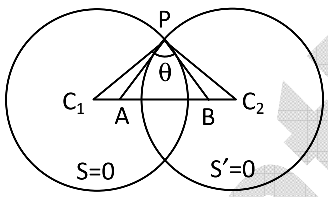
వృత్త సరణులు - I

Theorem: r_1, r_2 లు వ్యాసార్ధాలు గాగల వృత్త కేంద్రాల మధ్య దూరం d మరియు వాటి మధ్య కోణం θ అయితే $\cos\theta = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}$ అనిచూపుము.

Proof: $S = 0, S' = 0$ లను దత్త వృత్తాలు అనుకొనుము.

C_1, C_2 లు వృత్త కేంద్రాలు r_1, r_2 లు వ్యాసార్ధాలు అనుకొనుము. అప్పుడు $C_1C_2 = d$.

ఖండాన బిందువు P అనుకొనుము



$PC_1 = r_1, PC_2 = r_2, \angle APB = \theta$

$S = 0$ కు PB స్పర్శ రేఖ కావున , $\angle C_1PB = \pi/2$

$S' = 0$ కు PA స్పర్శ రేఖ కావున , $\angle C_2PA = \pi/2$

$\angle C_1PC_2 = \angle C_1PB + \angle C_2PA - \angle APB = \pi/2 + \pi/2 - \theta = \pi - \theta$

ΔC_1PC_2, కు కొసైన్ సూత్రం వ్రాయగ

$$C_1^2C_2^2 = PC_1^2 + PC_2^2 - 2PC_1 \cdot PC_2 \cos\angle C_1PC_2 \Rightarrow d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\pi - \theta) \Rightarrow d^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos\theta$$

$$\Rightarrow 2r_1r_2\cos\theta = d^2 - r_1^2 - r_2^2 \Rightarrow \cos\theta = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}$$

Corollary:

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, $x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$ వృత్తాల మధ్య **θ** కోణం అయితే

$\cos\theta = \frac{c + c' - 2(gg' + ff')}{2\sqrt{g^2 + f^2 - c}\sqrt{g'^2 + f'^2 - c'}}$ అని చూపుము.

Proof: C_1, C_2 లు వృత్త కేంద్రాలు, r_1, r_2 లు వ్యాసార్ధాలు $C_1C_2 = d$ అనుకొనుము.

$\therefore\ C_1 = (-g, -f), C_2 = (-g', -f'),$

$r_1 = \sqrt{g^2 + f^2 - c},\ r_2 = \sqrt{g'^2 + f'^2 - c'}$

$$\cos\theta = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2} = \frac{(g-g')^2 + (f-f')^2 - (g^2+f^2-c) - (g'^2+f'^2-c')}{2\sqrt{g^2+f^2-c}\sqrt{g'^2+f'^2-c'}}$$

$$= \frac{g^2+g'^2-2gg'+f^2+f'^2-2ff'-g^2-f^2+c-g'^2-f'^2+c'}{2\sqrt{g^2+f^2-c}\sqrt{g'^2+f'^2-c'}}$$

$$= \frac{c+c'-2(gg'+ff')}{2\sqrt{g^2+f^2-c}\sqrt{g'^2+f'^2-c'}}.$$

$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, $S' \equiv x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$ వృత్తాలు లంబంగా ఖండించుకుంటే $2gg' + 2ff' = c + c'$.

Very Short Answer Questions

1. $x^2+y^2 + 2by-k = 0$, $x^2+y^2+2ax+8=0$ వృత్తాలు లంబంగా ఖండించు కుంటే 'k' విలువ కనుగొనుము

$x^2+y^2 + 2by-k = 0$, $x^2+y^2+2ax+8=0$

Sol. వృత్తాలు : $x^2+y^2 + 2by-k = 0$, $x^2+y^2+2ax+8=0$

$g_1 = 0;\ f_1 = b;\ c_1 = -k$

$g_2 = a;\ f_1 = 0;\ c_1 = 8$

వృత్తాలు లంబంగా ఖండించుకుంటున్నా యి కావున

$2g_1g_2 + 2f_1 f_2 = c_1 + c_2$

$2(0)(a) + 2(b)(0) = -k + 8$

$0 = -k + 8$

$K = 8$

2. $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 41 = 0$; $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 59 = 0$ వృత్తాల మధ్య కోణం కనుగొనుము.

Sol. $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 41 = 0$

$C_1 = (6, 3)$, $r_1 = \{36 + 9 - 41\}^{1/2} = 2$

$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 59 = 0$, $C_2 = (-2,-3)$

$r_2 = \{4 + 9 - 59\}^{1/2} = \{72\}^{1/2} = 6\sqrt{2}$

$C_1C_2 = d = \sqrt{(6+2)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{64+36} = 10$

వృత్తాల మధ్య θ కోణం అయితే $\cos\theta = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2} = \frac{100-4-72}{2 \times 2\sqrt{72}} = \frac{24}{4 \times 6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = 45^o$

4. $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 12 = 0$; $x^2 + y^2 - 4x + 6y + k = 0$ వృత్తాలు లంబంగా ఖండించుకుంటున్నాయని చూపుము.

Sol. వృత్తాలు :$x^2 + y^2 + 6x - 8y + 12 = 0$; $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 24 = 0$

$g = 3$, $f = -4$, $c = -12$, $g^1 = -2$, $f^1 = 3$; $c^1 = 0$.

$c + c^1 = -12 - 24 = -36$.

$2gg^1 + 2ff^1 = 2.3.(-2)+2.(-4)3 = -12 - 24 = -36$

$2gg^1 + 2ff^1 = c + c^1$

వృత్తాలు లంబంగా ఖండించుకుంటున్నాయి.

5. $x^2 + y^2 - 3x - 4y + 5 = 0$, $3(x^2 + y^2) - 7x + 8y + 11 = 0$

వృత్తాల మూల అక్షం కనుగొనుము

Sol. $S \equiv x^2 + y^2 - 3x - 4y + 5 = 0$

$$S' = x^2 + y^2 - \frac{7}{3}x + \frac{8}{3}y + \frac{11}{3} = 0$$

మూల అక్షం $S - S' = 0$

$$(x^2 + y^2 - 3x - 4y + 5) - \left(x^2 + y^2 - \frac{7}{3}x + \frac{8}{3}y + \frac{11}{3}\right) = 0$$

$$-\frac{2}{3}x - \frac{20}{3}y + \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow x + 10y - 2 = 0$$

6. $\mathbf{x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0,\ \ x^2 + y^2 - 5x - 6y + 4 = 0}$ వృత్తాల ఉమ్మడి జ్యా ను కనుగొనుము

Sol. $S = x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$

$S^1 = x^2 + y^2 - 5x - 6y + 4 = 0$

ఉమ్మడి జ్యా: $S - S' = 0$

$(x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3) - (x^2 + y^2 - 5x - 6y + 4) = 0 \Rightarrow \quad x + 2y - 1 = 0$

Short Answer Questions

1. మూల బిందువు గుండా పోతూ $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 10 = 0,\ x^2 + y^2 + 12y + 6 = 0$ వృత్తాలను లంబంగా ఖండించే వృత్తాన్ని కనుగొనుము

Sol. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ----(1) ను కావల్సిన వృత్తం అనుకొనుము.

పై వృత్తం మూల బిందువు గుండా పోతోంది.

$0+0+0+0+c = 0 \ \therefore c=0.$

$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 10 = 0,\ x^2 + y^2 + 12y + 6 = 0$ వృత్తాలను $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ లంబంగా ఖండిస్తోంది కనుక

$2gg^1 + 2ff^1 = c + c^1$

$2g(-2) + 2f(3) = 0 + 10$

$-4g + 6f = 10$ ----- (2)

$\therefore 2g(0) + 2f(6) = 6 + 0$

$12f = 6$------ $(3) \Rightarrow f = \frac{1}{2}$

(2), (3) లనుండి

$-4g + 6\ \frac{1}{2} = 10$

$-4g = 10 - 3 \Rightarrow g = -\frac{7}{4}$

$\therefore$ వృత్త సమీకరణం

$x^2 + y^2 - \frac{7}{2}x + y = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 7x + 2y = 0.$

2. (0, -3) బిందువు గుండా పోతూ **$x^2 + y^2 - 6x + 3y + 5 = 0$, $x^{2+} + y^2 - x - 7y = 0$** వృత్తాలను లంబంగా ఖండించే వృత్తాన్ని కనుగొనుము

Sol. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ----(1) ను కావల్సిన వృత్తం అనుకొనుము.

$x^2 + y^2 - 6x + 3y + 5 = 0$, $x^{2+} + y^2 - x - 7y = 0$ వృత్తాలను $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ లంబంగా ఖండిస్తోంది కనుక

$$\therefore 2g(-3) + 2f\left(\frac{+3}{2}\right) = c + 5$$

$-6g + 3f = c + 5$----------- (2)

$$\therefore 2g\left(\frac{+1}{2}\right) + 2f\left(\frac{+7}{2}\right) = c$$

$-g - 7f = c$ ----(3)

(1) **(0, -3)** బిందువు గుండా పోతోంది

$0 + 9 - 6f + c = 0$

(3) – (2)

$5g - 10f = -5 \Rightarrow g - 2f = -1$

(iii) + (iv)

$9 - g - 13f = 0 \Rightarrow g + 13f = 9$

$\underline{g - 2f = -1}$

$15f = 10$

$f = \frac{2}{3} \Rightarrow g = 2.\frac{2}{3} - 1 \Rightarrow g = +\frac{1}{3}$

$\Rightarrow 9 - 6.\frac{2}{3} + c = 0 \Rightarrow c = -5$

వృత్త సమీకరణం $x^2 + y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{4}{3}x - 5 = 0$

(Or) $3x^2 + 3y^2 + 2x + 4y - 15 = 0$

3. (2, 0), (0, 2) బిందువుల గుండా పోతూ $\mathbf{2x^2 + 2y^2 + 5x - 6y + 4 = 0}$ ను లంబంగా ఖండించే వృత్త సమీకరణం కనుగొనుము.

Sol. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ----(1) ను కావల్సిన వృత్తం అనుకొనుము.

(1) **(2, 0), (0, 2)** బిందువుల గుండా పోతోంది కావున

$\Rightarrow \quad 4 + 0 + 4g + c = 0$ ---- (2)

$0 + 4 + 4f + c = 0$ ----- (2)

(1) –(2)$\Rightarrow$ f-g =0 $\Rightarrow g = f$

$x^2 + y^2 + \frac{5}{2}x - \frac{6}{2}y + 2 = 0$ ను (1) లంబంగా ఖండిస్తోంది కావున $\Rightarrow$

$$2g\left(\frac{5}{4}\right) + 2f\left(-\frac{3}{2}\right) = 2 + c$$

$\frac{5}{2}g - 3f = 2 + c$

$g = f \Rightarrow \frac{5}{2}g - 3g = 2 + c$

$\Rightarrow -g = 4 + 2c$

(2) నుండి

$-16 - 8c + c = -4 \Rightarrow c = -\frac{12}{7}$

$\Rightarrow \quad -g\ 4 - \frac{24}{7} = +\frac{4}{7}$

వృత్త సమీకరణం

$x^2 + y^2 - \frac{8x}{7} + \frac{8y}{7} + \frac{12}{7} = 0$

$\Rightarrow 7(x^2 + y^2) - 8x - 8y - 12 = 0$

4. (2, 3) కేంద్రం గా గల్గి $\mathbf{x^2 + y^2 - 4x + 2y - 7 = 0}$ ను లంబంగా ఖండించే వృత్త సమీకరణం కనుగొనుము.

Sol. ఇచ్చిన వృత్తం $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 7 = 0$ -----(1)

కావల్సిన వృత్తం $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

కేంద్రం $(-g, -f) = (2,3)$

$g = -2, f = -3$

వృత్తాలు లంబంగా ఖండించు కుంటున్నాయి కావున

$\Rightarrow 2gg^1 + 2ff^1 = c + c^1$

$2(-2)(-2) + 2(-3)(1) = -7 + c$

$\Rightarrow 8 - 6 = -7 + c \Rightarrow +2 = -7 + c$

$c = 7 + 2 = 9 \Rightarrow c = 9$

కావల్సిన వృత్తం $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$

\

5. $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 22 = 0$, $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 = 0$. వృత్తాల స్పర్శ బిందువు వద్ద ఉమ్మడి స్పర్శ రేఖను కనుగొనుము

Sol. $S = x^2 + y^2 + 10x - 2y + 22 = 0$

కేంద్రం $A = (-5, 1)$, వ్యాసార్ధం $r_1 = 2$

$S' = x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 = 0.$

కేంద్రం $B = (-1, 4)$, వ్యాసార్ధం $r_2 = 3$

$AB = \sqrt{16+9} = 5$

$AB = 5 = 3+2 = r_1 + r_2.$

కావున వృత్తాలు బాహ్యంగా స్పృశించు కుంటున్నాయి.

వృత్తాలు స్పృశించు కుంటున్నాయి కావున ఉమ్మడి స్పర్శ రేఖ ఆ వృత్తాల మూలాక్షం అవుతుంది.

మూలాక్షం : $S - S' = 0$

$\therefore (x^2 + y^2 + 10x - 2y + 22) - (x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8) = 0$

$8x + 6y + 14 = 0$ (or) $4x + 3y + 7 = 0$

6. $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 8 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$ వృత్తాలు స్పృశించు కుంటున్నాయని చూపి స్పర్శ బిందువును కనుగొనుము.

Sol. $S = x^2 + y^2 - 8x - 2y + 8 = 0$

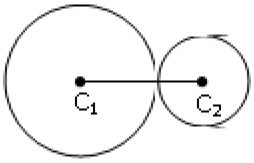
కేంద్రం $C_1 = (4, 1)$; వ్యాసార్ధం $r_1 = \sqrt{16+1-8} = 3$

$S^1 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$

కేంద్రం $C_2 = (1, -3)$, వ్యాసార్ధం $r_2 = \sqrt{1+9-6} = 2$

$$C_1C_2 = \sqrt{(4-1)^2 + (1+3)^2} = 5$$

$r_1 + r_2 = C_1 + C_2$ **0** వృత్తాలు స్పృశించు కుంటున్నాయి.



స్పర్శ బిందువు కేంద్రాలను కలిపే రేఖను $r_1 : r_2$ నిష్ప త్తి లో విభజిస్తుంది.

స్పర్శ బిందువు $= \left(\frac{3(1)+2(4)}{3+2}, \quad \frac{3(-3)+2(1)}{3+2}\right) = (11/5, -7/5)$

7. $\mathbf{x^2 + y^2 - 2x = 0}$ **,** $\mathbf{x^2 + y^2 + 6x - 6y + 2 = 0}$ **0** వృత్తాలు స్పృశించు కుంటున్నాయని చూపి స్పర్శ బిందునను కనుగొనుము. ఈ వృత్తాలు అంతరంగా లేదా బాహ్యంగా స్పృశించు కుంటున్నాయో తెలుపుము.

Sol. $S = x^2 + y^2 - 2x = 0$

కేంద్రం $C_1 = (1, 0)$, వ్యాసార్థం $= r_1 = \sqrt{1+0} = 1$

$S' = x^2 + y^2 + 6x - 6y + 2 = 0$

కేంద్రం $C_2 = (-3, 3)$, వ్యాసార్థం $r_2 = \sqrt{9+9-2} = 4$

$C_1C_2 = \sqrt{(1+3)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ $r_1 + r_2 = 1 + 4 = 5$

$C_1C_2 = r_1 + r_2$ కావున వృత్తాలు బాహ్యంగా స్పృశించు కుంటున్నాయి.

స్పర్శ బిందువు కేంద్రాలను కలిపే రేఖను $r_1 : r_2$ నిష్ప త్తి లో అంతరంగా విభజిస్తుంది

$r_1 : r_2 = 1 : 4$

స్పర్శ బిందువు $P = \left(\frac{1(-3)+4(1)}{1+4}, \frac{1(3)+4(0)}{1+4}\right) = \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

8. **$S \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ and $S' \equiv x^2 + y^2 + 6x + 2y - 90 = 0$** వృత్తాలు అంతరంగా స్పృశించు కుంటున్నాయని చూపి స్పర్శ బిందువును, ఉమ్మడి స్పర్శ రేఖను కనుగొనుము.

Sol. $S \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0 \ldots(1)$

$S' \equiv x^2 + y^2 + 6x + 2y - 90 = 0 \ldots(2)$

C_1, C_2 లు వృత్త కేంద్రాలు r_1, r_2 లు వృత్త వ్యాసార్ధాలు అనుకోండి. $C_1 = (1, 2), C_2 = (-3, -1), r_1 = 5, r_2 = 10$

C_1C_2 =వృత్త కేంద్రాల మధ్య దూరం $= 5$

$|r_1 - r_2| = |5 - 10| = 5 = C_1C_2$

$\therefore$ వృత్తాలు అంతరంగా స్పృశించు కుంటున్నాయి. ఉమ్మడి స్పర్శ రేఖ ఆ వృత్తాల మూలాక్షం అవుతుంది.

మూలాక్షం : $S - S' = 0$.

i.e. $4x + 3y - 35 = 0$

స్పర్శ బిందువు కేంద్రాలను కలిపే రేఖను $r_1 : r_2$ నిష్పత్తి లో బా హ్యంగా విభజిస్తుంది

$r_1 : r_2 = 5 : 10 = 1 : 2$

$\therefore$ స్పర్శ బిందువు $= \left(\frac{(1)(-3)-2(1)}{1-2}, \frac{(1)(-1)-2(2)}{1-2}\right) = (5,5)$

9. **$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0$, $x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y = 0$** వృత్తాలు స్పృశించు కుంటే **$f'g = fg'$.** అని చూపుము

Sol. $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0$

కేంద్రం $C_1 = (-g, -f)$, వ్యాసార్ధం $r_1 = \sqrt{g^2 + f^2}$

$S^1 = x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y = 0$

$C_2 = (-g', -f'), r_2 = \sqrt{g'^2 + f'^2}$

వృత్తాలు స్పృశిం కుంటే $C_1C_2 = r_1 + r_2$

$\Rightarrow (C_1C_2)^2 = (r_1 + r_2)^2$

$(g' - g)^2 + (f' - f)^2 = g^2 + f^2 + g'^2 + f'^2 + 2\sqrt{g^2 + f^2}\sqrt{g'^2 + f'^2}$

$$-2(gg'+ff')=2\{g^2g'^2+f^2f'^2+g^2f'^2+f^2g'^2\}^{1/2}$$

$$\Rightarrow (gg'+ff')^2=g^2g'^2+f^2f'^2+g^2f'^2+f^2g'^2$$

$$g^2g'^2+f^2f'^2+2gg'ff'=g^2g'^2+f^2f'^2+g^2f'^2+f^2g'^2$$
$$\Rightarrow 2gg'ff'=g^2f'^2+f^2g'^2$$
$$\Rightarrow g^2f'^2+f^2g'^2-2gg'ff'=0$$
$$\Rightarrow (gf'-fg')^2=0 \Rightarrow gf'=fg'$$

10. $x^2+y^2-4x-6y+5=0, x^2+y^2-2x-4y-1=0, x^2+y^2-6x-2y=0$ వృత్తాల మూల కేంద్రం కనుగొనుము.

Sol. వృత్తాలు:

$S = x^2+y^2-4x-6y+5=0$

$S' = x^2+y^2-2x-4y-1=0$

$S'' = x^2+y^2-6x-2y=0$

$S=0$, $S'=0$ ల మూల అక్షం $S-S'=0$

$\Rightarrow -2x-2y+6=0$

$\Rightarrow x+y-3=0$ … (1)

$S'=0$, $S''=0$ ల మూల అక్షం $S'-S''=0$

$\Rightarrow 4x-2y-1=0$ … (2)

(1) , (2) ల నుండి

$x=7/6,\ y=\frac{11}{6}$

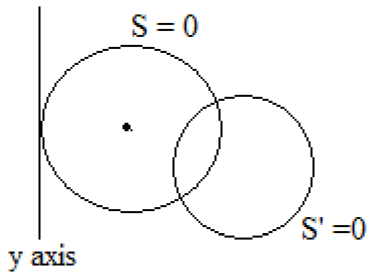
మూల కేంద్రం (7/6, 11/6).

11 . (3, 0)) బిందువు గుండా పోతూ **$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$** వృత్తాన్ని లంబంగా ఖండిస్తూ ,

Y- అక్షాన్ని స్పృశించే వృత్త సమీకరణం కనుగొనుము.

Sol. (h,k) ను వృత్త కేంద్రం అనుకోండి.

వృత్తం **Y** అక్షాన్ని స్పృశిస్తోంది కావున వ్యాసార్ధం = $|h|$



వృత్త సమీకరణం $(x - h)^2 + (y - k)^2 = h^2$

$S = x^2 - 2hx + y^2 - 2ky + k^2 = 0$

S=0 వృత్తం **(3, 0))** బిందువు గుండా పోతోంది. కావున

$\Rightarrow 9 - 6h + k^2 = 0$ — (i)

S=0, $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$ లు లంబంగా ఉన్నాయి కావున

$\Rightarrow 2(-h)(-3) + 2(-k)(2) = -3 + k^2$

$\Rightarrow 6h - 4k = -3 + k^2$

$\Rightarrow 6h - 4k + 3 - k^2 = 0$----- (2)

$(1) + (2) \Rightarrow 12 - 4k = 0 \Rightarrow k = 3$

$\Rightarrow h = 3,$

వృత్త సమీకరణం $y^2 + x^2 - 6x - 6y + 9 = 0.$

12. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0$, $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 21 = 0$ ను లంబంగా ఖండిస్తూ $2x + 3y = 7$ రేఖ వెంబడి వ్యాసం గల వృత్త సమీకరణం కనుగొనుము.

Sol. వృత్త సమీకరణం $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ అనుకోండి.

$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0$, $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 21 = 0$ లను S=0 లంబంగా ఖండిస్తోంది కనుక

$\Rightarrow \quad 2g(-2) + 2f(-3) = 11 + c$ —— (1)

$\Rightarrow \quad 2g(-5) + 2f(-2) = 21 + c$ —— (2)

(1) –(2) $\Rightarrow -6g + 2f = 10$—— (3)

కేంద్రం (-g,-f), $2x + 3y = 7$ రేఖపై ఉంది కావున

$\therefore -2g - 3f = 7$ —— (4)

(3) , (4) లను సాధించగా

$f = -1, g = -2,$

(1), నుండి $c = 3$

వృత్త సమీకరణం $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$

13. $2x + 3y = 1$ రేఖ $x^2 + y^2 = 4$ వృత్తాన్ని A , B బిందువుల వద్ద ఖండిస్తే AB వ్యాసంగా గల వృత్త సమీకరణం కనుక్కోండి.

Sol. వృత్త సమీకరణం $S = x^2 + y^2 = 4$

సరళ రేఖ $L = 2x + 3y = 1$.

S=0 , L=0 ల ఖండన బిందువుల గుండా పోయే వృత్త సమీకరణం $S + \lambda L = 0$

$\Rightarrow (x^2 + y^2 - 4) + \lambda(2x + 3y - 1) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2\lambda x + 3\lambda y - 4 - \lambda = 0$

$\Rightarrow$ కేంద్రం $\left(-\lambda, \frac{-3\lambda}{2}\right)$

కేంద్రం $2x + 3y - 1 = 0$ రేఖ పై ఉంది. $\Rightarrow 2(-\lambda) + 3\,\frac{-3\lambda}{2} - 1 = 0$

$\Rightarrow \lambda = \frac{-2}{13}$

$\therefore$ వృత్త సమీకరణం

$13(x^2 + y^2) - 4 \times 13 - 2(2x + 3y - 1) = 0$

$13(x^2 + y^2) - 4x - 6y - 50 = 0.$

14. $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$, $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 23 = 0$ వృత్తాల ఉమ్మడి జ్యా రెండవ వృత్తానికి వ్యాసం అని చూపి దాని పొడవును కనుక్కోండి

Sol. $S = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$, $S' = x^2 + y^2 - 8x - 6y + 23 = 0$

ఉమ్మడి జ్యా $S\text{-}S' = 0$

$\Rightarrow (x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9) - (x^2 + y^2 - 8x - 6y + 23) = 0$

$\Rightarrow 2x + 2y - 14 = 0$

$\Rightarrow x + y - 7 = 0 \ldots$ (i)

కేంద్రం $(4, 3)$ ని $x + y - 7 = 0$ సమీకరణం లో ప్రతిక్షేపించగా

$4+3-7 = 0 \Rightarrow 0=0.$

ఉమ్మడి జ్యా (i) , $S' = 0$. వృత్తానికి వ్యాసం అవుతోంది.

వ్యాసార్ధం= $\sqrt{4^2 + 3^2 - 23} = \sqrt{2}$

వ్యాసం $= 2\sqrt{2}$

15. $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$, $x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$వృత్తాల ఉమ్మడి జ్యా సమీకరణం ను మరియు దాని పొడవును కనుక్కోండి.

Sol. $S = x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0,$

$S' = x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$

ఉమ్మడి జ్యా సమీకరణం $S - S' = 0$

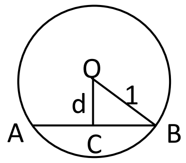
$(x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1) - (x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2) = 0$

$-2x - y - 1 = 0 \Rightarrow 2x + y + 1 = 0$

$S = 0$ కేంద్రం $(-1, -1)$

వ్యాసార్ధం $= \sqrt{1+1-1} = 1$

$(-1,-1)$ కేంద్రం నుండి జ్యా మీదకు గీసిన లంబం = $d = \left|\frac{2(-1)+(-1)+1}{\sqrt{2^2+1^2}}\right| = \frac{2}{\sqrt{5}}$



AB=2BC

ఉమ్మడి జ్యా పొడవు= $2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$