

## SYSTEM OF CIRCLES

1. క్రింద ఇచ్చిన మూడు వృత్తాలలో ప్రతి వృత్తాన్ని లంబచేదనం చేసే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుకొండి.

$$1) x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0 ;$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0 ;$$

$$2x^2 + 2y^2 + 6x + 8y - 3 = 0$$

A. వృత్త సమీకరణము

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$\text{దత్త వృత్తము పై } 3 \text{ వృత్తాను లంబంగా ఉంటుంది కనుక } 2g(1) + 2f(2) = c + 1 \dots \dots \text{(i)}$$

$$2g\left(\frac{3}{2} + 2f(2)\right) = c - \frac{3}{2} \dots \dots \text{(ii)}$$

$$2f(-1) + 2f(3) = c - 3 \dots \dots \text{(iii)}$$

$$\text{(iii)} - \text{(ii)}$$

$$-5g + 2f = \frac{-3}{2} \quad -10g + 4f = -3 \dots \dots \text{(iv)}$$

$$\text{(iii)} - \text{(i)}$$

$$-4g + 2f = -4$$

$$f - 2g = -2 \dots \dots \text{(v)}$$

(iv), (v) లను సాధించగా,

$$f = -7, g = -5/2, c = -34$$

$\therefore$  వృత్త సమీకరణము

$$x^2 + y^2 - 5x - 14y - 34 = 0$$

$$2) \quad x^2 + y^2 + 2x + 17y + 4 = 0, \quad x^2 + y^2 + 7x + 6y + 11 = 0, \quad x^2 + y^2 - x + 22y + 3 = 0$$

$$\text{SOL. } x^2 + y^2 + 2x + 17y + 4 = 0 \longrightarrow (1)$$

$$x^2 + y^2 + 7x + 6y + 11 = 0 \longrightarrow (2)$$

$$x^2 + y^2 - x + 22y + 3 = 0 \longrightarrow (3)$$

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  దత్త వృత్తము పై 3 వృత్తాను లంబంగా ఉంటుంది కనుక

$$\Rightarrow 2g + 17f = c + 4 \longrightarrow (5)$$

$$\Rightarrow 7g + 6f = c + 11 \longrightarrow (6)$$

$$\Rightarrow -g + 22f = c + 3 \longrightarrow (7)$$

$$(5) - (6) \Rightarrow -5g + 11f = -7 \longrightarrow (8)$$

$$(6) - (7) \Rightarrow 8g - 16f = 8 \Rightarrow g - 2f = 1 \longrightarrow (9)$$

$$(8) + 5 \times (9) \Rightarrow f = -2$$

$$(9) \Rightarrow g - 2(-2) = 1 \Rightarrow g = -3$$

$$(5) \Rightarrow 2(-3) + 17(-2) = c + 4 \Rightarrow c = -44.$$

$$\therefore \text{వృత్త సమీకరణము } x^2 + y^2 - 6x - 4y - 44 = 0$$

3.  $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$  వృత్తాన్ని లంబంగా ఖండిస్తూ, మూల బిందువు గుండా పోతూ  $x + y = 4$  అనే రేఖ పై కేంద్రంగల వృత్త సమీకరణం కనుక్కొండి.

Sol :

$$\text{వృత్తం } x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \longrightarrow (1) \text{ అనుకుందాం}$$

దత్త వృత్తము  $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$  ను లంబంగా ఉంటుంది

$$\Rightarrow -4g + 2f = c + 4 \longrightarrow (2)$$

$$(1) \text{ మూల బిందువు గుండా పోతోది కావున } \Rightarrow c = 0$$

$$(2) \Rightarrow -4g + 2f = 4 \longrightarrow (3)$$

$$(1) \text{ కొర్చు } (-g, -f)$$

$$\text{కొర్చు } x + y = 4 \text{ పై ఉంది. కావున}$$

$$\Rightarrow -g - f = 4 \longrightarrow (4)$$

$$(3) + 2(4) \Rightarrow -6g = 12 \Rightarrow g = -2$$

$$(4) \Rightarrow -(-2) - f = 4 \Rightarrow f = 2 - 4 = 2$$

$$\therefore \text{పృత్త సమీకరణము } x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$$

18.  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c}$  అయితే  $x^2 + y^2 + 2ax + c = 0$ ,  $x^2 + y^2 + 2by + c = 0$  వృత్తాలు ఒకదానికొకటి స్వశీంచుకుంటాయని చూపండి.

A. వృత్తాల కేంద్రాలు  $C_1(-a, 0)$  మరియు  $C_2(0, -b)$

$$1 \text{ వ వృత్త వ్యాసార్థము } \sqrt{a^2 - c} = r_1$$

$$2 \text{ వ వృత్త వ్యాసార్థము } \sqrt{b^2 - c} = r_2$$

$$C_1 C_2 = r_1 + r_2$$

$$(C_1 C_2)^2 = (r_1 + r_2)^2$$

$$(a^2 + b^2) = a^2 - c + b^2 - c + 2\sqrt{a^2 - c}\sqrt{b^2 - c}$$

$$c = \sqrt{a^2 - c} \cdot \sqrt{b^2 - c}$$

$$c = (a^2 - c)(b^2 - c)$$

$$c^2 = -c(a^2 + b^2) + a^2 b^2 + c^2$$

$$\text{అది } c(a^2 + b^2) = a^2 b^2 \text{ అది } \frac{1}{c} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

iii.  $x^2 + y^2 + 2x + 17y + 4 = 0$

$$x^2 + y^2 + 7x + 6y + 11 = 0$$

$$x^2 + y^2 - x + 22y + 3 = 0$$

A. దత్త వృత్తాల సమీకరణము

$$S_1 \equiv x^2 + y^2 + 2x + 17y + 4 = 0 \dots (\text{i})$$

$$S_1 \equiv x^2 + y^2 + 7x + 6y + 11 = 0 \dots (\text{ii})$$

$$S_1 \equiv x^2 + y^2 - x + 22y + 3 = 0 \dots (\text{iii})$$

$$S = 0, S_1 = 0 \text{ ఉ మూలాక్షము } S - S_1 = 0$$

$$-5x + 11y - 7 = 0$$

$$5x - 11y + 7 = 0 \quad \dots \text{ (iv)}$$

$S = 0, S_{11} = 0$  ల మూలాక్షము  $S - S_{11} = 0$

$$3x - 5y + 1 = 0 \quad \dots \text{ (v)}$$

(iv), (v) లను సాధించగా

$$\begin{array}{ccccc} & x & & y & \\ -11 & \cancel{x} & 7 & \cancel{y} & 1 \\ -5 & \cancel{x} & 1 & \cancel{y} & 3 \\ & & & & -5 \end{array}$$

$$\frac{x}{-11+35} = \frac{y}{21-5} = \frac{1}{-25+33}$$

$$x = \frac{24}{8} = 3, y = \frac{16}{8} = 2$$

మూల కేంద్రము  $P(3,2)$

$PT = P$  నుండి  $S = 0$  కు స్వర్ణరేఖ పొడవు

$$= \sqrt{9+4+6+34+4} = \sqrt{57}$$

దత్త వృత్తాలను లంబంగా ఖండించే వృత్త స్థితికరణము

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 57$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 - 57 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 44 = 0$$