# అతి పరావలయం

## అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. $3x-4y=12, 3x+4y=12$ సరళ రేఖలు అతి పరావలయం S = 0 పై ఖండించుకుంటే, S = 0 ఉత్కేంద్రత కనుక్కోండి.

A. దత్త రేఖలు $3x-4y=12$

$3x+4y=12$

ఖండన బిందువు $P(4,0)$

P అతిపరావలయం $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ మీద బిందువు

$\frac{16}{a^2}=1$

$a^2=16$

ఉత్కేంద్రత కనుగొనడానికి దత్తాంశం సరిపోదు

2. నాభులు $(\pm 5,0)$, తిర్యక్ అక్షం పొడవు 8 గా గల అతిపరావలయ సమీకరణం కనుక్కోండి.

A. నాభులు $S(\pm 5,0)$ $S(\pm 5,0)$ $\therefore\ ae=5$

తిర్యగాక్షము పొడవు $=2a=8 \Rightarrow a=4$

$e=\frac{5}{4}$

$b^2=a^2(e^2-1)=16\left(\frac{25}{16}-1\right)=9$

అతిపరావలయ సమీకరణము $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

$9x^2-16y^2=144$

www.sakshieducation.com

3. $(1,-1)$ **బిందువు గుండా పోతూ** $x+2y+3=0$, $3x+4y+5=0$ **అనంత స్పర్శరేఖలుగా గల అతిపరావలయ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.**

A. అనంత స్పర్శరేఖల ఉమ్మడి సమీకరణము

$(x+2y+3)(3x+4y+5)=0$

$\therefore$ అతిపరావలయ సమీకరణము

$(x+2y+3)(3x+4y+5)+k=0$ గా తీసుకొనవలెను

అతిపరావలయ $P(1,-1)$ గుండా పోతుంది

$(1-2+3)(3-4+5)+k=0$

$8+k=0 \Rightarrow k=-8$

అతిపరావలయ సమీకరణము $(x+2y+3)(3x+4y+5)-8=0$

$\Rightarrow 3x^2+6xy+9x+4xy+8y^2+12y+5x+10y+15-8=0$

$\Rightarrow 3x^2+10xy+8y^2+14x+22y+7=0$

4. $x^2-4y^2=5$ **అతిపరావలయానికి** $3x-4y+k=0$ **స్పర్శరేఖ అయితే k విలువ కనుక్కోండి.**

A. అతిపరావలయ సమీకరణము $x^2-4y^2=5$

$$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{\left(\frac{5}{4}\right)}=1$$

$$a^2=5,\ b^2=\frac{5}{4}$$

దత్త రేఖ సమీకరణము $3x-4y+k=0$

$4y=3x+k$

$$y=\frac{3}{4}x+\frac{k}{4}$$

$$m=\frac{3}{4},\ c=\frac{k}{4}$$

స్పర్శరేఖ నియమము $c^2=a^2m^2-b^2$

www.sakshieducation.com

$$\frac{k^2}{16} = 5.\frac{9}{16} - \frac{5}{4}$$

$$k^2 = 45 - 20 = 25$$

$$k = \pm 5$$

5. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ పై ఏ బిందువునుంచైనా అనంత స్పర్శరేఖల కి గల లంబదూరాల లబ్ధం కనుక్కోండి.

A. అతిపరావలయ సమీకరణము $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

$$a^2 = 16, b^2 = 9$$

మీద అతిపరావలయం మీది ఏదేని బిందువు నుండి అనంత స్పర్శరేఖల లంబదూరాల లబ్ధము

$$\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} = \frac{16 \times 9}{16 + 9} = \frac{144}{25}$$

6. ఒక అతిపరావలయ ఉత్కేంద్రత $\frac{5}{4}$ అయితే దాని సంయుగ్మ అతిపరావలయ ఉత్కేంద్రత కనుక్కోండి.

A. అతిపరావలయ, సంయుగ్మ అతిపరావలయాల ఉత్కేంద్రతలు $e, e_1$ అయితే $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e_1^2} = 1$

$e = \frac{5}{4}$ అని ఇవ్వబడింది

$$= \frac{16}{25} + \frac{1}{e_1^2} = 1$$

$$\frac{1}{e_1^2} = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \quad e_1^2 = \frac{25}{9} \Rightarrow e = \frac{5}{3}$$

www.sakshieducation.com

## స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. క్రింది అతిపరావలయాలకు ఉత్కేంద్రత, నాభులు, నియత రేఖా సమీకరణాలు, కేంద్రం, నాభి లంబం పొడవు కనుక్కోండి.

i. $16y^2 - 9x^2 = 144$

A. అతిపరావలయ సమీకరణము

$16y^2 - 9x^2 = 144$

$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

$a^2 = 16, b^2 = 9$

కేంద్రం $C(0,0)$

$b^2e^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9$

$= 25 \Rightarrow be = 5$

నాభులు $5(0, \pm ae) = (0, \pm 5)$

ఉత్కేంద్రత $\frac{be}{b} = \frac{5}{3}$

నియతరేఖల సమీకరణాలు $y = \pm b/e$

$= \pm 3.\frac{3}{5}$

$5y = \pm 9$

నాభిలంబ పొడవు $= 2.\frac{a^2}{b}$

$= 2.\frac{16}{3} = \frac{32}{3}$

www.sakshieducation.com

ii. $5x^2 - 4y^2 + 20x + 8y = 4$

A. $5(x^2 + 4x + 4) - 4(y^2 - 2y + 1) = 4 + 20 - 4$

$5(x+2)^2 - 4(y-1)^2 = 20$

$\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{5} = 1$

$a^2 = 4,\ b^2 = 5 \Rightarrow a < b$

కేంద్రం $C(-2, +1)$

$a^2e^2 = a^2 + b^2 = 4 + 5 = 9$

$ae = 3$

ఉత్కేంద్రత $= \frac{ae}{a} = \frac{3}{2}$

నాభులు $(h \pm ae, k) = (-2 \pm 3, 1)$

$= (-5,1)$ మరియు $(1,1)$

నియతరేఖ సమీకరణము $x - h = \pm\frac{a}{e}$

$x + 2 = \pm 2.\frac{2}{3}$

$3x + 6 = \pm 4$

$3x + 10 = 0 \quad 3x + 2 = 0$

నాభిలంబ పొడవు $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2.5}{2} = 5$

iii. $9x^2 - 16y^2 + 72x - 32y - 16 = 0$

A. అతిపరావలయ సమీకరణము

$9x^2 - 16y^2 + 72x - 32y - 16 = 0$

$\Rightarrow 9(x^2 + 8x) - 16(y^2 + 2y) = 16$

$\Rightarrow 9(x^2 + 8x + 16) - 16(y^2 + 2y + 1)$

www.sakshieducation.com

$= 16 + 144 - 16$

$$\Rightarrow 9(x+4)^2 - 16(y+1)^2 = 144$$

$$\Rightarrow \frac{(x+4)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ తో పోల్చగా

$a^2 = 16, b = 9, h = -4, k = -1$

కేంద్రం $(h,k) = (-4,-1)$

$$e = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{16+9}{16}}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$$

నాభులు $(h \pm ae, k) = \left(-4 \pm 4.\frac{5}{4}, 1\right)$

$= (-4 \pm 5, -1)$

$= (1,-1), (-9,-1)$

నియతరేఖ సమీకరణాలు

$$x + 4 = \pm 4.\frac{4}{5}$$

$$= \pm\frac{16}{5}$$

$5x + 20 = \pm 16$

నియతరేఖ సమీకరణాలు $5x + 4 = 0$

$5x + 36 = 0$

నాభి లంబము పొడవు $= \frac{2b^2}{a}$

$$= \frac{2 \times 9}{4} = \frac{9}{2}$$

www.sakshieducation.com

2. ఉత్కేంద్రత 2, నాభులు $(4,2),(8,2)$లుగా గల అతిపరావలయం సమీకరణం కనుక్కోండి.

A. నాభులు $(4,2),(8,2)$

కేంద్రం C నాభుల మధ్య బిందువు

$\therefore$ కేంద్రం $\left(\frac{4+8}{2},\frac{2+2}{2}\right)=(6,2)$

$ae=6-4=2$

$e=2\Rightarrow a=\frac{ae}{e}=\frac{2}{2}=1$

$b^2=a^2\left(e^2-1\right)=1(4-1)=3$

అతిపరావలయ సమీకరణము

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-6)^2}{1}-\frac{(y-2)^2}{3}=1$$

3 తో గుణించగా,

$3(x-6)^2-(y-2)^2=3$

$\Rightarrow 3\left(x^2-12x+36\right)-\left(y^2-4y+4\right)=3$

$\Rightarrow 3x^2-36x+108-y^2+4y-4-3=0$

$3x^2-y^2-36x+4y+101=0$

3. $x+2y=0$ (i) సమాంతరంగా (ii) లంబంగా ఉంటూ అతిపరావలయం $x^2-4y^2=4$ ను స్పృశించే రేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.

A. అతిపరావలయ సమీకరణము $x^2-4y^2=4$

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$$

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$$

www.sakshieducation.com

i. స్పర్శరేఖ $x+2y=0$ సమాంతరంగా ఉంటుంది

$$m=-\frac{1}{2}$$

$$c^2=a^2m^2-b^2=4.\frac{1}{4}-1=1-1=0$$

$$c=0$$

సమాంతర స్పర్శరేఖ సమీకరణము

$$y=mx+c$$

$$=-\frac{1}{2}x$$

$$2y=-x$$

$$x+2y=0$$

దీనికి సమాంతర స్పర్శరేఖలు లేవు

ii. స్పర్శరేఖ $x+2y=0$ కు లంబంగా ఉంటే

స్పర్శరేఖ వాలు $=m=\frac{-1}{\left(-\frac{1}{2}\right)}=2$

$$c^2=a^2m^2-b^2=4.4-1=15$$

$$c=\pm\sqrt{15}$$

లంబ స్పర్శరేఖ సమీకరణము $y=2x\pm\sqrt{15}$

4. **$2x^2-3y^2=6$ అతిపరావలయానికి $(-2,1)$ గుండా పోయే స్పర్శరేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.**

A. అతిపరావలయ సమీకరణము $2x^2-3y^2=6$

$$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$$

స్పర్శరేఖ వాలు 'm' అనుకొనుము

స్పర్శరేఖ $P(-2,1)$ గుండా పోతుంది

స్పర్శరేఖ సమీకరణము

www.sakshieducation.com

$y-2=m(x+2)=mx+2m$

$y=mx+(2m+1)$ .... (1)

స్పర్శరేఖ నియమం $c^2=a^2m^2-b^2$

$(2m+1)^2=3m^2-2$

$4m^2+4m+1=3m^2-2$

$m^2+4m+3=0$

$(m+1)(m+3)=0$

$m=-1$ -3

Case (i) : $m=-1$

(1) లో ప్రతిక్షేపిస్తే స్పర్శరేఖ సమీకరణము

$y=-x-1$

$x+y+1=0$

Case (ii) : $m=-3$

స్పర్శరేఖ సమీకరణము $y=-3x-5$

$3x+y+5=0$

5. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ **యొక్క ఏదైనా స్పర్శరేఖల నాభుల లంబపాదాలు అనుబంధ సహాయక వృత్తంపై ఉంటాయని చూపండి.**

A. అతిపరావలయ సమీకరణము $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

స్పర్శరేఖా సమీకరణము

$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$

$y-mx=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ .... (1)

$(\pm ae,0)$ నుండి స్పర్శరేఖ మీదికి గీయబడిన లంబం సమీకరణము

$y=-\frac{1}{m}(x\pm ae)$

www.sakshieducation.com

$\Rightarrow my = -(x \pm ae)$

$x + my = \pm ae$ ... (2)

(1), (2) లను వర్గీకరించి కూడగా,

$(y-mx)^2 + (x+my)^2 = a^2m^2 - b^2 + a^2e^2$

$\Rightarrow y^2 + m^2x^2 - 2mxy + x^2 + m^2y^2 + 2mxy$

$= a^2m^2 - a^2(e^2-1) + a^2e^2$

$\Rightarrow (x^2+y^2)(1+m)^2 = a^2m^2 - ae^2e^2 + a^2 + a^2e^2$

$= a^2(1+m^2)$

$x^2 + y^2 = a^2$ ఇది సహాయక వృత్తము

నాభుల నుండి స్పర్శరేఖ మీదకు గీయబడిన లంబపాదాలు సహాయక వృత్తం మీద ఉంటాయి

**6. అనంత స్పర్శరేఖల మధ్య కోణం $30°$ గల అతిపరావలయ ఉత్కేంద్రతను కనుక్కోండి.**

A. అనంత స్పర్శరేఖల మధ్య కోణం $= 2\theta = 30°$

$\theta = 15°$

$\tan\theta = \tan 15° = \frac{b}{a}$

$e^2 = t\frac{a^2+b^2}{a^2} = 1 + \tan^2 15°$

$= \sec^2 15° = \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)$

$= \frac{8}{4+2\sqrt{3}} \times \frac{4-2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}$

$= \frac{8(4-2\sqrt{3})}{4}$

$= 8 - 4\sqrt{3} = (\sqrt{6}-\sqrt{2})^2$

www.sakshieducation.com

ఉత్కేంద్రత $= e = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

7. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ **అతిపరావలయ అనంత స్పర్శరేఖల మధ్య కోణం** $2\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ **లేదా** $2\sec^{-1}(e)$ **అని చూపండి.**

A. అనంత రేఖల సమీకరణాలు

$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ మరియు $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$

అనంత స్పర్శరేఖల మధ్య కోణం $2\theta$ అయితే $\tan\theta = \frac{b}{a}$

= అనంత స్పర్శరేఖ వాలు $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

అనంత స్పర్శరేఖల మధ్య కోణం

$= 2\theta = 2\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{b^2}{a^2}$$

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{a^2e^2}{a^2} = e^2$$

$\sec\theta = e \Rightarrow \theta = \sec^{-1} e$

అనంత స్పర్శరేఖల మధ్య కోణం

$= 2\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ లేదా $2\sec^{-1}(e)$

www.sakshieducation.com

8. **అతిపరావలయం, సంయుగ్మ అతిపరావల యాల ఉత్కేంద్రతలు వరుసగా $e, e_1$ అయితే $\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e_1^2}=1$ అని చూపండి.**

A. అతిపరావలయ సమీకరణము $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\therefore b^2 = a^2\left(e^2-1\right) \Rightarrow e^2-1=\frac{b^2}{a^2}$$

$$e^2 = 1+\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}$$

$$\therefore \frac{1}{e^2}=\frac{a^2}{a^2+b^2} \quad .... (1)$$

సంయుగ్మ అతిపరావలయ సమీకరణము

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2\left(e_1^2-1\right)$$

$$\Rightarrow e_1^2-1=\frac{a^2}{b^2}$$

$$e_1^2 = 1+\frac{a^2}{b^2}=\frac{a^2+b^2}{b^2}$$

$$\frac{1}{e_1^2}=\frac{b^2}{a^2+b^2} \quad .... (2)$$

(1), (2) లను కూడగా,

$$\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e_1^2}=\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1$$

www.sakshieducation.com

9. i) అతిపరావలయం $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ కి $lx+my+n=0$ స్పర్శరేఖ అయితే, $a^2l^2-b^2m^2=n^2$ అని చూపండి.

ii) అతిపరావలయం $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ కి $lx+my=1$ అభిలంబ రేఖ అయితే $\frac{a^2}{l^2}-\frac{b^2}{m^2}=\left(a^2+b^2\right)^2$ అని చూపండి.

A. i) స్పర్శరేఖ సమీకరణము

$lx+my+n=0$ .... (1)

$P(\theta)$ వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణము

$\frac{x}{a}\sec\theta-\frac{y}{b}\tan\theta-1=0$ .... (2)

(1), (2) లను పోల్చగా,

$$\frac{\sec\theta}{al}=\frac{\tan\theta}{-bm}=\frac{1}{n}$$

$$\sec\theta=\frac{al}{n},\ \tan\theta=\frac{bm}{n}$$

$$\sec^2\theta-\tan\theta=1$$

$$=\frac{a^2l^2}{n^2}-\frac{b^2m^2}{n^2}=1\Rightarrow a^2l^2-b^2m^2=n^2$$

ii. దత్తరేఖ సమీకరణము $lx+my=1$ .... (1)

$P(\theta)$ వద్ద అబిలంబరేఖ సమీకరణము

$\frac{ax}{\sec\theta}+\frac{by}{\tan\theta}=a^2+b^2$ .... (2)

(1), (2) లను పోల్చగా,

$$\frac{1}{\left(\frac{a}{\sec\theta}\right)}+\frac{1}{\left(\frac{b}{\tan\theta}\right)}=\frac{1}{a^2+b^2}$$

www.sakshieducation.com

$$\frac{l\sec\theta}{a} = \frac{m\tan\theta}{b} = \frac{1}{a^2+b^2}$$

$$\left(a^2+b^2\right)\sec\theta = \frac{a}{l}\left(a^2+b^2\right)\tan\theta = \frac{b}{m}$$

$$\frac{\left(a^2+b^2\right)}{\sec\theta} - \tan^2\theta = \frac{a^2}{l^2} - \frac{b^2}{m^2}$$

కావలసిన నియమము

$$\frac{a^2}{l^2} - \frac{b^2}{m^2} = \left(a^2+b^2\right)^2$$

10. $3x^2 - 4y^2 = 12$ **అతిపరావలయానికి** $y = x - 7$ **రేఖకు (i) సమాంతరంగా (ii) లంబంగా ఉంటే స్పర్శ రేఖల సమీకరణాలను కనుక్కోండి.**

A. అతిపరావలయ సమీకరణము $3x^2 - 4y^2 = 12$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$$

$$a^2 = 4,\ b^2 = 3$$

i. $y = x - 7$ కు సమాంతర స్పర్శరేఖ

m = స్పర్శరేఖ వాలు = 1

సమాంతర స్పర్శరేఖ సమీకరణము

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$$

$$y = x \pm \sqrt{4-3}$$

$$= x \pm 1$$

ii. స్పర్శరేఖ $y - x = 7$ కు లంబంగా ఉంటే

m = స్పర్శరేఖ వాలు = -1

లంబ స్పర్శరేఖ సమీకరణము

$$y = (-1)x \pm \sqrt{4(-1)^2 - 3}$$

$$= -x \pm 1$$

www.sakshieducation.com

$x + y = \pm 1$

11. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ **అతిపరావలయానికి రెండు లంబ స్పర్శరేఖల ఖండన బిందువు** $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ **పై ఉంటుందని చూపండి.**

A. పరస్పర లంబంగా ఉన్న అతిపరావలయాల స్పర్శరేఖల ఖండన బిందువు $P(x_1, y_1)$

అతిపరావలయ సమీకరణము $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

స్పర్శరేఖ సమీకరణాన్ని

$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ గా తీసుకొనవచ్చు

ఈ స్పర్శరేఖ $P(x_1, y_1)$ గుండా పోతుంది

$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

$(y_1 - mx_1)^2 = a^2m^2 - b^2$

$y_1^2 + m^2x_1^2 - 2mx_1y_1 = a^2m^2 - b^2$

$m^2x_1^2 - a^2m^2 - 2mx_1y_1 + y_1^2 + b^2 = 0$

$m^2(x_1^2 - a^2) - 2mx_1y_1 + (y_1^2 + b^2) = 0$

స్పర్శరేఖ లంబాలు $\Rightarrow m_1m_2 = -1$

$\frac{y_1^2 + b^2}{x_1^2 - a^2} = -1$

$\Rightarrow y_1^2 + b^2 = -x_1^2 + a^2$

$x_1^2 + y_1^2 = a^2 - b^2$

$P(x, y)$ యొక్క బిందువృత్తం $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$

ఈ వృత్తాన్ని అతిపరావలయ నియతవృత్తము అంటారు

www.sakshieducation.com