

పరావలయం

అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. $y^2 = 6x$ పరావలయానికి $2y = 5x + k$ స్పర్శరేఖ అయితే k విలువ కనుక్కోండి.

A. $2y = 5x + k$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{5}{2}\right)x + \left(\frac{k}{2}\right)$$

$$y = \left(\frac{5}{2}\right)x + \left(\frac{k}{2}\right) \quad y = mx + c$$

$$\text{తో పోల్చగా } m = \frac{5}{2}, c = \frac{k}{2}$$

$$y = \left(\frac{5}{2}\right)x + \frac{k}{2} \quad y^2 = 6x \text{ కు స్పర్శరేఖ}$$

$$\Rightarrow c = \frac{m}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{2} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{5}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow k = \frac{6}{5}$$

2. $y^2 = 16x$ పరావలయానికి X - అక్షంతో 60° కోణం చేసే స్పర్శరేఖ సమీకరణం కనుక్కోండి.
స్పర్శబిందువును కూడా కనుక్కోండి.

A. $\theta = 60^\circ ; m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

$$y = mx + \frac{a}{m}$$

$$y = \sqrt{3}x + \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3y} = 3x + 4$$

$$\text{స్పర్శబిందువు} = \left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m} \right)$$

$$= \left(\frac{4}{3}, \frac{8}{\sqrt{3}} \right)$$

5. పరావలయం $y^2 = 4ax$ పై ద్వి Y - నిరూపకం పొడవు $8a$ అయితే, ద్వి Y - నిరూపక కొనలను శీర్షానికి కలిపితే వచ్చే రేఖలు లంబంగా ఉంటాయిని చూపండి.

A. $P(at^2, 2at)$ మరియు $P' = (at^2, -2at)$ లు PP' కొనలు

$$8a = PP' = \sqrt{0 + (4at)^2} = 4at \Rightarrow t = 2$$

$$\therefore P(4a, 4a), P' = (4a - 4a)$$

$$\overline{AP} \times \overline{AP'}$$

$$= \left(\frac{4a}{4a} \right) \left(-\frac{4a}{4a} \right) = -1$$

$$\therefore \angle PAP' = \frac{\pi}{2}$$

6. $y^2 = 4ax$, నాభి జ్యా $PQ = SP = l, SQ = l'$ అయితే $\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{1}{a}$ అని చూపండి.

A. $P(at_1^2, 2at_1)$ మరియు $Q(at_2^2, 2at_2)$ లు నాభి జ్యా కొనలు కనుక (1) $t_1 t_2 = -1$

$$l = SP = \sqrt{(at_1^2 - a)^2 + (2at_1 - 0)^2}$$

$$= a\sqrt{(t_1^2 - 1)^2 + 4t_1^2} = a(1 + t_1^2)$$

$$l' = SQ = \sqrt{(at_2^2 - a)^2 + (2at_2 - 0)^2}$$

$$a\sqrt{(t_2^2 - 1)^2 + 4t_2^2} = a(1 + t_2^2)$$

$$\therefore (l - a)(l' - a) = a^2 t_1^2 t_2^2 = a^2 (t_1 t_2)^2$$

$$= a^2 [\because t_1 t_2 = -1]$$

$$ll' - a(l + l') = 0 \Rightarrow \frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{1}{a}$$

3. $y^2 = 2x$ పరావలయంపై నాభి దూరం $\frac{5}{2}$ గా గల బిందువులు కనుక్కోండి.

A. $P(x_1, y_1)$ బిందువు పరావలయం మీద ఉంది

$$y^2 = 2x \text{ నాభి నుండి దూరం } \frac{5}{2} \text{ కనుక}$$

$$y_1^2 = 2x_1 \text{ మరియు } x_1 + a = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow x_1 = 2$$

$$\therefore y_1^2 = 2(2) = 4 \Rightarrow y_1 = \pm 2$$

$$\therefore \text{ కావలసిన బిందువులు } (2, 2) \text{ మరియు } (2, -2)$$

4. నాభి $S(1, -7)$, శీర్షం $A(1, -2)$ గా గల పరావలయం సమీకరణం కనుక్కోండి.

A. $S(1, -7)$, $A(1, -2)$ అనుకుందాము

$$h = 1, k = -2, a = -2 + 7 = 5$$

పరావలయం అక్షం y -అక్షానికి సమాంతరము

పరావలయ సమీకరణము

$$(x-h)^2 = -4a(y-k)$$

$$(x-1)^2 = -20(y+2)$$

$$x^2 - 2x + 1 = -20y - 40$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 20y + 41 = 0$$

స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు - ధీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు

5. నాభి $S(3,5)$, శీర్షం $A(1,3)$ గా గల పరావలయం సమీకరణం కనుక్కోండి.

A. అక్ష సమీకరణము $y - 3 = \frac{3-5}{1-3}(x-1)$

$$= x - 1$$

$$x - y + 2 = 0$$

నియత రేఖ, అక్షానికి లంబంగా ఉంది

నియత రేఖ సమీకరణము $x + y + k = 0$

Z నిరూపకాలు (x, y)

SZ మధ్య బిందువు A

A నిరూపకాలు $\left(\frac{3+x}{2}, \frac{5+y}{2}\right) = (1,3)$

$$\frac{3+x}{2} = 1 \qquad \frac{5+y}{2} = 3$$

$$3+x = 2 \qquad 5+y = 6$$

$$x = 2 - 3 = -1 \qquad y = 6 - 5 = 1$$

Z నిరూపకాలు $(-1,1)$

నియత రేఖ $Z(-1,1)$ గుండా పోతుంది

$$-1 + 1 + k = 0 \Rightarrow k = 0$$

నియత రేఖ సమీకరణము $x + y = 0$

పరావలయం సమీకరణము $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2$

$$= \frac{(lx + my + n)^2}{l^2 + m^2}$$

$$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = \frac{(x + y)^2}{1+1}$$

$$\Rightarrow 2(x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25) = (x + y)^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 12x - 20y + 68 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$\text{i.e., } x^2 - 2xy + y^2 - 12x - 20y + 68 = 0$$

16. $y^2 = 4ax$ పరావలయానికి t_1 వద్ద గీసిన అభిలంబరేఖ పరావలయాన్ని తిరిగి t_2 వద్ద ఖండిస్తే $t_1 t_2 + t_1^2 + 2 = 0$ అని చూపండి.

A. అభిలంబ రేఖ సమీకరణము

$$y - y_1 = \frac{-y_1}{2a}(x - x_1)$$

$$y - 2at_1 = \frac{-2at_1}{2a}(x - at_1^2) \dots (i)$$

(i) రేఖ పరావలయాన్ని తిరిగి $(at_2^2, 2at_2)$ వద్ద ఖండిస్తుంది

$$\therefore 2at_2 - 2at_1 = t_1(at_2^2 - at_1^2)$$

$$-\frac{2}{t_1} = t_1 + t_2 \Rightarrow -2 = t_1^2 + t_1 t_2$$

$$\Rightarrow t_1^2 + t_1 t_2 + 2 = 0$$

6. $(-3, 2), (-3, 1)$ బిందువులను కలిపే రేఖాఖండం నాభి లంబంగా గల పరావలయం సమీకరణం కనుక్కోండి.

A. $L(-3, 2)$ మరియు $L'(-3, 1)$ నాభి లంబము కొనలు S మధ్య బిందువు LL'

$$S \text{ నిరూపకాలు } \left(-3, \frac{3}{2}\right)$$

$$LL' = \sqrt{(-3+3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{0+1} = 1$$

$$4|a| = 1, \Rightarrow |a| = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{4}$$

$$\text{సందర్భం (i) : } a = -\frac{1}{4}$$

$$A \text{ నిరూపకాలు } \left[-3 + \frac{1}{4}, \frac{3}{2} \right]$$

పరావలయ సమీకరణము

$$\left(y - \frac{3}{2} \right)^2 = - \left(x + 3 - \frac{1}{4} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{(2y-3)^2}{4} = \frac{-(4x+12-1)}{4}$$

$$\Rightarrow (2y-3)^2 = -(4x+11)$$

సందర్భం(ii) : $a = \frac{1}{4}$

$$A \text{ నిరూపకాలు } \left[-3, -\frac{1}{4}, \frac{3}{2} \right]$$

పరావలయ సమీకరణము

$$\left(y - \frac{3}{2} \right)^2 = \left(x + 3 + \frac{1}{4} \right)$$

$$\frac{(2y-3)^2}{4} = \frac{(4x+12+1)}{4}$$

i.e., $(2y-3)^2 = 4x+13$

7 $y^2 = 8x$ పరావలయంపై నాభి దూరం 10 గల బిందువుల నిరూపకాలు కనుక్కోండి.

A. పరావలయ సమీకరణము $y^2 = 8x$

నాభి నిరూపకాలు (2,0)

పరావలయం మీద పడని బిందువు $P(x,y)$

దత్తాంశం $SP = 10 \Rightarrow SP^2 = 100$

$$(x-2)^2 + y^2 = 100$$

కనుక $y^2 = 8x$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + 8x = 100$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 8x - 100 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x - 96 = 0 \Rightarrow (x+12)(x-8) = 0$$

$$x+12=0 \quad x-8=0$$

$$x = -12, 8$$

సందర్భం (i) $x = 8$

$$y^2 = 8x = 8 \cdot 8 = 64$$

$$y = \pm 8$$

కావలసిన బిందువుల నిరూపకాలు సందర్భం (8,8) మరియు (8,-8)

సందర్భం (ii) $x = -12$

$$y^2 = 8(-12) = -96 < 0$$

y వాస్తవము కాదు

8. $y^2 = 8x$ పరావలయం, నాభి జ్యా ఒక కొన $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ అయితే రెండవ కొన నిరూపకాలు కనుక్కోండి.

A. $A = \left(\frac{1}{2}, 2\right); S = (2, 0)$

$$B = (x_1, y_1) \Rightarrow \left(\frac{y_1^2}{8}, y_1\right)$$

ASB నాభి జ్యా

\therefore SA, SB వాలులు సమానము

$$\text{SA వాలు} = \frac{0-2}{2-\frac{1}{2}} = \frac{-4}{\frac{3}{2}}$$

$$\text{SB వాలు} = \frac{y_1-0}{\frac{y_1^2}{8}-2} = \frac{8y_1}{y_1^2-16} = \frac{-4}{3}$$

$$24y_1 = -4y_1^2 + 64S$$

$$4y_1^2 + 24y_1 - 64 = 0$$

$$\Rightarrow y_1^2 + 6y_1 - 16 = 0 \Rightarrow (y_1 + 8)(y_1 - 2) = 0$$

$$y_1 = 2, -8$$

$$x_1 = \frac{1}{2}, 8 \text{ కావున } (8, -8) \text{ రెండవ కొన.}$$

9. $A(-2,1), B(1,2), C(-1,3)$ బిందువుల గుండా పోతూ, X - అక్షానికి సమాంతరంగా అక్షరేఖ గల పరావలయ సమీకరణం కనుక్కోండి.

- A. అక్షం X - అక్షానికి సమాంతరము

సాధరణ సమీకరణము

$$x = ay^2 + by + c$$

$(-2,1)(1,2)(-1,3)$ బిందువుల గుండా పోతుంది

$$-2 = a + b + c \dots (i)$$

$$1 = 4a + 2b + c \dots (ii)$$

$$-1 = 9a + 3b + c \dots (iii)$$

$$(ii) - (iii) \quad 2 = -5a + b$$

$$(ii) - (i) \quad \underline{3 = 3a + b}$$

$$5 = -2a - \frac{5}{2} = a$$

$$\frac{21}{2} = b$$

$$-10 = c$$

$$x = -\frac{5}{2}y^2 + \frac{21}{2}y - 10$$

$$5y^2 + 2x - 21y + 20 = 0$$

10. $(4,5),(-2,11),(-4,21)$ బిందువుల గుండా పోతూ, Y - అక్షానికి సమాంతరంగా అక్షరేఖ గల పరావలయ సమీకరణం కనుక్కోండి.

A. సాధరణ సమీకరణము $y = ax^2 + bx + c$

$(4,5),(-2,11),(-4,21)$ ల గుండా పోతుంది

$$5 = 16a + 4b + c \dots (i)$$

$$11 = 4a - 2b + c \dots (ii)$$

$$+21 = 16a - 4b + c \dots (iii)$$

(iii) - (i) చేయగా

$$6 = -12a - 6b$$

$$(iii) - (ii) 10 = 12a - 2b$$

సాధించగా

$$b = -2, a = 1/2, c = 5$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$$

$$x^2 - 2y - 4x + 10 = 0$$

11. నాభి $(-2,3)$ నియత రేఖ $2x + 3y - 4 = 0$ గా గల పరావలయ సమీకరణం కనుక్కోండి. నాభిలంబం పొడవు, అక్షరేఖ సమీకరణాలు కూడా కనుక్కోండి.

A. $P(x_1, y_1)$ పరావలయం మీద బిందువు

$S(-2,3)$ నాభి

$$SP^2 = (x_1 + 2)^2 + (y_1 - 3)^2$$

నియత రేఖ సమీకరణము $2x + 3y - 4 = 0$

PM = P నుండి నియత రేఖ మీదకు

$$PM = \frac{|2x_1 + 3y_1 - 4|}{\sqrt{4+9}}$$

పరావలయ నిర్వచనం ప్రకారం

$$SP = PM \Rightarrow SP^2 = PM^2$$

$$(x_1 + 2)^2 + (y_1 - 3)^2 = \frac{(2x_1 + 3y_1 - 4)^2}{13}$$

$$\Rightarrow 13(x_1^2 + 4x_1 + 4 + y_1^2 - 6y_1 + 9)^2$$

$$= (2x_1 + 3y_1 - 4)^2$$

$$\Rightarrow 13x_1^2 + 13y_1^2 + 52x_1 - 78y_1 + 169$$

$$\Rightarrow 4x_1^2 + 9y_1^2 + 16 + 12x_1y_1 - 16x_1 - 24y_1$$

$$\Rightarrow 9x_1^2 - 12x_1y_1 + 4y_1^2 + 68x_1 - 54y_1 + 153 = 0$$

బిందు పథము $P(x_1, y_1)$

$$9x^2 - 12xy + 4y^2 + 68x - 54y + 153 = 0$$

నాభి లంబము పొడవు = $4a$

S నుండి నియత రేఖ మీద లంబదూరము

$$= \frac{|2(-2 + 3 \cdot 3 - 4)|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

$$2a = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

నాభి లంబము పొడవు = $4a = \frac{1}{\sqrt{13}}$ అక్షం, నియత రేఖకు లంబంగా ఉంటుంది

నియత రేఖ సమీకరణాన్ని

$$3x - 2y + k = 0 \text{ తీసుకొనగలము}$$

ఈ రేఖ $S(-2, 3)$ గుండా పోతుంది

$$-6 - 6 + k = 0 \Rightarrow k = 12$$

$$\text{అక్ష సమీకరణము } 3x - 2y + 12 = 0$$

12. $y^2 = 16x$ పరావలయానికి సరళరేఖ $2x - y + 5 = 0$ కు సమాంతరంగా ఉండే, లంబంగా ఉండే స్పర్శరేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి. స్పర్శ బిందువుల నిరూపకాలు కనుక్కోండి.

A. పరావలయ సమీకరణము $y^2 = 16x$

స్పర్శరేఖ $2x - y + 5 = 0$ కు సమాంతరం

స్పర్శరేఖ సమీకరణము $y - 2x + c$

స్పర్శరేఖ నియమము $c = \frac{a}{m} = \frac{4}{2} = 2$

సమాంతర స్పర్శరేఖ సమీకరణము $y = 2x + 2$

$$2x - y + 2 = 0$$

స్పర్శ బిందువు $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right) = \left(\frac{4}{8}, \frac{8}{2}\right) = (1, 4)$

$$m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{2}$$

లంబంగా ఉండే స్పర్శరేఖ వాలు

$$y = m'x + c'$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)x + c'$$

$$c' = \frac{a}{m'} = \frac{4}{\left(-\frac{1}{2}\right)} = -8$$

లంబ స్పర్శ రేఖ సమీకరణము

$$y = -\frac{1}{2}x - 8$$

$$2y = -x - 16$$

$$x + 2y + 16 = 0$$

స్పర్శ బిందువు $\left(\frac{a}{m'}, \frac{2a}{m'}\right)$

$$= \left(\frac{4}{\left(\frac{1}{4}\right)}, \frac{8}{\left(-\frac{1}{2}\right)} \right)$$

$$= (16, -16)$$

13. $y^2 = 4ax$ పరావలయానికి $lx + my + n = 0$ అభిలంబరేఖ అయితే $al^2 + 2alm^2 + nm^2 = 0$ అని చూపండి.

A. పరావలయ సమీకరణము $y^2 = 4ax$

అభిలంబరేఖ సమీకరణము $y + tx = 2at + at^3$

$$tx + y - (2at + at^3) = 0 \dots (1)$$

దత్త సమీకరణము

$$lx + my + n = 0 \dots (2)$$

(1), (2) ఒకే రేఖను సూచిస్తున్నాయి

గుణకాలను పోల్చగా

$$\frac{t}{l} = \frac{1}{m} = \frac{-(2at + at^3)}{n}$$

$$\frac{t}{l} = \frac{1}{m} \Rightarrow t = \frac{l}{m}$$

$$\frac{1}{m} = \frac{-(2at + at^3)}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{-n}{m} = 2a \cdot t + at^3$$

$$\frac{2al}{m} + \frac{al^3}{m^3}$$

m^3 తో గుణించగా

$$-nm^2 = 2alm^2 + al^3$$

$$\Rightarrow al^3 + 2alm^2 + nm^2 = 0$$

14. వృత్తం $x^2 + y^2 = 2a^2$, పరావలయ $y^2 = 8ax$ లకు ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు $y = \pm(x + 2a)$

A. పరావలయ స్పర్శ రేఖ సమీకరణము $y^2 = 8ax$

$$y = mx + \frac{2a}{m}$$

$$m^2x - my + 2a = 0 \dots (1)$$

(i) రేఖ $x^2 + y^2 = 2a^2$, వృత్తాన్ని స్పృశిస్తుంది $(0,0)$

(ii) కేంద్రం నుండి లంబదూరము $a\sqrt{2}$

$$\left| \frac{2a}{\sqrt{m^2 + m^4}} \right| = a\sqrt{2}$$

$$\text{లేదా } 4 = 2(m^4 + m^2)$$

$$m^4 + m^2 - 2 = 0$$

$$(m^2 + 2)(m^2 - 1) = 0 \quad m = \pm 1$$

కావలసిన స్పర్శ రేఖ

$$y = (1)x + \frac{2a}{(1)}, y = (-1)x + \frac{2a}{(-1)}$$

$$\Rightarrow y = \pm(x + 2a)$$

15. $x^2 = 4ay$ పరావలయానికి $y = mx + c$ స్పర్శరేఖ కావడానికి నియమం కనుక్కోండి.

A. $x^2 = 4ay$ కు స్పర్శ రేఖ, స్పర్శ రేఖ వాలు ' m_1 ' పదాలలో

$$x = m_1y + \frac{a}{m_1}$$

$$y = \frac{x}{m_1} - \frac{a}{m_1^2} \dots (i)$$

$$y = mx + c \dots (ii)$$

(i) (ii) పోల్చగా

$$m = \frac{1}{m_1}; c = \frac{-a}{m_1^2}$$

$$m_1 = \frac{1}{m}$$

$$c = \frac{-a}{(1/m)^2}$$

$$c = -am^2 \text{ కావలసిన నియమము}$$

17. $y^2 = 4ax$ పరావలయం దృష్ట్యా, $x + 4a = 0$ పై ఏ బిందువు స్పర్శ జ్యా అయినా శీర్షం వద్ద లంబకోణం చేస్తుందని చూపండి.

A. $P(x_1, y_1)$ మీది బిందువు $x + 4a = 0$

$$x_1 + 4a = 0$$

$$x_1 = -4a$$

P నిరూపకాలు $(-4a, y_1)$

QR, P యొక్క స్పర్శ జ్యా

$$\text{QR సమీకరణము } y \cdot y_1 = 2a(x - 4a)$$

$$= 2ax - 8a^2$$

$$8a^2 = 2ax - y \cdot y_1$$

$$\frac{2a - yy_1}{8a^2} = 1 \dots (1)$$

$$\text{పరావలయ సమీకరణము } y^2 = 4ax \dots (2)$$

(1) సహాయంతో (2) ను సమఘాతపరిస్తే AQ, AR ల ఉమ్మడి సమీకరణాలు

$$y^2 = \frac{4ax(2ax - yy_1)}{8a^2}$$

$$2ay^2 = 2ax^2 - y_1xy$$

$$2ax^2 - y_1xy - 2ay^2 = 0$$

$$x^2 \text{ గుణకము} + y^2 \text{ గుణకము}$$

$$2a - 2a = 0$$

$\therefore \angle AQR = 90^\circ \Rightarrow QR$ శీర్షం వద్ద లంబకోణం చేస్తుంది

18. $y^2 = 8x$ పరావలయం పై $(2, 4)$ వద్ద స్పర్శరేఖ, అభిలంబరేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.

A. $y^2 = 4ax$ కు (x_1, y_1) వద్ద స్పర్శరేఖ

$$yy_1 = 2a(x + x_1)$$

$$(2, 4) \text{ వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణము } y^2 = 8x$$

$$4y = 4(x + 2) [4a = 8 \Rightarrow a = 2]$$

$$y = x + 2$$

(x_1, y_1) వద్ద అభిలంబ సమీకరణము

$$(y - y_1) - \frac{y_1}{2a}(x - x_1)$$

$$(y - 4) = \frac{-4}{4}(x - 2)$$

$$y - 4 = -x + 2 \Rightarrow x + y = 6$$

19. క్రింది పరావలయాలకు శీర్షం, నాభుల నిరూపకాలు, నియతరేఖ, అక్షరేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.

(i) $y^2 = 16x$

(ii) $3x^2 - 9x + 5y - 2 = 0$

(iii) $y^2 - x + 4y + 5 = 0$

A.

i. $y^2 = 16x$, ను $y^2 = 4ax$ తో పోల్చగా

$$4a = 16 \Rightarrow a = 4$$

$$\text{శీర్షం నిరూపకాలు} = (0, 0)$$

$$\text{నాభి నిరూపకాలు} = (a, 0) = (4, 0)$$

$$\text{నియతరేఖ సమీకరణము} : x + a = 0, \text{ i.e., } x + 4 = 0$$

$$\text{అక్షం సమీకరణము } y = 0$$

ii. $3x^2 - 9x + 5y - 2 = 0$

$$3(x^2 - 3x) = 2 - 5y$$

$$\Rightarrow 3\left(x^2 - 2x\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{9}{4}\right) = 2 - 5y + \frac{27}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{5}{3}\left(y - \frac{7}{4}\right), \text{ దీనిని}$$

$$(x - h)^2 = -4a(y - k) \text{ తో పోల్చగా}$$

$$a = \frac{5}{12}, h = \frac{3}{2}, k = \frac{7}{4}$$

$$\therefore \text{శీర్షం నిరూపకాలు} = (h, k) = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)$$

$$\text{నాభి నిరూపకాలు} = (h, k - a)$$

$$= \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4} - \frac{5}{12}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{4}{3}\right)$$

$$\text{నియతరేఖ సమీకరణము } y - k - a = 0$$

$$\text{i.e, } 6y - 13 = 0$$

$$\text{అక్షం సమీకరణము } x - h = 0$$

$$\text{i.e, } 2x - 3 = 0$$

iii. $y^2 - x + 4y + 5 = 0 \Rightarrow (y - (-2))^2 = (x - 1),$

$$\text{ను } (y - k)^2 = 4a(x - h), \text{ తో పోల్చగా}$$

$$(h, k) = (1, -2) \text{ మరియు } a = \frac{1}{4},$$

$$\text{శీర్షం నిరూపకాలు } (h, k) = (1, -2)$$

$$\text{నాభి నిరూపకాలు } (h + a, k) = \left(\frac{5}{4}, -2\right)$$

$$\text{నియతరేఖ సమీకరణము } x - h + a = 0$$

i.e, $4x - 3 = 0$

అక్షం సమీకరణము $y - k = 0$

i.e, $y + 2 = 0$

20. పరావలయం $y^2 = 4ax$ కు సరళరేఖ $lx + my + n = 0$ స్పర్శరేఖ కావడానికి నియమం కనుక్కోండి.
స్పర్శ బిందువు నిరూపకాలను కనుక్కోండి.

A. $lx + my + n = 0$ రేఖ $y^2 = 4ax$, వద్ద స్పర్శరేఖ

$(at^2, 2at)$ వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణము

$$x - yt + at^2 = 0$$

కాబట్టి $lx + my + n = 0$, $x - yt + at^2 = 0$ లు ఒకే రేఖను సూచిస్తాయి

$$\frac{l}{1} = \frac{m}{-t} = \frac{n}{at^2} \Rightarrow t = \frac{-m}{l} \quad \text{మరియు} \quad t = \frac{-n}{ma}$$

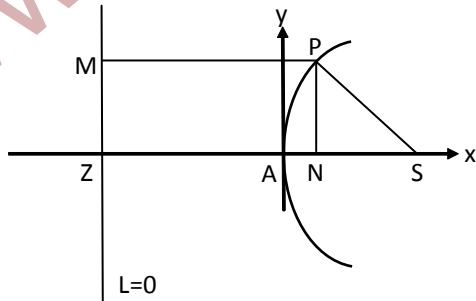
$$\therefore -t = \frac{m}{l} = \frac{n}{ma} \Rightarrow m^2 a = nl$$

స్పర్శ బిందువు $P(at^2, 2at)$

$$= \left(\frac{am^2}{l}, \frac{-2am}{l} \right) \quad \text{లేదా} \quad \left(\frac{n}{l}, \frac{-2am}{l} \right)$$

21. పరావలయం సమీకరణాన్ని ప్రామాణిక రూపంలో కనుగొనుము

A.



S నాభి, ZM నియత రేఖ

S నుండి నియత రేఖ మీదకు లంబ పాదము SZ

SZ మధ్య బిందువు A

SA = AZ \Rightarrow A పరావలయం మీద బిందువు

AS ను X - అక్షంగా తీసుకోండి

A కు లంబంగా AY అని గీయుము

\therefore AY రేఖ Y - అక్షం

A మూలబిందువు

AS = a \Rightarrow S నిరూపకాలు (a, 0)

P(x₁, y₁) పరావలయం మీద బిందువు

ZM కు లంబంగా PN, X - అక్షానికి లంబంగా PM ను గీయుము

PM = NZ = NA + AZ = x₁ + a

P పరావలయం మీద బిందువు

$\Rightarrow SP = PM \Rightarrow SP^2 = PM^2$

$\Rightarrow (x_1 - a)^2 + (y_1 - 0)^2 = (x_1 + a)^2$

$\Rightarrow y_1^2 = (x_1 + a)^2 - (x_1 - a)^2$

= 4ax₁

P(x₁, y₁) బిందుపథం y² = 4ax

ఇది పరావలయం యొక్క ప్రామాణిక సమీకరణము.

22. y² = 4ax (a > 0) పరావలయం పై (x₁, y₁), (x₂, y₂), (x₃, y₃) బిందువుల వద్ద గీసిన స్పర్శ రేఖ ల తో ఏర్పడే త్రిభుజ వైశాల్యం

$\frac{1}{16a} |(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)|$ sq.units. అని చూపుము.

Sol. D(x₁, y₁) = (at₁², 2at₁)

E(x₂, y₂) = (at₂², 2at₂)

F(x₃, y₃) = (at₃², 2at₃) లు y² = 4ax (a > 0)

పరావలయం పై మూడు బిందువు లు అను కొనుము.

D, E, F ల వద్ద స్పర్శ రేఖల సమీకరణాలు

$$t_1y = x + at_1^2 \quad \dots(1)$$

$$t_2y = x + at_2^2 \quad \dots(2)$$

$$t_3y = x + at_3^2 \quad \dots(3)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow (t_1 - t_2)y = a(t_1 - t_2)(t_1 + t_2)$$

$$\Rightarrow y = a(t_1 + t_2) \Rightarrow x = at_1t_2$$

\therefore D, E ల వద్ద స్పర్శ రేఖల ఖండన బిందువు $P[at_1t_2, a(t_1+t_2)]$.

ఇదే విధంగా E, F ల వద్ద స్పర్శ రేఖల ఖండన బిందువు $Q[at_2t_3, a(t_2+t_3)]$ F, D ల వద్ద స్పర్శ రేఖల

ఖండన బిందువు $R[at_3t_1, a(t_3+t_1)]$.

ΔPQR త్రిభుజ పైశాల్యం

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} at_1t_2 & a(t_2+t_2) & 1 \\ at_2t_3 & a(t_2+t_3) & 1 \\ at_1t_3 & a(t_1+t_3) & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{a^2}{2} \begin{vmatrix} t_1t_2 & t_2+t_2 & 1 \\ t_2t_3 & t_2+t_3 & 1 \\ t_1t_3 & t_1+t_3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{a^2}{2} \begin{vmatrix} t_1(t_2-t_3) & t_2-t_3 & 0 \\ t_3(t_2-t_1) & t_2-t_1 & 0 \\ t_1t_3 & t_1+t_3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{a^2}{2} (t_2-t_3)(t_2-t_1) \begin{vmatrix} t_1 & 1 & 0 \\ t_3 & 1 & 0 \\ t_1t_3 & t_1+t_3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{a^2}{2} |(t_2-t_3)(t_2-t_1)(t_1-t_3)| \\ &= \frac{1}{16a} |2a(t_1-t_2)2a(t_2-t_3)2a(t_3-t_1)| \\ &= \frac{1}{16a} |(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)| \text{ sq. units.} \end{aligned}$$

23. $y^2 = 4ax$ పరావలయం లో అంతర్లిఖించిన త్రిభుజ శీర్షం y నిరూపకాలు

y_1, y_2, y_3 అయితే త్రిభుజ వైశాల్యం $\frac{1}{8a} |(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)|$ అని చూపుము.

Sol.

$y^2 = 4ax$ ఇచ్చిన పరావలయం

$P(x_1, y_1) = (at_1^2, 2at_1), Q(x_2, y_2) = (at_2^2, 2at_2), R(x_3, y_3) = (at_3^2, 2at_3)$ లు

ΔPQR యొక్క శీర్షములు అనుకొనుము.

ΔPQR త్రిభుజ వైశాల్యం =

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} at_1^2 - at_2^2 & at_2^2 - at_3^2 \\ 2at_1 - 2at_2 & 2at_2 - 2at_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} |2a^2(t_1^2 - t_2^2)(t_2 - t_3) - 2a^2(t_2^2 - t_3^2)(t_1 - t_2)|$$

$$= a^2 |(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_1 + t_2 - t_2 - t_3)|$$

$$= a^2 |(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)|$$

$$= \frac{a^3}{a} |(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)|$$

$$= \frac{1}{8a} |(2at_1 - 2at_2)(2at_2 - 2at_3)(2at_3 - 2at_1)|$$

$$= \frac{1}{8a} |(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)|$$

$P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), R(x_3, y_3)$ లు ΔPQR యొక్క శీర్షములు.

24. $y^2 = 4ax$ పరావలయం నకు బాహ్య బిందువు P నుండి గీసిన స్పర్శ రేఖలు అక్షరేఖతో θ_1, θ_2 కోణాలను చేస్తున్నాయి. $\cot \theta_1 + \cot \theta_2$ విలువ స్థిర 'a' సంఖ్య అయితే అలాంటి P లు క్షితిజ సమాంతర రేఖ వై ఉంటాయని చూపుము.

Sol. పరావలయ సమీకరణం $y^2 = 4ax$

స్పర్శ రేఖ సమీకరణం

$$y = mx + \frac{a}{m}$$

స్పర్శ రేఖ $P(x_1, y_1)$ గుండా పోతోంది కావున

$$y_1 = mx_1 + \frac{a}{m}$$

$$\Rightarrow my_1 = m^2x_1 + a \Rightarrow m^2x_1 - my_1 + a = 0$$

m_1, m_2 లు వై సమీకరణం యొక్క మూలాలు అనుకోండి. అప్పుడు m_1, m_2 లు స్పర్శ రేఖల వాలులు అవుతాయి.

$$m_1 + m_2 = \frac{y_1}{x_1}, m_1 m_2 = \frac{a}{x_1} .$$

$$\cot\theta_1 + \cot\theta_2 = a$$

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = a \Rightarrow \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = a$$

$$\Rightarrow m_1 + m_2 = a \cdot m_1 m_2$$

$$\frac{y_1}{x_1} = a \cdot \frac{a}{x_1} \Rightarrow y_1 = a^2$$

$P(x_1, y_1)$ యొక్క బిందు పథం $y = a^2$, ఒక క్షితిజ సమాంతర రేఖ.

25. $2x^2 + 2y^2 = a^2$ వృత్తం $y^2 = 4ax$ పరావలయం నకు ఉమ్మడిస్పర్శ రేఖలు $y^2 = -4ax$ యొక్క నాభి వద్ద ఖండించుకుంటాయని చూపుము.

Sol.

$$y^2 = 4ax$$

$y = mx + \frac{a}{m}$ స్పర్శ రేఖ సమీకరణం అనుకునుము.

కానీ ఈరేఖ $2x^2 + 2y^2 = a^2$ కు కూడా స్పర్శ రేఖ

కావున వ్యాసార్థం = వృత్తకేంద్రం నుండి రేఖకు గల లంబ దూరం

$$2x^2 + 2y^2 = a^2$$

$$\Rightarrow \left| \frac{a/m}{\sqrt{m^2+1}} \right| = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{a^2/m^2}{m^2+1} = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2a^2}{m^2} = a^2(m^2+1)$$

$$\Rightarrow 2 = m^4 + m^2 \Rightarrow m^4 + m^2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (m^2 - 1)(m^2 + 2) = 0 \quad (\because m^2 + 2 \neq 0)$$

$$m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$$

కావున స్పర్శ రేఖల సమీకరణములు

$$y = -x - a \text{ and } y = x + a .$$

ఈ స్పర్శ రేఖల ఖండన బిందువు $(-a, 0)$.

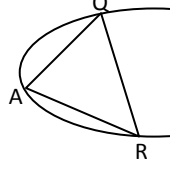
ఈ బిందువు $y^2 = -4ax$. పరావలయం యొక్క నాభి అవుతుంది.

26. $y^2 = 4ax$ పరావలయం పై t బిందువు వద్ద అభిలంబ జ్యా, శీర్షం వద్ద లంబ కోణం చేస్తే $t = \pm\sqrt{2}$ అని చూపుము,

Sol. పరావలయ సమీకరణం $y^2 = 4ax$... (1)

t బిందువు వద్ద అభిలంబ జ్యా $tx + y = 2at + at^3$

$$\frac{tx + y}{2at + at^3} = 1 \quad \dots (2)$$



(2) దృష్ట్యా (1) ని సమఘాతపరచగా AQ, AR ల యొక్క సంయుక్త సమీకరణం

$$y^2 = \frac{4ax(tx + y)}{a(2t + t^3)}$$

$$y^2(2t + t^3) = 4tx^2 + 4xy$$

$$4tx^2 + 4xy - (2t + t^3)y^2 = 0$$

AQ, AR లు లంబగా ఉన్నాయి కావున

$$x^2 \text{ గుణకం} + y^2 \text{ గుణకం} = 0$$

$$4t - 2t - t^3 = 0$$

$$2t - t^3 = 0$$

$$-t(t^2 - 2) = 0$$

$$t^2 - 2 = 0 \Rightarrow t^2 = 2 \Rightarrow t = \pm\sqrt{2}$$