట్యా సౌష్టవం

OACB వైశాల్యం

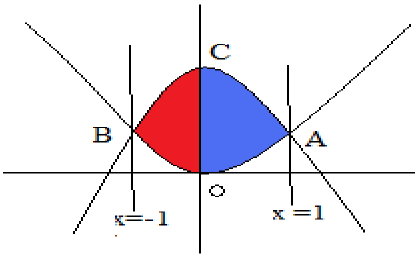
$$= 2\left[\int_0^2 2\sqrt{x}\,dx + \int_2^4 2\sqrt{4-x}\,dx\right]$$

$$= 2\left(2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)_0^2 + 2\left\{\frac{(4-x)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}}\right\}_2^4$$

$$= 2\left[\frac{4}{3}\left(2\sqrt{2}\right) - \frac{4}{3}\left(-2\sqrt{2}\right)\right] = 2\left(\frac{8\sqrt{2}}{3} + \frac{8\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$= 2\left(\frac{16\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{32\sqrt{2}}{3} \text{ sq. units}$$

3. Sol:



$y = 2 - x^2$ __(1) , $y = x^2$ ____(2)
వక్రాలను సాధించగా

$2 - x^2 = x^2, 2 = 2x^2$ or $x^2 = 1$ అప్పుడు
$x = \pm 1$
కావల్సిన వైశాల్యం **y** అక్షం దృష్ట్యా సౌష్టవం , కావల్సిన వైశాల్యం =2. Area OACO

$$2 \times \int_{-1}^{1} (y \text{ of } (1) - y \text{ of } (2))dx = 2\int_{-1}^{1} \left(2 - x^2 - x^2\right)dx$$

$$= 2\int_{-1}^{1} \left(2 - 2x^2\right)dx = 2\left(2x - \frac{2x^3}{3}\right)_{-1}^{1} \qquad = 2\left[2 - \frac{2}{3}\right] = \frac{8}{3} \text{ sq. units}.$$

sakshieducation.com

4. $y^2=12(x+3)$, $y^2=20(5-x)$ వక్రాల మధ్య ఆవృత మైన వైశాల్యం $64\sqrt{\frac{5}{3}}$ అని చూపుము

Sol: ఇచ్చిన వక్రాలు

$y^2=12(x+3)$--- (1), $y^2=20(5-x)$ ____(2)

వక్రాలను సాధించగా

12(x+3) = 20(5 – x)

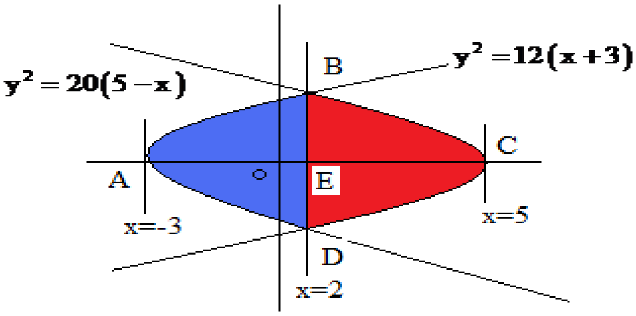
x + 9 = 25 – 5x, 8x = 16 , x = 2

. ఇచ్చిన వక్రాలు x = 2 వద్ద x అక్షాన్ని ఖండిస్తున్నాయ్

ఇచ్చిన వక్రాలు x=5 , x=-3 వద్ద ఖండించుకుంటున్నాయ్

$y^2=12(2+3)=60$

$\Rightarrow y=\sqrt{60}=\pm 2\sqrt{15}$



కావల్సిన వైశాల్యం అక్షం X దృష్ట్యా సౌష్టవం

కావల్సిన వైశాల్యం =2x(AREA ABCOA)

= 2.(AREA ABEA + AREA BECB)

$$=2\left[\int_{-3}^{2}2\sqrt{3}\sqrt{x+3}\,dx+\int_{2}^{5}2\sqrt{5}\sqrt{5-x}\,dx\right]$$

$$=4\sqrt{3}\left(\frac{(x+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)_{-3}^{2}+4\sqrt{5}\left(\frac{(5-x)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}}\right)_{2}^{3}=\frac{8\sqrt{3}}{3}\left(\frac{(x+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)_{-3}^{2}+4\sqrt{5}\left(\frac{(5-x)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}}\right)_{2}^{5}$$

$$=\frac{8\sqrt{3}}{3}\left(5^{\frac{3}{2}}-0\right)-\frac{8\sqrt{5}}{3}\left[0-3^{\frac{3}{2}}\right]=\frac{8\sqrt{3}}{3}.5\sqrt{5}+\frac{8\sqrt{5}}{3}\left[0-3^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$=\frac{40.\sqrt{15}}{3}+\frac{24\sqrt{15}}{3}=\frac{64}{3}\sqrt{15}\text{ sq.units}$$

sakshieducation.com

5. $\{(x,y)/x^2-x-1\le y\le -1\}$ బిందువుల తో ఆవృత మైన వైశాల్యం కనుగొనుము.

Sol. $y=x^2-x-1$------(1)

$y=-1$ -------- **(2)**

$$y=x^2-x-1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$$

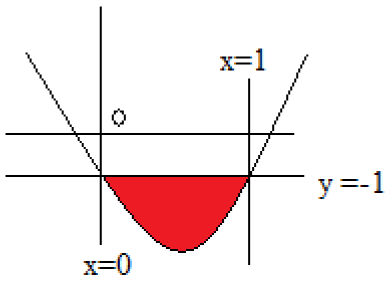
$$y=\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

Vertex $\left(\frac{1}{2},-\frac{5}{4}\right)$

(1), (2),ల నుండి

$$x^2-x-1=-1\Rightarrow x^2-x=0\Rightarrow x=0, x=1$$

వక్రాలు x=0 , x=1.వద్ద ఖండించుకుంటున్నాయి



కావల్సిన వైశాల్యం = $\int_0^1 \left(y \text{ of } (1)-y \text{ of } (2)\right)dx$

$$A=\left|\int_0^1\left(x^2-x-1\right)dx-\int_0^1(-1)\,dx\right|$$

$$=\left|\int_0^1\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x\right)-_0^1[-x]\right|=\frac{1}{6}\text{sq.units}$$

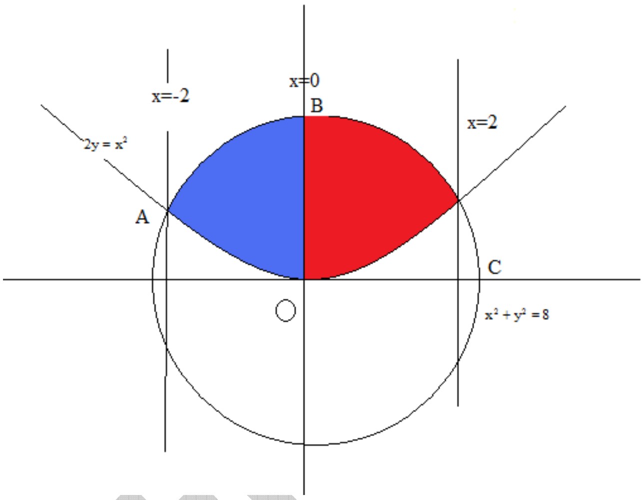
6. **$2y = x^2$పరావలయం $x^2 - y^2 = 8$ అనే వృత్తాన్ని రెండు భాగాలుగా విభజిస్తే వాటి వైశాల్యాలను కనుగొనుము**

Sol:

$x^2 + y^2 = 8$ _______ (1)

$2y = x^2$ ________(2)

(1) , (2) ల నుండి



$x^2 = t$, $4t + t^2 = 32$, $t^2 + 4t - 32 = 0$

$(t + 8)(t - 4) = 0$

$t = -8$ అసంభవం $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

దత్త వక్రాలు $x=2$, $x=-2$ వద్ద ఖండించుకుంటున్నాయి.

$$\text{AREA OBCO} = \int_0^2 \sqrt{8 - x^2}\, dx - \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} \times . \sqrt{8 - x^2} + \frac{8}{2} \sin^{-1} \frac{x}{2\sqrt{2}}\right]_0^2 - \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{2}.2.2 + 4.\frac{\pi}{4} - \frac{8}{6} = \frac{2}{3} + \pi$$

ఇచ్చిన వక్రం Y – అక్షం దృష్ట్యా సౌష్టవం కావున ABCOAవైశాల్యం= 2. OBCO

$$= 2\left(\frac{2}{3} + \pi\right) = \frac{4}{3} + 2\pi \text{ sq. units}.$$

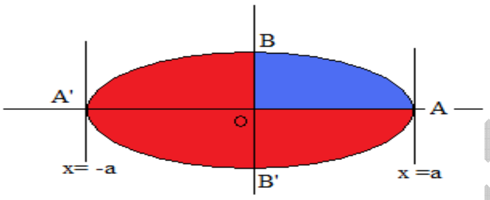
AREA of the circle = $\pi r^2 = 8\pi$

మిగిలినభాగం = $8\pi - \left(\frac{4}{3} + 2\pi\right)$

$= \left(6\pi - \frac{4}{3}\right)$ sq. units .

7. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ పరిబద్ధమైన వైశాల్యం π**ab** అని చూపుము . దీని నుంచి $x^2+y^2=a^2$ వైశాల్యం వృత్త రాబట్టండి

Sol:



$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\Rightarrow y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

y=o ఐతే x = a లేదా

x=-a

X , y అక్షాల దృష్ట్యా సౌష్టవం .

కావల్సిన వైశాల్యం = 4 . వైశాల్యం OABO .

వైశాల్యం OABO $= \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dX$

$= \frac{b}{a}\left(\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)_0^a$

$= \frac{b}{a}\left(0 + \frac{a^2}{2}.\frac{\pi}{2} - ab\right) = \frac{\pi a^2}{4}.\frac{b}{a} = \frac{\pi}{4}ab$

కావల్సిన వైశాల్యం = 4X వైశాల్యం OABO = 4. $\frac{\pi}{4}$ab $= \pi ab$

b = a ప్రతిక్షేపించగా

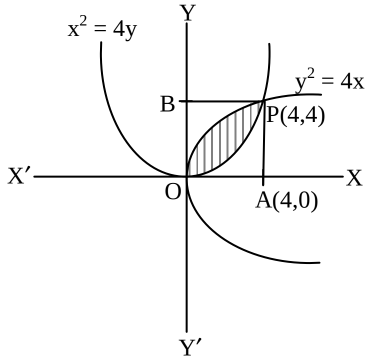
$x^2 + y^2 = a^2$ వృత్తం వస్తుంది

వృత్త వైశాల్యం = $\pi a(a) = \pi a^2$ sq. units.

sakshieducation.com

9. $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$ **అనేవక్రాలు** $x = 0, x = 4, y = 4$ **మరియు** $y = 0$ **రేఖలచే ఏర్పడే చతురస్రాన్ని మూడు సమ భాగాలుగా విభజిస్తాయని చూపుము.**

Sol:



$y^2 = 4x$ …(1)

$x^2 = 4y$ …(2)

పై వక్రాల నుండి $y^4 = 16x^2 = 64y$

$\Rightarrow y(y^3 - 64) = 0$

$\Rightarrow y = 0 \text{ or } y = 4$

$y = 4 \Rightarrow 4x = 16 \Rightarrow x = 4.$

$\therefore$ ఖండన బిందువు $P(4, 4)$.

$\therefore$ వక్రాల మధ్య వైశాల్యం

$$= \int_0^4 2\sqrt{x}\,dx - \int_0^4 \frac{x^2}{4}\,dx$$

$$= \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}\right)dx$$

$$= 2\left(\frac{2}{3}\right)(x^{3/2})_0^4 - \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4$$

$$= \frac{4}{3}(8) - \frac{1}{4}\left(\frac{64}{3}\right)$$

$$= \frac{32}{3} - \frac{16}{3} = \frac{16}{3} \text{sq.units.}$$

చతురస్ర వైశాల్యం = $(OA)^2 = 4^2 = 16$

$y = \frac{x^2}{4}$, X అక్షం , $x = 0, x = 4$ రేఖ ల మధ్య వైశాల్యం= $\int_0^4 \frac{x^2}{4} dx = \left(\frac{x^3}{12}\right)_0^4 = \frac{16}{3}$

$x^2 = 4y$,$y^2 = 4x$ వక్రాల మధ్య వైశాల్యం $\frac{16}{3}$ sq.units.

మూడవ భాగం = $16 - \frac{16}{3} - \frac{16}{3} = \frac{16}{3}$

$y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$ అనేవక్రాలు $x = 0$, $x = 4$, $y = 4$ మరియు $y = 0$ రేఖలచే ఏర్పడే

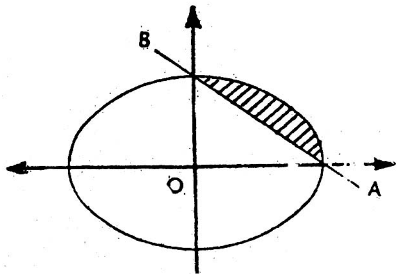
చతురస్రాన్ని మూడు సమ భాగాలుగా విభజిస్తున్నాయి.

10. **AOB అనేది** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ చే ప్రధమ పాదం లో ఏర్పరిచే భాగం మరియు **OA = a, OB =b** అయితే **AB** జ్యా మరియు దీర్ఘ వృత్త చాపము**AB** ల మధ్య వైశాల్యం $\frac{(\pi - 2)ab}{4}$ అను చూపుము

Sol: OA = a, OB = b

AB రేఖా సమీకరణం $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$$\frac{y}{b} = 1 - \frac{x}{a},\ y = b\left(1 - \frac{x}{a}\right)$$



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2}$$

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)$$

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

కావల్సిన వైశాల్యం

$$= =\frac{b}{a}\left[x\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^a$$

$$-b\left(x-\frac{1}{a}.\frac{x^2}{2}\right)_0^a$$

$$=\frac{b}{a}\left[0+\frac{a^2}{2}.\sin^{-1}1-(0+0)\right]-b\left[a-\frac{a^2}{2a}-0\right]$$

$$=\frac{b}{a}.\frac{a^2}{2}.\frac{\pi}{2}-\frac{ab}{2}=\frac{ab}{4}(\pi-2)\text{sq.units}$$

11. $y=x^2-5x$ **, y = 4-2x.** వక్రాల మధ్య వైశాల్యం కనుగొనుము

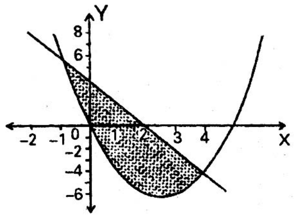
Sol:

$y = x^2 -5x$ ….(1),y = 4-2x ……….(2)

$x^2-5x=4-2x$, $x^2-5x=4-2x$

$x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0$ x =-1,4



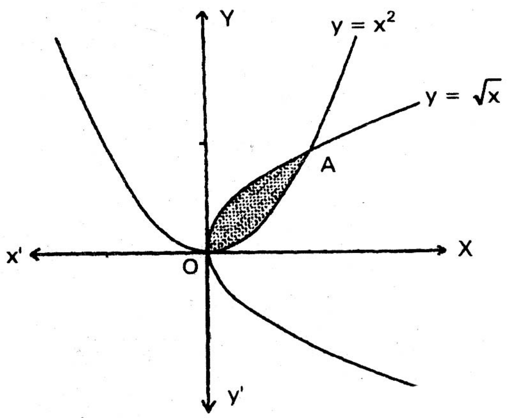
కావల్సిన వైశాల్యం= $\int_{-1}^{4}\left[(4-2x)-\left(x^2-5x\right)\right]dx$

$= \int_{-1}^{4}\left(4+3x-x^2\right)dx = \left(4x+\frac{3}{2}x^2-\frac{x^3}{3}\right)_{-1}^{4} = \left(16+\frac{3}{2}16-\frac{64}{3}\right)-\left(-4+\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\right)$

$= 16+24-\frac{64}{3}+4-\frac{3}{2}-\frac{1}{3} = 44-\frac{64}{3}-\frac{3}{2}-\frac{1}{3} = \frac{264-128-9-2}{6} = \frac{125}{6}$

12. $y = x^2,\ y = \sqrt{x}$.వక్రాల మధ్య వైశాల్యం కనుగొనుము

Sol:



$y = \sqrt{x}$ ....(1)

$y = x^2$ ....(2)

$\therefore\ \sqrt{x} = x^2 \Rightarrow x^4 = x$

$x\left(x^3-1\right) = 0$, x=0 or x =1

O(0,0) A(1,1)

కావల్సిన వైశాల్యం = $= \int_{0}^{1}\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx$

$= \left(\frac{2}{3}\times\sqrt{x}-\frac{x^3}{3}\right)_{0}^{1} - \frac{2}{3}-\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

13. $y^2 = 4ax,\ x^2 = 4by\left(a>0, b>0\right)$ వక్రాల మధ్య వైశాల్యం కనుగొనుము

.

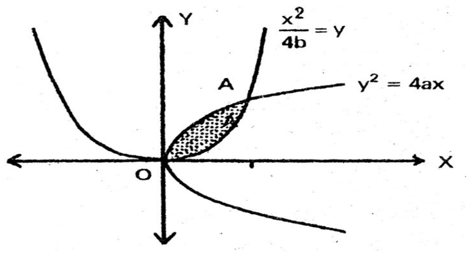
Sol:

$y^2 = 4ax$ ….(1) , $x^2 = 4by$ ……….(2)

(2) నుండి $y = \frac{x^2}{4b}$

(1) లో ప్రతిక్షేపించగా

$\left(\frac{x^2}{4b}\right)^2 = 4ax$



$x\left[x^3 - 64b^2a\right] = 0$

$X = 0,\ x = 4\ \left(b^2a\right)^{1/3}$

కావల్సిన వైశాల్యం

$= {}_0^{4\left(b^2a\right)^{1/3}}\left[\left(4a\right)^{1/2} x^{3/2}.\frac{2}{3} - \frac{x^3}{12b}\right] = \left[\left(4a\right)^{1/2} 8\left(b^2a\right)^{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}}\frac{2}{3} - \frac{4^3\left(b^2a\right)^{3.\frac{1}{3}}}{12b}\right]$

$= \left[2ab\frac{16}{3} - \frac{64.b^2a}{12b}\right] = ab\left(\frac{32}{3} - \frac{16}{3}\right) = \frac{16}{3}$ ab sq.units

sakshieducation.com