

దీర్ఘ వృత్తం

అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. క్రింది దీర్ఘవృత్తాలకు ఉత్సేంద్రత, నాభుల నిరూపకాలు, నియతరేఖల స్థీకరణాలు కనుక్కొండి.

- i. దీర్ఘవృత్త స్థీకరణము

$$9x^2 + 16y^2 - 36x + 32y - 92 = 0$$

A. $9x^2 + 16y^2 - 36x + 32y - 92 = 0$

$$9(x^2 - 4x + 4) + 16(y^2 + 2y + 1) = 92 + 36 + 16$$

$$9(x-2)^2 + 16(y+1)^2 = 144$$

$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

$$a^2 = 16, b^2 = 9 \Rightarrow a = 4, b = 3$$

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{16 - 9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{నాభులు } (h \pm ae, k) = \left(2 \pm 4 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}, -1 \right)$$

$$= \left(2 \pm \sqrt{7}, -1 \right)$$

నాబిలంబం పాడవు

$$\frac{2 \cdot b^2}{a} = \frac{2 \cdot 9}{4} = \frac{9}{2}$$

$$\text{నియత రేఖల స్థీకరణాలు } x = h \pm \frac{a}{e}$$

$$x = 2 \pm \frac{4 \times 4}{\sqrt{7}}$$

$$\sqrt{7x} = 2\sqrt{7} \pm 16$$

ii) $9x^2 + 16y^2 = 144$

iii) $4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$

iv) $x^2 + 2y^2 - 4x + 12y + 14 = 0$

Sol. ii) $9x^2 + 16y^2 = 144$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$\therefore a = 4, b = 3, a > b$

దీర్ఘ రేఖ పొడవు $= 2a = 2 \times 4 = 8$

వృష్టి రేఖ పొడవు $= 2b = 2 \times 3 = 6$

$$= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \cdot 9}{4} = \frac{9}{2}$$

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{16 - 9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

కేంద్రం C(0, 0)

వాయిదలు $(\pm ae, 0) = (\pm \sqrt{7}, 0)$

నియత రేఖల సమీకరణాలు

$$x = \pm \frac{a}{e} \Rightarrow x = \pm 4 \cdot \frac{4}{\sqrt{7}} = \pm \frac{16}{\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{7}x = \pm 16$$

ii) $4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$

$$4(x^2 - 2x) + (y^2 + 2y) = -1$$

$$4((x-1)^2 - 1) + ((y+1)^2 - 1) = -1$$

$$4(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4 + 1 - 1 = 4$$

$$\frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

$a = 1, b = 2, a < b \Rightarrow y$ -దీర్ఘ రేఖ

దీర్ఘ రేఖ పొడవు $= 2b = 4$

వృష్టి రేఖ పొడవు $= 2a = 2$

$$\text{వాయిదలంబం పొడవు} = \frac{2a^2}{b} = \frac{2}{2} = 1$$

$$e = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{4-1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

సెంద్రం $c(-1, 1)$

$$e = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

నాభులు $(-1, 1 \pm \sqrt{3})$

నియత రేఖల సమీకరణాలు

$$y + 1 = \pm \frac{b}{e} = \pm \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3}y + \sqrt{3} = \pm 4$$

$$\sqrt{3}y + \sqrt{3} \pm 4 = 0$$

$$\text{iii) } x^2 + 2y^2 - 4x + 12y + 14 = 0$$

$$x^2 - 4x + 2(y^2 + 6y) = -14$$

$$\Rightarrow (x^2 - 4x + 4) + 2(y^2 + 6y + 9) = 4 + 18 - 14$$

$$\Rightarrow (x - 2)^2 + 2(y + 3)^2 = 8$$

$$\Rightarrow \frac{(x - 2)^2}{8} + \frac{(y + 3)^2}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(x - 2)^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{(y + 3)^2}{2^2} = 1$$

$$a = 2\sqrt{2}, b = 2, h = 2, k = -3$$

$$\text{ఊర్ధ్వ రేఖ పొడవు} = 2a = 2(2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$$

$$\text{ప్రాచ్య రేఖ పొడవు} = 2b = 2 \times 2 = 4$$

నాభిలంబం పొడవు

$$= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \cdot 4}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{4}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{సెంద్రం} = (h, k) = (2, -3)$$

$$\text{నాభులు} = (h \pm ae, k) = (2 \pm 2, -3)$$

$$= (4, -3), (0, -3)$$

నియత రేఖల సమీకరణాలు

$$x - h = \pm \frac{a}{e} \Rightarrow x - 2 = \pm \frac{2\sqrt{2}}{(1/\sqrt{2})}$$

$$\Rightarrow x - 2 = \pm 4$$

$$\text{i.e. } x = 6, x = -2$$

2. నాభిలంబం పొడవు, ప్రాస్యాక్షం పొడవులో సగం ఉంటే దీర్ఘవృత్తం (ప్రామాణిక రూపంలో) ఉత్కోంద్రత కనుకోండి.

A. నాభిలంబం పొడవు = $\frac{1}{2}$ (ప్రాస్యాక్షము)

$$2 \frac{b^2}{a} = \frac{1}{2}(2b)$$

$$2 \frac{b^2}{a} = b$$

$$a = 2b$$

$$a^2 = 4b^2 \Rightarrow a^2 = 4a^2(1 - e^2)$$

$$1 - e^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow e^2 = \frac{3}{4}$$

$$e = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3. $x^2 + 2y^2 - 4x + 12y + 14 = 0$ దీర్ఘవృత్తం మైళ్ళిల్లా బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ, అభిలంబ రేఖల సమీకరణాలు కనుకోండి.

- A. స్పర్శరేఖ సమీకరణం

$$xx_1 + 2yy_1 - 2(x + x_1) + 6(y + y_1 + 14) = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 2y - 2(x + 2) + 6(y - 1) + 14 = 0$$

$$\Rightarrow 4y + 4 = 0$$

దీర్ఘవృత్త స్పర్శరేఖ సమీకరణం $y = -1$

స్పర్శరేఖ వాలు '0'

అభిలంబ రేఖ సమీకరణం

$$y + 1 = \frac{-1}{0}(x - 2)$$

4. $x^2 + 3y^2 = 3$ దీర్ఘవృత్తానికి $4x + y + k = 0$ స్పృర్జేభి అయితే k విలువ కనుకోండి.

A. దీర్ఘవృత్త సమీకరణం $x^2 + 3y^2 = 3$

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{1} = 1$$

$$a^2 = 3, b^2 = 1, \text{రేఖా సమీకరణము } 4x + y + k = 0$$

$$y = -4x - k$$

$$m = -4, c = -k$$

$$\text{స్పృర్జేభా నియమము } c^2 = a^2m^2 + b^2$$

$$(-k)^2 = 3(-4)^2 + 1$$

$$k^2 = 48 + 1 = 49$$

$$k = \pm 7$$

5. నియత రేఖ $x + y + 2 = 0$ గాను, $e = \frac{2}{3}$, ఒక నాభి $(1, -1)$ వద్ద గల దీర్ఘవృత్త సమీకరణం కనుకోండి.

A. $P(x_1, y_1)$ దీర్ఘవృత్తం మీద బిందువు

నియత రేఖ సమీకరణం

$$x + y + 2 = 0$$

ZM కు లంబంగా PM ను గీద్దాం SP లని కలుపుదాం

నిర్యచన ప్రకారం $SP = e \cdot PM$

$$SP^2 = e^2 \cdot PM^2$$

$$(x_1 - 1)^2 + (y_1 + 1)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left[\frac{x_1 + y_1 + 2}{\sqrt{1+1}} \right]^2$$

$$(x_1 - 1)^2 + (y_1 + 1)^2 = \frac{4}{9} \frac{(x_1 + y_1 + 2)^2}{2}$$

$$9[(x_1 - 1)^2 + (y_1 + 1)^2] = 2[x_1 + y_1 + 2]^2$$

$$9[x_1^2 - 2x_1 + 1 + y_1^2 + 2y_1 + 1]$$

$$= 2 \left[x_1^2 + y_1^2 + 4 + 2x_1y_1 + 4x_1 + 4y_1 \right]$$

$$9x_1^2 + 9y_1^2 - 18x_1 + 18y_1 + 18$$

$$= 2x_1^2 + 2y_1^2 + 4x_1y_1 + 8x_1 + 8y_1 + 8$$

$$7x_1^2 - 4x_1y_1 + 7y_1^2 - 26x_1 + 10y_1 + 10 = 0$$

$$P(x_1, y_1)$$

$$7x^2 - 4xy + 7y^2 - 26x + 10y + 10 = 0$$

ఇది కావలసిన దీర్ఘవృత్తం సమీకరణం

6. నాభి లంబ పొడవు $\frac{15}{2}$, నాభుల మధ్య దూరం 2 గా గల దీర్ఘవృత్తం సమీకరణం ప్రామాణిక రూపంలో కనుకోండి.

A. నాభి లంబ పొడవు $= \frac{15}{2}$

$$\text{నాభుల మధ్య దూరము} = 2$$

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{15}{2}, 2ae = 2$$

$$ae = 1$$

$$\Rightarrow b^2 = a^2 - a^2e^2$$

$$\Rightarrow b^2 = a^2 - 1$$

$$\Rightarrow \frac{15}{4}a = a^2 - 1$$

$$\Rightarrow 4a^2 - 15a + 4 = 0 \quad b^2 = a^2 + 1$$

$$a = 4 \quad a = -\frac{1}{4} \quad = 16 - 1$$

$$\text{దీర్ఘవృత్తం సమీకరణం } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{15} = 1$$

7. నాభుల మధ్య దూరము 8, నియత రేఖల మధ్య దూరము 32 గల దీర్ఘవృత్తం సమీకరణం ప్రామాణిక రూపంలో కనుకొండి.

- A. నాభుల మధ్య దూరము = 8
 నియత రేఖల మధ్య దూరము = 32

$$2ae = 8 \quad \frac{2a}{e} = 32$$

$$ae = 4 \quad \frac{a}{e} = 16$$

$$(ae) \left(\frac{a}{e} \right) = 64$$

$$a^2 = 64$$

$$b = a^2 - a^2 e^2 \\ = 64 - 16 = 48$$

దీర్ఘవృత్తం సమీకరణం

$$\therefore \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$$

8. ప్రామాణిక రూపంలో దీర్ఘవృత్తపు నాభిలంబం పాడవ దీర్ఘకుం పాడవలో సగం ఉంటే, ఉత్సాహం కనుకొండి.

A. నాభి లంబం = $\frac{2b^2}{a}$

$$\text{దీర్ఘకుం} = 2a$$

$$\text{దత్తాంశం ప్రకారం } \frac{2b^2}{a} = \frac{1}{2}, 2a$$

$$2b^2 = a^2$$

$$b^2 = a^2 (1 - e^2)$$

$$2a^2 (1 - e^2) = a^2$$

$$1 - e^2 = \frac{1}{2}$$

$$e^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow e = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

9. $(-2, 2), (3, -1)$ బిందువుల గుండా పోతూ, ప్రామాణిక రూపంలో దీర్ఘవృత్తం సమీకరణం కనుక్కొండి.

A. ప్రామాణిక రూపంలో దీర్ఘవృత్తం సమీకరణం

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$(-2, 2), (3, -1)$ బిందువుల గుండా పోతుంది

$$\frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \quad \dots \text{(i)}$$

$$\frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \quad \dots \text{(ii)}$$

(i), (ii) లను సాధించగా

$$\frac{1}{a^2} = \frac{3}{32}; \frac{1}{b^2} = \frac{5}{32}$$

$$\frac{3x^2}{32} + \frac{5y^2}{32} = 1$$

\therefore దీర్ఘవృత్తం సమీకరణం

$$3x^2 + 5y^2 = 32$$

10. ఈ క్రింది దీర్ఘవృత్తాలకు, దీర్ఘక్కం, ప్రాస్కాక్కం, నాభిలంబం పొడవులు, ఉత్సేంద్రత, కేంద్రం, నాభుల నిరూపకాలు, నియుత రేఖల సమీకరణాలు కనుక్కొండి.

$$\text{i)} \quad 4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$$

$$\text{iii)} \quad x^2 + 2y^2 - 4x + 12y + 14 = 0$$

A.

i. దత్త సమీకరణం $4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$

$$4(x^2 - 2x) + (y^2 + 2y) = -1$$

$$4(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4 + 1 - 1 = 4$$

$$\frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

$a < b$ కనుక $\Rightarrow Y - \text{అక్షం దీర్ఘాక్షము}$

$$a = 1, b = 2$$

$$\text{దీర్ఘాక్షం పొడవు} = 2b = 4$$

$$\text{ప్రాస్వాక్షం పొడవు} = 2a = 2$$

$$\text{నాభి లంబం పొడవు} = \frac{2a^2}{b} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{ఉత్సేంద్రత} = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{4-1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{కేంద్రం } C(-1,1)$$

$$be = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\text{నాభులు } (-1, 1 \pm \sqrt{3})$$

$$\text{నియత రేఖల సమీకరణాలు } y+1 = \pm \frac{b}{e}$$

$$= \pm \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3}y + \sqrt{3} = \pm 4$$

$$\sqrt{3}y + \sqrt{3} \pm 4 = 0$$

$$\text{ii. } \text{దత్త సమీకరణం } x^2 + 2y^2 - 4x + 12y + 14 = 0$$

$$x^2 - 4x + 2(y^2 + 6y) = -14$$

$$\Rightarrow (x^2 - 4x + 4) + 2(y^2 + 6y + 9) = 4 + 18 - 14$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + 2(y+3)^2 = 8$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{(y+3)^2}{2^2} = 1 \quad a = 2\sqrt{2}, b = 2, h = 2, k = -3$$

దీర్ఘక్కం పాడవ = $2a = 2(2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$

ప్రాస్వక్కం పాడవ = $2b = 2(2) = 4$

$$\text{నాభి లంబం పాడవ} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{ఉత్సేధం} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{4}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{కేంద్రం } C = (h, k) = (2, -3)$$

$$\begin{aligned}\text{నాభులు} &= (h \pm ae, k) = (2 \pm 2, -3) \\ &= (4, -3), (0, -3)\end{aligned}$$

$$\text{నియత రేఖల సమీకరణాలు } x - h = \pm \frac{a}{e}$$

$$x - 2k = \pm \frac{2\sqrt{2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$x - 2 = \pm 4$$

$$\text{i.e., } x = 6, x = -2$$

11. కేంద్రం $(4, -1)$, ప్రాస్కాటం కొన $(-1, -1)$ బిందువు $(8, 0)$ గుండా పోతుంది.

A. $a = \sqrt{(4+1)^2 + (-1+1)^2}$

$$a = 5$$

దీర్ఘవృత్తం $(8, 0)$ గుండా పోతుంది

$$\frac{(8-4)^2}{25} + \frac{(0+1)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{b^2} = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\frac{1}{b^2} = \frac{9}{25}$$

\therefore కావలసిన దీర్ఘవృత్త సమీకరణం

$$\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{9}{25}(y+1)^2 = 1$$

$$(x-4)^2 + 9(y+1)^2 = 25$$

12. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ దీర్ఘవృత్తానికి $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ స్వరూపాను కనుక్కోండి.

A. దీర్ఘవృత్త సమీకరణం $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \dots\dots (1)$

సరళరైఫ్ సమీకరణం $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$

$$y\sin\alpha = -x\cos\alpha + p$$

$$y = -x \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{p}{\sin\alpha}$$

$$\therefore m = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, c = \frac{p}{\sin\alpha}$$

స్వరూపాను నియమము $c^2 = a^2m^2 + b^2$

$$\frac{p^2}{\sin\alpha} = a^2 \cdot \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + b^2$$

$$\text{లేదా } p^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha$$

13. $2x^2 + y^2 = 8$ దీర్ఘవృత్తానికి కింది నియమాలు పాటించే స్వర్ఘరేఖ సమీకరణాలు కనుక్కొండి.

i) $x - 2y - 4 = 0$ సరళ రేఖకు సమాంతరంగా

A.

i. స్వర్ఘరేఖ వాలు = $\frac{1}{2}$

$$\text{స్వర్ఘరేఖా నియమము } y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

$$y = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{a^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + b^2}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = 1$$

$$y = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{4 \times \frac{1}{4} + 8}$$

$$y = \frac{1}{2}x \pm 3$$

$$\text{స్వర్ఘరేఖల సమీకరణము } 2y - x \pm 6 = 0$$

$$\text{లేదా } x - 2y \pm 6 = 0$$

ii. $x + y + 2 = 0$ సరళ రేఖకు లంబంగా

స్వర్ఘరేఖ దత్త రేఖకు లంబంగా ఉండి కనుక దాని వాలు 1

$$\text{స్వర్ఘరేఖా సమీకరణము } y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

$$y = x \pm \sqrt{4 + 8}$$

$$\text{స్వర్ఘరేఖా సమీకరణము}$$

$$y = x \pm 2\sqrt{3}$$

$$x - y \pm 2\sqrt{3} = 0$$

iii. X - అక్షంతో $\frac{\pi}{4}$ కోణం చేసే

A. స్పృహరేఖా సమీకరణము $y = x \pm 2\sqrt{3}$

14. OB ప్రాస్కాక్షంగా గల దీర్ఘవృత్తం నాభులు S, S' , $\angle SBS' = 60^\circ$ అయితే ఉత్సోధన కనుక్కొండి.

A. నాభులు $S(ae, 0)$

మరియు $S'(-ae, 0)$

B నిరూపకాలు $(0, b)$

$$SB \text{ వాలు} = \frac{b}{-ae}, SB' \text{ వాలు} = \frac{b}{ae}$$

$$\angle SBS' = 90^\circ \Rightarrow SB \text{ వాలు} \times S'B = -1$$

$$-\frac{b}{ae} \cdot \frac{b}{ae} = -1$$

$$b^2 = a^2 e^2$$

$$a^2(1 - e^2) = a^2 e^2$$

$$1 - e^2 = e^2 \Rightarrow 2e^2 = 1$$

$$e^2 = \frac{1}{2}$$

$$e^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

15. $9x^2 + 16y^2 = 144$ దీర్ఘవృత్తానికి అనుబంధ (సహాయక) వృత్త సమీకరణం కనుక్కొండి.

A. దీర్ఘవృత్త సమీకరణము $9x^2 + 16y^2 = 144$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$a^2 = 16, b^2 = 9$$

సహాయక వృత్త సమీకరణము

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$x^2 + y^2 = 16$$

16. దీర్ఘవృత్తం యొక్క దీర్ఘక్కం పొడవు, ప్రాస్యాక్షాల పొడవుకు మూడు రెట్లు ఉంటే ఉత్సోధన కనుక్కోండి.

A. దీర్ఘక్కము = 3

$$2a = 3(2b) \Rightarrow a = 3b$$

$$a = 9b^2 \Rightarrow a^2 = 9b^2(1 - e^2)$$

$$1 - e^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow e^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{దీర్ఘవృత్త ఉత్సోధన} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

17. దీర్ఘవృత్తం $9x^2 + 16y = 144$ యొక్క వాఖుల గుండా పోతూ కనిపు వ్యాసార్థం గల వృత్త వ్యాసార్థం కనుక్కోండి.

A. దీర్ఘవృత్త సమీకరణము $9x^2 + 16y = 144$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad a^2 = 16, b^2 = 9$$

$$a = 4, b = 3$$

వృత్తం SS' ల గుండా పోతూ కనిపు వ్యాసార్థం కలిగి ఉంది

$\therefore S, S'$ వ్యాసం అవుతుంది

$$a^2 e^2 = a^2 - a^2(1 - e^2) = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7$$

కావలసిన వృత్త సమీకరణము $x^2 + y^2 = 7$

18. ఒక దీర్ఘవృత్తపు నాభులు S, T లు, ప్రాస్వాక్షపు ఒక కొన B. STB ఒక సమబాహు త్రిభుజం అయితే దీర్ఘవృత్తం ఉత్సంధ్రత కనుక్కోండి.

A. దీర్ఘవృత్త సమీకరణము $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$S(ae, 0), T(-ae, 0)$ లు నాభులు

$B(0, b)$ ప్రాస్వాక్షం కొన

STB సమబాహు త్రిభుజం

$$SB = ST \Rightarrow SB^2 = ST^2$$

$$a^2 e^2 + b^2 = 4a^2 e^2$$

$$b^2 = 3a^2 e^2$$

$$a^2 (1 - e^2) = 3a^2 e^2$$

$$1 - e^2 = 3e^2$$

$$4e^2 = 1$$

$$e^2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{దీర్ఘవృత్తం ఉత్సంధ్రత} = e = \frac{1}{2}$$

19. ఒకటో పాదంలో నాభిలంబాగ్రం వద్ద $9x^2 + 16y^2 = 144$ దీర్ఘవృత్తానికి స్వరూపాన్ని, అభిలంబ రేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.

A. దీర్ఘవృత్తం $9x^2 + 16y^2 = 144$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{16 - 9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

మొదటి పాదంలో నాభి లంబము కొన

$$P\left(ae, \frac{b^2}{a} \right) = \left(\sqrt{7}, \frac{9}{4} \right)$$

P వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణము

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

$$x \cdot \frac{\sqrt{7}}{16} + \frac{y}{9} \cdot \left(\frac{9}{4}\right) = 1$$

$$\frac{\sqrt{7}x}{16} + \frac{y}{4} = 1$$

$$\text{లేదా } \sqrt{7}x + 4y = 16$$

20. i) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ దీర్ఘవృత్తానికి $lx + my + n = 0$ స్పర్శరేఖ కావడానికి

ii) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ దీర్ఘవృత్తానికి $lx + my + n = 0$ అభిలంబ రేఖ కావడానికి నియమాలు కనుక్కోండి.

A.

i. దీర్ఘవృత్త సమీకరణము $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$P(\theta)$ వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణము

$$\frac{x}{a} \cos \theta + \frac{y}{b} \sin \theta = 1 \quad \dots \quad (1)$$

$$\text{దత్తరేఖ సమీకరణము } lx + my = -n \quad \dots \quad (2)$$

(1), (2) లు ఒకే రేఖను సూచిస్తున్నాయి

Q మరొక ప్రాంతములో ఉన్న రేఖ

$$\frac{\cos \theta}{\frac{a}{l}} = \frac{\sin \theta}{\frac{b}{m} - n} = \frac{1}{-n}$$

$$\frac{\cos \theta}{al} - \frac{\sin \theta}{bm} = \frac{1}{-n}$$

$$\cos \theta = -\frac{al}{n} \sin \theta = -\frac{bm}{n}$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\frac{a^2 l^2}{n^2} + \frac{b^2 m^2}{n^2} = 1$$

$$\Rightarrow a^2 l^2 + b^2 m^2 = n^2 \text{ ఇది కావలసిన నియమం}$$

ii. $lx + my + n = 0$ రేఖ P(a) వద్ద అభిలంబ రేఖ

P(a) వద్ద అభిలంబ రేఖ సమీకరణము

$$\frac{ax}{\cos \theta} - \frac{by}{\sin \theta} = a^2 - b^2 \dots (1)$$

$$= lx + my = -n \dots (2)$$

(1), (2) లను పోల్చగా

$$\frac{l}{\left(\frac{a}{\cos \theta}\right)} = \frac{m}{\left(\frac{-b}{\sin \theta}\right)} = \frac{-n}{a^2 - b^2}$$

$$\frac{l \cos \theta}{a} = \frac{-m \sin \theta}{b} = \frac{-n}{a^2 - b^2}$$

$$\cos \theta = \frac{-an}{l(a^2 - b^2)}, \sin \theta = \frac{bn}{m(a^2 - b^2)}$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\frac{a^2 n^2}{l^2 (a^2 - b^2)^2} + \frac{b^2 n^2}{m^2 (a^2 - b^2)^2} = 1$$

$$\frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{m^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{n^2} \text{ కావలసిన నియమము}$$

21 దీర్ఘవృత్తం $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ నాభిలంబం ఒక కొన వద్ద అభిలంబ రేఖ ప్రాస్యాక్షపు ఒక కొన ద్వారా పోతే $e^4 + e^2 = 1$ అని చూపండి. (దీర్ఘవృత్తం ఉత్సంధత e)

A. దీర్ఘవృత్త సమీకరణము $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

అభిలంబ రేఖ సమీకరణము

$$\frac{a^2x}{x_1} - \frac{b^2y}{y_1} = a^2 - b^2$$

$$L(ae, b^2/a) \text{ వద్ద అభిలంబ రేఖ సమీకరణము}$$

$$\frac{a^2x}{ae} - \frac{b^2y}{(b^2/a)} = a^2 - b^2$$

$$\frac{ax}{e} - ay = a^2 e^2$$

ఈ అభిలంబ రేఖ $B'(0, -b)$ గుండా పోతుంది

$$ab = a^2 e^2$$

$$\Rightarrow b = ae^2$$

$$b^2 = a^2 e^4$$

$$a^2(1 - e^2) = a^2 e^4$$

$$e^4 + e^2 = 1$$