వృత్తం

అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. వృత్త కేంద్రం **C**, వ్యాసార్థాలు **r** లు క్రింద ఇచ్చాం, **C** కేంద్రంగా, **r** వ్యాసార్థంగా ఉంటే వృత్తాల సమీకరణాలను కనుక్కోండి.

i. $C=(2,-3),\ r=4$

A. కలిగిన వృత్త సమీకరణము కేంద్రం (h,k) వ్యాసార్థం r

$$\Rightarrow (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$\Rightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=4^2$$

$$x^2-4x+4+y^2+6y+9=16$$

$$x^2+y^2+4x+6y-3=0$$

ii. $C=(-a,-b)\ ;r=\sqrt{a^2-b^2}$

A. వృత్త సమీకరణము

$$(x+a)^2+(y+b)^2=\left[\sqrt{a^2-b^2}\right]^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+2xa+2yb+a^2+b^2=a^2-b^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+2xa+2yb+2b^2=0$$

iii. $C=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)\ ;\ r=1$

A. వృత్త సమీకరణము

$$\left(x-\cos\alpha^2\right)+\left(y-\sin\alpha\right)^2=1$$

$$x^2+y^2-2x\cos\alpha-2y\sin\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$x^2+y^2-2x\cos\alpha-2y\sin\alpha=0$$

www.sakshieducation.com

2. $(2,3)$ కేంద్రంగా ఉంటూ $(2,-1)$గుండా పోయే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

A. $C=(2,3),\ P=(2,-1)$

వ్యాసార్థము $C\{=\sqrt{(2-2)^2+(3+1)^2}=4$

వృత్త సమీకరణము

$(x-2)^2+(y-3)^2=4^2$

$x^2+y^2-4x-6y-3=0$

3. $ax^2+bxy+3y^2-5x+2y-3=0$ వృత్తాన్ని సూచిస్తే a, b ల విలువలు కనుక్కోండి. ఇంకా దీని వ్యాసార్థం, కేంద్రం కనుక్కోండి.

A. $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ సమీకరణము

$a=b,\ h=0$

$ax^2+bxy+3y^2-5x+2y-3=0$ వృత్తాన్ని సూచిస్తోంది కావున

$\therefore b=0,\ a=3$

$3x^2+3y^2-5x+2y-3=0$

$x^2+y^2-\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}y-1=0$

$g=-\frac{5}{6}\ ;\ f=\frac{2}{6}\ ;\ c=1$

$C=(-g,-f)=\left(\frac{5}{6},-\frac{1}{3}\right)$

వ్యాసార్థము $=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{\frac{25}{36}+\frac{1}{9}+1}$

$=\frac{\sqrt{65}}{6}$ యూనిట్లు

www.sakshieducation.com

4. $x^2+y^2+2gx+2fy-12=0$ సమీకరణం $(2,3)$ కేంద్రంగా ఉండే వృత్తాన్ని సూచిస్తే, **g, f** లను, వృత్త వ్యాసార్థమును కనుక్కోండి.

A. వృత్త సమీకరణము $x^2+y^2+2gx+2fy-12=0$

కేంద్రం $C=(-g,-f)=(2,3)$

కనుక $g=-2, f=-3, c=-12$

$\therefore$ వృత్త వ్యాసార్థం $(r)=\sqrt{g^2+f^2-c^2}$

$=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+12}$

$=\sqrt{4+9+12}=\sqrt{25}=5$ యూనిట్లు

5. $x^2+y^2-4x+6y+c=0$ వృత్త వ్యాసార్థం **'6'** అయితే **'c'** విలువ కనుక్కోండి.

A. వృత్త సమీకరణము

$x^2+y^2-4x+6y+c=0$

ఇచ్చట $2g=-4,\ 2f=6,\ c=c$

$\Rightarrow g=-2, f=3, c=c$

$\therefore$ వృత్త వ్యాసార్థం $(r)=6$

$\Rightarrow \sqrt{g^2+f^2-c}=6$

$\Rightarrow \sqrt{(-2)^2+(3)^2-c}=6$

$\Rightarrow 13-c=6^2$

$\Rightarrow c=13-36=-23$

www.sakshieducation.com

6. $3x^2+3y^2-5x-6y+4=0$ వృత్తం యొక్క కేంద్రం , వ్యాసార్ధాలను కనుగొనుము

A. వృత్త సమీకరణము $3x^2+3y^2-5x-6y+4=0$

$\Rightarrow g=-\frac{5}{6}\,;\, f=-1\,;\, C=\frac{4}{3}$

$\therefore$ వృత్త కేంద్రం $C=(-g,-f)=\left(\frac{5}{6},1\right)$

వ్యాసార్థం $(r)=\sqrt{g^2+f^2-c}$

$=\sqrt{\left(-\frac{5}{6}\right)^2+(-1)^2-\frac{4}{3}}$

$=\sqrt{\frac{25}{36}+1-\frac{4}{3}}$

$=\sqrt{\frac{25+36-48}{36}}=\sqrt{\frac{13}{36}}$

$=\frac{1}{6}\sqrt{13}$ యూనిట్లు

7. $(1,2),(4,6)$ బిందువు జతలు వ్యాసాగ్రాలుగా గల వృత్త సమీకరణాలను కనుక్కోండి.

A. $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$లు వ్యాసాగ్రాలుగా గల వృత్త సమీకరణము

$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

$\Rightarrow (x-1)(x-4)+(y-2)(y-6)=0$

$\Rightarrow x^2-5x+4+y^2-8y+12=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-5x-8y+16=0$

www.sakshieducation.com

8. క్రింది ఇచ్చిన వృత్తాలలోని ప్రతి వృత్తానికి పరామితీయ సమీకరణాలను కనుక్కోండి.

i. $x^2 + y^2 = 4$

A. $C(0,0),\ r = 2$

పరామితీయ సమీకరణాలు

$x = -g + r\cos\theta = 2\cos\theta$

$y = -b + r\sin\theta = 2\sin\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$

ii. $4\left(x^2 + y^2\right) = 9$

A. ఇచ్చిన వృత్త సమీకరణము $x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$

$C(0,0), r = \frac{3}{2}$

పరామితీయ సమీకరణాలు

$x = \frac{3}{2}\cos\theta,\ y = \frac{3}{2}\sin\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$

iii. $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 8^2$

A. కేంద్రం $(3,4), r = 8$

పరామితీయ సమీకరణాలు

$x = x_1 + r\cos\theta,\ y = y_1 + r\sin\theta$

$x = 3 + 8\cos\theta,\ y = 4 + 8\sin\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$

iv. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

A. కేంద్రం $(2,3),\ r = \sqrt{4+9+12} = 5$

పరామితీయ సమీకరణాలు

$x = 2 + 5\cos\theta,\ y = 3 + 5\sin\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$

www.sakshieducation.com

9. క్రింద ఇచ్చిన ప్రతి వృత్తం దృష్ట్యా $S=0$ బిందువు **P** శక్తి కనుక్కోండి.

i. $P=(5,-6)$, మరియు $S\equiv x^2+y^2+8x+12y+15$

A. బిందు శక్తి = S_{11}

$= 25+36+40-72+15=116-72=44$

10. క్రింద ఇచ్చిన బిందువు **P** నుంచి **S = 0** వృత్తానికి గల స్పర్శరేఖ పొడవును కనుక్కోండి.

i. $P=(-2,5)$ మరియు $S\equiv x^2+y^2-25$

A. స్పర్శరేఖ పొడవు = $\sqrt{S_{11}}$

$=\sqrt{(-2)^2+(5)^2-25}$

= 2 యూనిట్లు

11. క్రింద ఇచ్చిన ప్రతి **S = 0** వృత్తానికి **P** వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

i. $P-(7,-5)$, $S\equiv x^2+y^2-6x+4y-12$

A. వృత్త సమీకరణము

$S\equiv x^2+y^2-6x+4y-12=0$

$P-(7,-5)$ వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణము

$S_1=xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$

$\Rightarrow x.7+y(-5)-3(x+7)+2(y-5)-12=0$

$\Rightarrow 7x-5y-3x-21+2y-10-12=0$

$4x-3y-43=0$

www.sakshieducation.com

12. క్రింద ఇచ్చిన **S = 0** వృత్తానికి **P** వద్ద అభిలంబరేఖ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

i. $P(3,-4),\ S \equiv x^2 + y^2 + x + y - 24$

A. అభిలంబరేఖ సమీకరణము

$$(x - x_1)(y_1 + f) - (y - y_1)(x_1 + g) = 0$$

$$(x-3)\left(-4+\frac{1}{2}\right) - (y+4)\left(3+\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$-\frac{7}{2}(x-3) - \frac{7}{2}(y+4) = 0$$

$$\Rightarrow (x-3) + (y+4) = 0$$

$$x - 3 + y + 4 = 0$$

$$x + y + 1 = 0$$

13. బిందువు $(5,4)$ నుంచి $x^2 + y^2 + 2ky = 0$ వృత్తానికి గీసిన స్పర్శరేఖ పొడవు **1** అయితే **k** విలువను కనుక్కోండి.

A. $S \equiv x^2 + y^2 + 2ky = 0,\ ;\ P(5,4)$

స్పర్శరేఖ పొడవు

$$\sqrt{S_{11}} = \sqrt{(5)^2 + (4)^2 + 8k}$$

స్పర్శరేఖ పొడవు $= 1$ కనుక

$$\therefore\ 1 = \sqrt{215 + 16 + 8k}$$

వర్గీకరించగా $1 = 41 + 8k$

$k = -5$ యూనిట్లు

www.sakshieducation.com

14. బిందువు $(2,5)$ నుంచి $x^2+y^2-5x+4y+k=0$ కు గల స్పర్శరేఖ పొడవు $\sqrt{37}$ అయితే **k** విలువను కనుక్కోండి.

A. స్పర్శరేఖ పొడవు = $\sqrt{S_{11}}$

$= \sqrt{(2)^2+(5)^2-5\times 2+4\times 5+k}$

$= 37 = 39+k$

$k=-2$ యూనిట్లు

15. $x^2+y^2-2x+2y+1=0$ వృత్తం దృష్ట్యా $(-6,1),(2,3)$ లు సంయుగ్మ బిందువులని చూపండి.

A. S = 0 వృత్తం దృష్ట్యా $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$ సంయుగ్మాలైన $S_{12}=0$

కనుక ఇచ్చట వృత్త సమీకరణము

$x^2+y^2-2x+2y+1=0$

బిందువులు $P(-6,1),Q(2,3)$

ఇప్పుడు

$S_{12}=x_1x_2+y_1y_2+g(x_1+x_2)+f(y_1+y_2)+c$

$=(-6)(2)+(1)(3)+(-1)(-6+2)+1(1+3)+1$

$=-12+3+4+4+1=-12+12=0$

$\because S_{12}=0$

$\Rightarrow$ వృత్తం దృష్ట్యా దత్త బిందువులు సంయుగ్మ బిందువులు

16. $x^2+y^2-2x-2y-1=0$ వృత్తం దృష్ట్యా $x+y-5=0, 2x+ky-8=0$ లు సంయుగ్మ రేఖలయితే k విలువ కనుక్కోండి.

A. If $l_1x+m_1y+n_1=0$; $l_2x+m_2y+n_2=0$, S = 0 దృష్ట్యా సంయుగ్మ రేఖలయితే

$r^2(l_1l_2+m_1m_2)$

$=(l_1g+m_1f-n_1)(l_2g+m_2f-n_2)$

$l_1=1,\ m_1=1,\ n_1=-5$

$l_2=2,\ m_2=k,\ n_1=-8$

www.sakshieducation.com

$g=-1,\ f=-1, r^2=3$

$\therefore 3(1.2+k)=(-1-1+5)(-2-k+8)$

$6k=18-6=12 \Rightarrow k=2$

17. $x^2+y^2-5x+8y+6=0$ వృత్తం దృష్ట్యా $(4,2),(k,-3)$ లు సంయుగ్మ రేఖలయితే k విలువ ఎంత ?

A. వృత్త సమీకరణము $x^2+y^2-5x+8y+6=0$

దృవరేఖ $(4,2)$

$x.4+y.2-\frac{5}{2}(x+4)+4(y+2)+6=0$

$8x+4y-5x-20+8y+16+12=0$

$3x+12y+8=0$

$P(4,2), Q(k,-3)$ లు సంయుగ్మాలు

P యొక్క దృవరేఖ Q గుండా పోతుంది

$\therefore 3k-36+8=0\ 3k=28 \Rightarrow k=\frac{28}{3}$

18. $S\equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ వృత్తానికి $(0,0)$ నుంచి గీసిన స్పర్శరేఖలు లంబంగా ఉండటానికి నియమం కనుక్కోండి.

A. **P** నుంచి వృత్తానికి గీయబడిన స్పర్శరేఖలు వృత్త కోణము **0**

అయితే $\frac{\theta}{2}=\frac{r}{\sqrt{S_{11}}}$

$$\tan 45^\circ=\frac{\sqrt{g^2+f^2-c}}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c}}$$

$$1=\frac{\sqrt{g^2+f^2-c}}{\sqrt{0+0+0+0+c}}$$

$g^2+f^2-c=c$

www.sakshieducation.com

$g^2 + f^2 = 2c$

ఇది కావలసిన నియమము

19. క్రింది వృత్తాల జతలకు ఎన్ని ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు గీయవచ్చునో తెలపండి.

i. $x^2 + y^2 + 6x + 6y + 14 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$

A. $c_1(-3,-3)$, $c_2 = (1,2)$

$r_1 = \sqrt{9+9-14} = 2$

$r_2 = \sqrt{1+4+40} = 0$

$c_1, c_2 = \sqrt{(-3-1)^2 + (-3-2)^2}$

$= \sqrt{16+25} = \sqrt{41} > r_1 + r_2$

ఉమ్మడి స్పర్శరేఖల సంఖ్య $= 4$

www.sakshieducation.com

స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. $(3,2)$ బిందువు నుంచి $x^2+y^2-6x+4y-2=0$ వృత్తానికి గీసిన స్పర్శరేఖల మధ్య కోణం కనుక్కోండి.

A. వృత్త సమీకరణము

$$S \equiv x^2+y^2-6x+4y-2=0$$

$$r=\sqrt{9+4+2}=\sqrt{15}$$

$$S_{11}=9+4-18+8-2=1$$

$$\tan\theta=\frac{4}{\sqrt{S_{11}}}=\sqrt{15}$$

$$\cos 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{1-15}{1-16}=-\frac{7}{8}$$

P వద్ద స్పర్శరేఖల మధ్య కోణము $\cos^{-1}\left(\frac{7}{8}\right)$

2. $x^2+y^2-10x-10y+25=0$ దృష్ట్యా $(1,-2)$ యొక్క ధ్రువరేఖా సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

A. వృత్త సమీకరణము $x^2+y^2-10x-10y+25=0$

ధృవరేఖ సమీకరణము $S_1=0$

$P(1,-2)$ యొక్క ధృవరేఖ

$$x.1+y(-2)-5(x+1)-5(y-2)+25=0$$

$$x-2y-5x-5-5y+10+25=0$$

$$-4x-7y+30=0$$

$$4x+7y-30=0$$

www.sakshieducation.com

3. $A(3,-1)$ బిందువు $x^2+y^2-2x+4y=0$ వృత్తం పై బిందువని చూపి, A ద్వారా పోయే వ్యాసం రెండవ చివరి బిందువులను కనుక్కోండి.

A. వృత్త సమీకరణము

$x^2+y^2-2x+4y=0$ .... (i)

$A(3,-1)$; $B(x_1,y_1)$

(i) లో A ప్రతిక్షేపించగా

$(3)^2+(-1)^2-2(3)+4(-1)=0$

$\therefore A$ వృత్తం మీద ఉన్నది

$C=(1,-2)$

C వృత్త కేంద్రం

AB మధ్య బిందువు

$\frac{x_1+3}{2}=1$ $\qquad$ $\frac{y_1-1}{2}=-2$

$x_1=-1$ $\qquad$ $y_1=-3$

$B(x_1,y_1)=(-1,-3)$

4. $(2,-3),(-4,5)$ బిందువుల గుండా పోయే వృత్త కేంద్రం $4x+3y+1=0$ రేఖపై ఉంటే ఆ వృత్త సమీకరణాలను కనుక్కోండి.

A. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ .... (i)

సమీకరణము (i) $(2,-3),(-4,5)$ ల గుండా వృత్తం పోతుంది

$\therefore 4+9+4g-6f+c=0$ .... (ii)

$16+25-8g+10f+c=0$ ....(iii)

(iii) - (ii) చేయగా

$28-12g+16f=0$

(లేదా) $3g-4f=7$

కేంద్రం $(-g,-f)$ రేఖ $4x+3y+1=0$ మీద ఉంది

www.sakshieducation.com

$\therefore 4(-g)+3(-f)+1=0$

$3g-4f-7=1$

సాధించగా $f=-1$

$g=1$

(ii) లో $f,\ g$ విలువలు ప్రతిక్షేపించగా

$4+9+4(1)-6(-1)+c=0,\ c=-23$

$x^2+y^2+2x-2y-23=0$ ఇది కావలసిన వృత్త సమీకరణము

5. $x^2+y^2-6x-4y-12=0$ వృత్తంలో సకేంద్రీయమై $(-2,14)$ బిందువు గుండా పోయే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

A. $x^2+y^2-6x-4y-12=0$ .... (i)

$C=(-g,-f)$

$=(3,2)$

(i) లోని సకేంద్రీయ వృత్త సమీకరణము

$(x-3)^2+(y-2)^2=r^2$

$(-2,14)$ గుండా పోతుంది

$\therefore (-2,-3)^2+(14-2)^2=r^2$

$169=r^2$

కావలసిన వృత్త సమీకరణము

$(x-3)^2+(y-2)^2=169$

$x^2+y^2-6x-4y-156=0$

www.sakshieducation.com

6. వృత్త కేంద్రం X - అక్షం పై ఉంటూ $(-2,3),(4,5)$ బిందువుల గుండా పోయే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

A. వృత్త సమీకరణము

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ .... (i)

దాని కేంద్రం $C=(-g,-f)$, X - అక్షం పై ఉన్నది కనుక $f=0$ .... (1)

$\therefore$ వృత్త సమీకరణము

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

ఇది $(-2,3),(4,5)$ ల గుండా పోతుంది కనుక

$(-2)^2+(3)^2+2g(-2)+c=0$

$\Rightarrow -4g+c=-13$ .... (2)

$(4)^2+(5)^2+2g(4)+c=0$

$\Rightarrow 8g+c=-41$ .... (3)

$\underline{-4g+c=-13}$ .... (2)

$12g=-28 \Rightarrow g=-\frac{7}{3}$

(ii) నుండి $-4\left(-\frac{7}{3}\right)+c=-13$

$c=-13-\frac{28}{3}=\frac{-39-28}{3}=\frac{-67}{3}$

$\therefore$ కావలసిన వృత్త సమీకరణము

$x^2+y^2+\left(-\frac{7}{3}\right)x+2(0)y+\left(\frac{-67}{3}\right)=0$

$\Rightarrow 3x^2+3y^2-14x-67=0$

www.sakshieducation.com

7. $x^2+y^2-5x+8y+6=0$ వృత్తానికి $x-2y+22=0$ ఒక ధ్రువరేఖ అయితే దీని ధ్రువాన్ని కనుక్కోండి.

A. ధ్రువం $P(x_1, y_1)$ అనుకుందాం

ధృవరేఖ సమీకరణము $S_1 = 0$

$$xx_1 + yy_1 - \frac{5}{2}(x+x_1) + 4(y+y_1) + 6 = 0$$

(లేదా) $x\left(x_1 - \frac{5}{2}\right) + y(y_1+4) - \frac{5}{2}$

$x_1 + 4y_1 + 6 = 0$ .... (i)

$x - 2y + 22 = 0$ .... (ii)

(i), (ii) లు ఒకే రేఖను సూచిస్తున్న

$$\frac{x_1 - \frac{5}{2}}{1} = \frac{y_1+4}{-2} = \frac{\frac{-5}{2}x_2 + 4y_1 + 6}{22} = k$$

$$x_1 - \frac{5}{2} = k \Rightarrow x_1 = k + \frac{5}{2}$$

$$-\frac{5}{2}x_1 + 4y_1 + 6 = 22k$$

$y_1 - 2k - 4$,

$$-\frac{5}{2}\left(k+\frac{5}{2}\right) + 4(-2k-4) + 6 = 22k \;;$$

$$-\frac{5}{2} - \frac{25}{4} - 8k - 16 + 6 = 22k$$

$$-\frac{65}{4} = 30k + \frac{5k}{2} = \frac{65k}{2}$$

$$k = -\frac{1}{2}\,;\; x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 2$$

$y_1 = -3$

$\therefore$ ధ్రువము $(2,-3)$

www.sakshieducation.com

8. $x^2+y^2=b^2$ వృత్తం దృష్ట్యా $x^2+y^2=a^2$ వృత్తం పై ఉండే బిందువు ధృవరేఖలు $x^2+y^2=c^2$ వృత్తాన్ని స్పృశిస్తే a, b, c లు గుణశ్రేణిలో ఉంటాయిని చూపండి.

A. $P(x_1,y_1)$ బిందువు మీది బిందువు $x^2+y^2=a^2$

$\therefore x_1^2+y_1^2=a^2$ .... (1)

$x^2+y^2=b^2$ దృష్ట్యా P యొక్క ధ్రువరేఖ

$xx_1+yy_1=b^2$ వృత్తానికి స్పర్శరేఖ

$x^2+y^2=c^2$

$$\frac{\left|0+0-b^2\right|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}=c \Rightarrow \frac{b^2}{a}=c$$

అడ్డ గుణకారం చేయగా $b^2=ac$

$\therefore a,b,c$ లు G.P లో ఉన్నాయి

9. $x^2+y^2-6x-2y+1=0$, $x^2+y^2+2x-8y+13=0$ వృత్తాలు పరస్పరం స్పృశిస్తాయని చూపిస్తూ, స్పర్శబిందువును, ఆ బిందువు దగ్గర దత్త వృత్తాలను ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ సమీకరణాలను కనుక్కోండి.

A. వృత్త కేంద్రాలు $C_1=(3,1), C_2=(-1,4)$

వాటి వ్యాసార్థాలు $r_1=\sqrt{9+1-1}=3$

$r_2=\sqrt{1+16-13}=\sqrt{4}=2$

$C_1C_2=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

$\because C_1C_2=r_1+r_2$

$\Rightarrow$ రెండు వృత్తాలు బాహ్యంగా స్పృశించుకుంటాయి

స్పర్శ బిందువు P అనుకుంటే, P బిందువు C_1C_2 రేఖాఖండాన్ని అంతరంగా $r_1:r_2$ (i.e.,) 3 : 2 నిష్పత్తిలో విభిజిస్తుంది. కనుక

$$P=\left(\frac{3(-1)+2(3)}{5},\frac{3(4+2(1))}{5}\right)$$

www.sakshieducation.com

$= \left(\frac{3}{5}, \frac{14}{5}\right)$

P వద్ద ఏదేని ఒక వృత్తానికి గీచిన స్పర్శరేఖయే ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ అవుతుంది

$\therefore P\left(\frac{3}{5}, \frac{14}{5}\right) \quad x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$

వృత్తానికి స్పర్శరేఖా సమీకరణము

$S_1 = 0$

(i.e.,) $x\left(\frac{3}{5}\right) + y\left(\frac{14}{5}\right) - 3\left(x + \frac{3}{5}\right)$

$-1\left(y + \frac{14}{5}\right) + 1 = 0$

$\Rightarrow 2x + 14y - 15x - 9 - 5y - 14 + 5 = 0$

$\Rightarrow -12x + 9y - 18 = 0$

$4x - 3y + 6 = 0$

10. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ వృత్తాన్ని $(5,5)$ బిందువు వద్ద బాహ్యంగా స్పృశిస్తూ 5 యూనిట్ల వ్యాసార్థం ఉన్న వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

A. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$

$C = (1,2)$

$r = \sqrt{1 + 4 + 20} = 5$

$\frac{h+1}{2} = 5, \frac{k+2}{2} = 5$

$h = 9 \quad k = 8$

వృత్త సమీకరణము

$(x-9)^2 + (y-8)^2 = 25$

$x^2 + y^2 - 18x - 16y + 120 = 0$

కావలసిన వృత్త కేంద్రం (h,k) అయితే $(3,2)$ మరియు (h,k) ల మధ్య బిందువు $(5,5)$

www.sakshieducation.com

11. $x^2+y^2-4x-6y+9=0$ వృత్తం దృష్ట్యా $(1,2)$ విలోమ బిందువును కనుక్కోండి.

A. వృత్త సమీకరణము $x^2+y^2-4x-6y+9=0$

కేంద్రము $C(2,3)$

$P(1,2)$ దత్త బిందువు P యొక్క విలోమ బిందువు Q అయితే P నుండి దాని ధృవరేఖ మీదకు గీయబడిన లంబపాదము Q

P ధృవరేఖ

$x.1+y.2-2(x+1)-3(y+2)+9=0$

$x+2y-2x-2-3y-6+9=0$

$-x-y+1=0 \Rightarrow x+y-1=0$

Q నిరూపకాలు

$$\left(x_1-\frac{a(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2},\ y_1-\frac{b(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}\right)$$

$$x_1-\frac{a(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}=1-\frac{1(1+2-1)}{1+1}$$

$$=1-\frac{2}{2}=1-1=0$$

$$y_1=\frac{b(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}=2-\frac{1(1+2-1)}{1+1}$$

$$=2-1=1$$

P యొక్క విలోమ బిందువు $Q(0,1)$

12. $x^2+y^2+ax+by-12=0$ వృత్త కేంద్రం $(2,3)$ అయితే a, b దీని వ్యాసార్థం విలువలు కనుక్కోండి.

A. వృత్త సమీకరణము $x^2+y^2+ax+by-12=0$

కేంద్రము $=\left(-\frac{a}{b},-\frac{b}{2}\right)=(2,3)$

$-\frac{a}{2}=2$ $\qquad$ $-\frac{b}{2}=3$

www.sakshieducation.com

$a = -4 \qquad b = -6$

$g = -2,\ f = -3,\ c = -12$

వ్యాసార్థము $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{4+9+12} = 5$

13. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ వృత్తం పై ఉన్న $30°, 60°$ బిందువులను కలిపే జ్యా సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

A. వృత్త సమీకరణము

$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$

θ_2, θ_1 బిందువులను కలిపే జ్యా సమీకరణము

$$(x+g)\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + (y+f)\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$$= r.\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$r = \sqrt{9+4+12} = 5$

$$(x-3).\cos 45° + (y-2)\sin 45° = 5.\cos 15°$$

$$\frac{(x-3)+(y+2)}{\sqrt{2}} = \frac{5(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}}$$

(i.e.,) $2(x+y-1) = 5\sqrt{3}+5$

$2x + 2y - (7 + 5\sqrt{3}) = 0$

14. $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 39 = 0$ పై బిందువు $30°$ వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

A. వృత్త సమీకరణము

$x^2 + y^2 + 4x + 6y - 39 = 0$

$g = 2,\ f = 3,\ r = \sqrt{4+9+39} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

$\theta = 30°$

స్పర్శరేఖ సమీకరణము

www.sakshieducation.com

$$(x+g)\cos 30^\circ + (y+f)\sin 30^\circ = r$$

$$(x+2)\frac{\sqrt{3}}{2} + (y+3).\frac{1}{2} = 2\sqrt{13}$$

$$\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} + y + 3 = 4\sqrt{13}$$

$$\sqrt{3}x + y + \left(3 + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{13}\right) = 0$$

ధీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు

1. క్రింద ఇచ్చిన బిందువుల గుండా పోయే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

i. $(3,4);(3,2);(1,4)$

A. వృత్త సమీకరణము

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ అనుకోండి

దత్త బిందువులు వృత్తం మీద ఉన్నాయి కనుక

$9 + 16 + 6g + 8f + c = 0$ .... (i)

$9 + 4 + 6g + 4f + c = 0$.... (ii)

$1 + 16 + 2g + 8f + c = 0$ .... (iii)

(ii) నుండి (i) తీసివేయగా

$-12 - 4f = 0$ (లేదా) $f = -3$

(ii) నుండి (iii) తీసివేయగా

$-4 + 4g - 4f = 0$

$g - f = 1 \Rightarrow g = -2$

(i) లో g, f ల విలువలు ప్రతిక్షేపించగా

$25 + 6(-2) + (-3) + c = 0$

$c = 11$

www.sakshieducation.com

కావలసిన వృత్త సమీకరణము

$x^2+y^2-4x-6y+11=0$

ii. $(1,2);(3,4);(5,6)$

A. వృత్త సమీకరణము

దత్త బిందువును ప్రతిక్షేపించగా

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ అనుకోండి

$1+4+2g+4f+c=0$ .... (i)

$9+15+6g-8f+c=0$ .... (ii)

$25+36+10g-12f+c=0$ .... (iii)

(ii) - (i) చేయగా

$29+4g-12f=0$

$5+g-3f=0$ .... (iv)

(iii) - (ii) చేయగా

$36+4g-4f=0$

(లేదా) $9+g-f=0$ .... (v)

(v) మరియు (iv) ను సాధించగా

$f=-2, g=-11, c=25$

కావలసిన వృత్త సమీకరణము

$x^2+y^2-22x-4y+25=0$

2. $(0,0)$ **గుండా పోతూ** X, Y **- అక్షాల పై వరుసగా** 4, 3 **అంతర ఖండాలు చేసే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.**

A. వృత్త సమీకరణము $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ అనుకోండి

$(0,0),(4,0)$ మరియు $(0,3)$ ల గుండా వృత్తం పోతుంది

$0+0+2g(0)+2f(0)+c=0$

$c=0$

$16+0+8g+2f.0+c=0$

www.sakshieducation.com

$c = 0$ కనుక $g = -2$

ఇదే విధంగా $0 + 9 + 2g.0 + 6f + c = 0$

$f = -\frac{3}{2}$ అయిన $c = 0$

కావలసిన వృత్త సమీకరణము

$x^2 + y^2 - 4x - 3y = 0$

(2), (1) కావలసిన వృత్త సమీకరణము

$(0,0)(-4,0),(0,-3)$ బిందువు ల గుండా పోతుంది. ఇదే విధంగా ఈ వృత్త సమీకరణము

$x^2 + y^2 + 4x + 3y = 0$ అని చూపవచ్చును

3. $(2,0),(0,1),(4,5),(0,c)$ **బిందువులు చక్రీయాలు అయితే C విలువ ఎంత ?**

A. $x^2 + y^2 + gx + 2fy + c_1 = 0$

$(2,0),(0,1),(4,5)$ బిందువులను తృప్తిపరుస్తుంది కనుక

$4 + 0 + 4g + c_1 = 0$ ... (i)

$0 + 1 + 2g.0 + 2f + c_1 = 0$ ... (ii)

$16 + 25 + 8g + 10f + c_1 = 0$ ... (iii)

(ii) - (i) చేయగా

$-3 - 4g + 2f = 0$

$4g - 2f = -3$ .... (iv)

(ii) - (iii) చేయగా

$-40 - 8g - 8f = 0$ (or) $g + f = -5$ .... (v)

(iv), v లు సాధించగా

$g = -\frac{13}{6}, f = -\frac{17}{6}$

(i) లో g, f ల విలువలు ప్రతిక్షేపించగా

$4 + 4\left(-\frac{13}{6}\right) + c_1 = 0$

www.sakshieducation.com

$c_1 = \frac{14}{3}$

వృత్త సమీకరణము $x^2 + y^2 - \frac{13}{3}x - \frac{17}{3}y + \frac{14}{3} = 0$.

ఈ వృత్తం $(0, c)$ గుండా పోతుంది

$c^2 - \frac{17}{3} + \frac{14}{3} = 0$

$3c^2 - 17c + 14 = 0$

$\Rightarrow (3c - 14)(c - 1) = 0$

(లేదా)

$c = 1$ లేదా $\frac{14}{3}$

4. క్రింద ఇచ్చిన రేఖలతో ఏర్పడే త్రిభుజాల పరివృత్త సమీకరణాలను కనుక్కోండి.

i. $2x + y = 4$; $x + y = 6$; $x + 2y = 5$

A. ఇచ్చిన సమీకరణాలను క్రింద విధంగా తీసుకోండి $AB : 2x + y = 4$ $AB : 2x + y = 4$

$BC : x + y = 6$ $AC : x + 2y = 5$ లను సాధించగాలను సాధించగా

$B : (-2, 8)$ $A : (1, 2)$

$AC : x + 2y = 5$

$BC : x + y = 6$

లను సాధించగా

$C : (7, -1)$

వృత్త సమీకరణము $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

A, B, C ల గుండా పోతూ

$\therefore 4 + 64 - 4g + 16f + c = 0$ .... (i)

$1 + 4 + 2g + 4f + c = 0$ .... (ii)

$49 + 1 + 14g - 2f + c = 0$ ...(iii)

www.sakshieducation.com

(i) - (ii) చేయగా (iii) - (ii) చేయగా

$21-2g+4f=0$ .... (iv)

$15+4g-2f=0$ .... (v)

(iv), (v) లు సాధించగా $f=-\frac{19}{2}$

$g=-\frac{17}{2}$; $c=50$

g, f ల విలువలు (i) లో ప్రతిక్షేపించగా

$\therefore$ కావలసిన వృత్త సమీకరణము

$x^2+y^2-17x-19y+50=0$

5. P బిందువు నుంచి $x^2+y^2-4x-6y-12=0$, $x^2+y^2+6x+18y+26=0$ వృత్తాలకు గీసిన ‹ æÃÖY ‡Ú È¡ 2 : 3 నిష్పత్తిలో ఉంటే P బిందుపధ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

A. $P(x,y)$ బిందుపధం మీది ఏదైనా ఒక బిందువు

$S \equiv x^2+y^2-4x-6y-12$

$PT_1=\sqrt{x^2+y^2-4x-6y-12}$

$S^1=x^2+y^2+6x+18y+26$

$PT_2=\sqrt{x^2+y^2+6x+18y+26}$

$\frac{PT_1}{PT_2}=\frac{2}{3}$ అని ఇవ్వబడినది

$\Rightarrow \frac{PT_1^2}{PT_2^2}=\frac{4}{9}$

$9\ PT_1^2=4.PT_2^2$

$9\left(x^2+y^2-4x-6y-12\right)$

$=4\left(x^2+y^2+6x+18y+26\right)$

$9x^2+9y^2-36x-54y-108$

www.sakshieducation.com

$= 4x^2 + 4y^2 + 24x + 72y + 104$

P బిందుపథం

$5x^2 + 5y^2 - 60x - 126y - 212 = 0$

6. $x^2 + y^2 - x + 3y - 22 = 0$ వృత్తం $y = x - 3$ రేఖపై ఏర్పరిచే జ్యా పొడవును కనుక్కోండి.

A. వృత్త సమీకరణము

$x^2 + y^2 - x + 3y - 22 = 0$

కేంద్రం $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

$r = \sqrt{g^2 + f^2 - e} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 22}$

$\sqrt{\frac{1+9+88}{4}} = \sqrt{\frac{98}{4}}$

రేఖ సమీకరణము $y = x - 3 \Rightarrow x - y - 3 = 0$

P = కేంద్రం నుండి లంబ దూరము

$\frac{\left|\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 3\right|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

జ్యా పొడవు $= 2\sqrt{r^2 - p^2}$

$= 2\sqrt{\frac{98}{4} - \frac{1}{2}}$

$= 2\frac{\sqrt{98-2}}{2}$

$= \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$

www.sakshieducation.com

7. $(-2,3)$ కేంద్రంగా ఉంటూ $3x+4y+4=0$ రేఖపై చేసే జ్యా పొడవు **2** యూనిట్లు అయ్యే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

A. కేంద్రం $C(-2,3)$ నుండి రేఖ మీదకు దూరం

$$d=\left|\frac{3(-2)+4(3)+4}{\sqrt{9+16}}\right|=\frac{10}{5}=2$$

జ్యా AB పొడవు $=2$ యూనిట్లు

వృత్త వ్యాసార్థం (r) అనుకొనిన

$\Rightarrow 2=2\sqrt{r^2-d^2}$

$\Rightarrow r^2-d^2=1$

$\Rightarrow r^2-4=1 \Rightarrow r^2=5$

వృత్త సమీకరణము

$(x+2)^2+(y-3)^2=5$

$\Rightarrow x^2+y^2+4x-6y+4+9-5=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+4x-6y+8=0$

8. $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ వృత్తానికి $x+y-8=0$ రేఖకు సమాంతరంగా ఉండే స్పర్శరేఖ సమీకరణం(లు) కనుక్కోండి.

A. వృత్త సమీకరణము

$x^2+y^2-4x+6y-12=0$ కేంద్రం $C(2,-3)$

వ్యాసార్థం $(r)=\sqrt{4+9+12}=\sqrt{25}=5$

$x+y-8=0$ రేఖకు సమాంతరంగా ఉండే రేఖా

సమీకరణం $x+y+k=0$ అనుకుందాం

ఈ రేఖ $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ వృత్తాన్ని స్పృశిస్తే, $r=d$

$\Rightarrow 5$ కేంద్రం $C(2,-3)$నుండి $x+y+k=0$ రేఖ మీదకు లంబ దూరము

$$\Rightarrow 5=\frac{|2-3+k|}{\sqrt{1+1}}$$

www.sakshieducation.com

$\Rightarrow 5\sqrt{2} = |k-1|$

$\therefore\ k = 1 = \pm 5\sqrt{2} \Rightarrow k = 1 \pm 5\sqrt{2}$

$\therefore$ కావలసిన స్పర్శరేఖా సమీకరణాలు

$x + y + \left(1 \pm 5\sqrt{2}\right) = 0$

9. $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$ వృత్తానికి $3x - y + 4 = 0$ రేఖకు లంబంగా ఉండే స్పర్శ రేఖా సమీకరణాలను కనుక్కోండి.

A. $3x - y + 4 = 0$

కు లంబంగా ఉండే రేఖా సమీకరణం

$x + 3y + k = 0$

ఇది వృత్తానికి స్పర్శరేఖ అయిన

$r = d$

(అంటే) వ్యాసార్థం = కేంద్రం $(-1,1)$ నుండి

$x + 3y + k = 0$ కు లంబ దూరము

$\Rightarrow \sqrt{1+1+3} = \left|\dfrac{-1+3(1)+k}{\sqrt{10}}\right|$

$\Rightarrow \sqrt{50} = |k+2|$

$\Rightarrow k + 2 = 5\sqrt{2}$

$k = -2 + 5\sqrt{2}$

$\therefore$ స్పర్శరేఖా సమీకరణాలు

$x + 3y - 2 \pm 5\sqrt{2} = 0$

www.sakshieducation.com

10. $(-1,0)$ **గుండా పోతూ** $x+y-7=0$ **రేఖను** $(3,4)$ **వద్ద స్పృశించే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.**

A. వృత్త సమీకరణము

$S \equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \ldots (1)$

అనుకుందాం

ఇదా $(-1,0)$ గుండా పోతుందా కనుక

$1+0-2(g)(-1)+2f(0)+c=0$

$\Rightarrow -2g+c=-1 \ldots (1)$

S = 0 వృత్తం $x+y-7=0$ రేఖను $(3,4)$ వద్ద స్పృశిస్తుంది. కనుక $(3,4)$ వృత్తం పై ఉంటుంది

$\Rightarrow 9+16+2g(3)+2f(4)+c=0$

$\Rightarrow 6g+8f+c=25 \ldots.(2)$

(1) నుండి $c=-1+2g$

(2) నుండి $6g+8f+(-1+2g)=-25$

$\Rightarrow 8g+8f=-24$

$\Rightarrow g+f=-3$

$\Rightarrow f=-3-g$

$x+y-7=0$ రేఖ వృత్తాన్ని స్పృశిస్తుంది కనుక

$r=d$

$$\Rightarrow \sqrt{g^2+f^2-c}=\left|\frac{(-g)+(-f)-7}{\sqrt{1+1}}\right|$$

$\Rightarrow 2\left(g^2+f^2-c\right)=g+f+7^2$

$\Rightarrow 2\left[g^2+(-3-g)^2-(-1\ 2g)\right]$

$=[g-3-g+7]^2$

$\Rightarrow 2\left[g^2+g^2+9+6g+1-2g\right]=16$

www.sakshieducation.com

$\Rightarrow 2g^2+4g+10=8$

$\Rightarrow g^2+2g+1=0$

$(g+1)^2=0 \Rightarrow g=-1$

$\therefore f=3-g=-3(-1)=-2$

$c=-1+2g$

$\Rightarrow c=(-1)+2(-1)=-3$

$\therefore$ వృత్త సమీకరణము

$x^2+y^2+2(-1)x+2(-2)y+(-3)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-2x-2y-3=0$

11. $x+y+1=0$ రేఖ $x^2+y^2-3x+7y+14=0$ వృత్తాన్ని స్పృశిస్తుందని చూపి, స్పర్శ బిందువును కనుక్కోండి.

A. వృత్త సమీకరణము $x^2+y^2-3x+7y+14=0$

వృత్త కేంద్రం $C=\left(\frac{3}{2}m\frac{-7}{2}\right)$

వృత్త వ్యాసార్థము $(r)=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{49}{4}-14}$

$=\frac{\sqrt{58-56}}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

కేంద్రం C నుండి రేఖ $x+y+1=0$ కు

లంబదూరం

$$d=\frac{\left|\frac{3}{7}-\frac{6}{2}+1\right|}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore r=d=\frac{1}{\sqrt{2}}$

రేఖ వృత్తాన్ని స్పృశిస్తుంది

www.sakshieducation.com

రేఖ వృత్తాన్ని $P(h,k)$ వద్ద స్పృశిస్తుంది అనుకొనుము

C యొక్క లంబ పాదం P అవుతుంది

$$\frac{h-\frac{3}{2}}{1}=\frac{k+\frac{7}{2}}{1}=\frac{\left(\frac{3}{2}-\frac{7}{2}+1\right)}{1^2+1^2}$$

$$\Rightarrow h-\frac{3}{2}=k+\frac{7}{2}=+\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow h=2,\ k=-3$$

$\therefore$ స్పర్శ బిందువు $=(2,-3)$

14. $x^2+y^2+22x-4y-100=0$; $x^2+y^2-22x+4y+100=0$ వృత్తాల ప్రత్యక్ష ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు కనుక్కోండి.

A. $C_1=(-11,2)$ $\qquad C_2=(11,-2)$

$$r_1=\sqrt{121+4+100}=15$$

$$r_2=\sqrt{121+41-100}=5$$

$y=mx+c$ స్పర్శరేఖ అనుకొనుము

$$mx-y+c=0$$

$$\left|\frac{m(-11)-2+c}{\sqrt{1+m^2}}\right|=15 \quad .... (1)$$

$$5=\left|\frac{m(11)+2+c}{\sqrt{1+m^2}}\right| \quad .... (2)$$

(1) + (2) చేయగా

$$=\frac{3}{1}=\frac{-11m-2+c}{m(11)+2+c}$$

$$=\frac{3+1}{3-1}=\frac{2c}{-22m-4}$$

$C=-22m-4 \qquad \therefore y=mx-22m-4$

www.sakshieducation.com

ఈ రేఖ రెండవ వృత్తానికి స్పర్శరేఖ

$$\therefore \left|\frac{11m+2-22m-4}{\sqrt{m^2+1}}\right| = 5$$

వర్గీకరించి అడ్డ గుణకారము చేయగా

$$25\left(1+m^2\right) = \left(11m+2-22m-4\right)^2$$

$$96m^2+44m-21=0$$

$$\Rightarrow 96m^2+72m-28m-21=0$$

$$m = \frac{7}{24}, \frac{-3}{4}$$

$$C = \frac{25}{2}$$

స్పర్శరేఖ సమీకరణము

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{2}$$

$$4y+3x=50 \Rightarrow 3x+4y-50=0$$

$$C = -22m-4$$

$$= -22\left(\frac{7}{24}\right)-4$$

$$= \frac{-77-48}{12} = \frac{-125}{12}$$

$$y = \frac{7}{24}x - \frac{125}{2}$$

స్పర్శరేఖ సమీకరణము

$$\Rightarrow 24y = 7x-250$$

$$\Rightarrow 7x-24y-250=0$$

www.sakshieducation.com

15. $x^2+y^2-4x-10y+28=0$; $x^2+y^2+4x-6y+4=0$ వృత్తాల తిర్యక్ ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు కనుక్కోండి.

A. $C_1=(2,5), C_2=(-2,3)$

$e_1\sqrt{4+25-28}=1, r_2=\sqrt{4+9-4}=3$

$r_1+r_2=4$

$C_1C_2=\sqrt{(2+2)^2+(5-3)^2}$

$=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$

'C' బిందువు $C_1\ C_2$ 5 : 3 నిష్పత్తిలో విభిజిస్తుంది

$$C=\left[\frac{1.(-2)+3.2}{1+3},\frac{1.3+3.5}{1+3}\right]$$

$$=\left[\frac{4}{4},\frac{9}{2}\right]=\left[1,\frac{9}{2}\right]$$

తిర్యక్ ఉమ్మడి స్పర్శరేఖల సమీకరణము

$S_1^2=SS_{11}$

$$\left(x.1+\frac{9}{2}y-2(x+1)-5\left(y+\frac{9}{2}\right)+28\right)^2$$

$$=\left[1+\frac{81}{4}-4-10\times\frac{9}{2}+28\right]$$

$(x^2+y^2-4x-10y+28)$

$$\left(-x-\frac{1}{2}y+\frac{7}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(x^2+y^2-4x-10y+28)$$

$(-2x-y+7)^2=(x^2+y^2-4x-10y+28)$

$4x^2+y^2+4xy-28x-14y+49$

$=x^2+y^2-4x-10y+28$

$3x^2+4xy-24x-4y+21=0$

www.sakshieducation.com

$(3x+4y-21)\,;\,(x-1)=0$

$3x+4y-21\,;\,x-1=0$

16. $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ వృత్తాన్ని $(-1,1)$ వద్ద అంతరంగా స్పృశిస్తూ, 2 యూనిట్ల వ్యాసార్థం ఉన్న వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

A. వృత్త సమీకరణము $x^2+y^2-4x+6y-12=0$

కేంద్రం $C_1=(+2,-3)$

వ్యాసార్థం $(r_1)=\sqrt{4+9+12}=\sqrt{25}=5$

కావలసిన వృత్త వ్యాసారం $(r_2)=2$

కావలసిన వృత్త కేంద్రం $C_2(\alpha,\beta)$ అనుకుందాం

స్పర్శబిందువు $P(-1,1)$, $\overline{C_1C_2}$ రేఖాఖండితాన్ని బాహ్యంగా $r_1:r_2=5:2$ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది. కనుక

$$P(-1,1)=\left(\frac{5\alpha-2(2)}{5-2},\frac{5\beta-2(-3)}{5-2}\right)$$

$$\frac{5\alpha-4}{3}=-1\Rightarrow 5\alpha=-3+4=1$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{1}{5}$$

$$\frac{5\beta+6}{3}=1\Rightarrow 5\beta=3-6\Rightarrow \beta=\frac{-3}{5}$$

$$\therefore\ C_2=\left(\frac{1}{5},\frac{-3}{5}\right)$$

$\therefore$ కావలసిన వృత్త సమీకరణం

$$\left(x-\frac{1}{5}\right)^2+\left(y+\frac{-3}{5}\right)=2^2$$

$$\Rightarrow x^2-\frac{2x}{5}+\frac{1}{25}+y^2+\frac{6}{5}y+\frac{9}{25}=4$$

www.sakshieducation.com

$$\Rightarrow 25\left(x^2+y^2-10x\right)+1+30+9=100$$

$$\Rightarrow 25\left(x^2+y^2\right)-10x+30y-90=0$$

$$\Rightarrow 5\left(x^2+y^2\right)-2x+6y-18=0$$

17. $(1,3)$ నుంచి $x^2+y^2-2x+4y-11=0$ వృత్తానికి గల స్పర్శరేఖా యుగ్మ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి. వాటి మధ్య కోణం ఎంత ?

A. $S.S_{11}=S_1^2$

$$\left(x^2+y^2-2x+4y-11\right)\left(1+9-2+12-11\right)$$

$$=\left[x+3y-1(x+1)+2(y+3)-11\right]^2$$

$$\left(x^2+y^2-2x+4y-11\right)9=\left[5y-6\right]^2$$

$$9x^2+9y^2-18x+36y-99$$

$$=25y^2+36-60y$$

$$9x^2-16y^2-18x+96y-135=0$$

$$\cos\theta=\frac{|a+b|}{\sqrt{(a-b)^2+4h^2}}=\frac{|9-16|}{\sqrt{(25)^2}}$$

$$\frac{|-7|}{25}=\frac{7}{25}$$

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{7}{25}\right)$$

www.sakshieducation.com

18. $2x-3y+1=0$ సరళరేఖని $(1,1)$ వద్ద స్పృశించే $\sqrt{13}$ యూనిట్ల వ్యాసార్థంతో గల వృత్తాల సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

A. వృత్త కేంద్రాలు $(1,1)$ గుండా పోతూ $2x-3y+1=0$ రేఖకు లంబంగా ఉండే రేఖ మీద ఉంటాయి

కేంద్రాలు కలిగిన రేఖ

$3x+2y+k=0$

ఈ రేఖ $(1,1)$ గుండా పోతుంది

$3+2+k=0 \Rightarrow k=-5$

AB సమీకరణాలు $3x+2y-5=0$

ఈ కేంద్రాలు $(1,1)$ నుంచి $\sqrt{13}$ యూనిట్ల దూరంలో ఉంటూ $3x+2y-5=0$ రేఖ పై ఉంటాయి. కాబట్టి ఈ కేంద్రాలు

$\left(1+\sqrt{13}\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\right),1+\sqrt{13},\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$ మరియు $\left(1-\sqrt{13}\frac{(-2)}{\sqrt{13}},1-\sqrt{13},\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$

(i.e.,) $(1-2,\ 1+3)$ మరియు $(1+2,\ 1-3)$

$(-1,4)$ మరియు $(3,-2)$

సందర్భం (i) :

కేంద్రం $(-1,4)$, $r=\sqrt{13}$

వృత్త సమీకరణము

$(x+1)^2+(y-4)^2=13$

$x^2+2x+1+^2-8y+16-13=0$

$x^2+y^2+2x-8y+4=0$

సందర్భం (ii) :

కేంద్రం $(3,-2)$, $r=\sqrt{13}$

వృత్త సమీకరణము

$(x-3)^2+(y+2)^2=13$

$x^2-6x+9+y^2+4y+4-13=0$

www.sakshieducation.com

$x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0$

19. $x_1 y_1 \neq 0$ **అయి,** $x^2 + y^2 = a^2$ **వృత్తం పై ఉన్న బిందువు** $P(x_1, y_1)$ **వద్ద గీసిన స్పర్శరేఖ నిరూపకాక్షాలతో ఏర్పరిచే త్రిభుజ వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.**

A. వృత్త సమీకరణము $x^2 + y^2 = a^2$

$P(x_1, y_1)$ వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణము

$xx_1 + yy_1 = a^2$ .... (1)

ఈ స్పర్శరేఖ X - అక్షాన్ని A వద్ద, Y - అక్షాన్ని B వద్ద ఖండిస్తుంది

అంతరఖండ రూపంలోనికి మార్చగా

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{a^2} = 1$$

$$\frac{x}{\left(\frac{a^2}{x_1}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{a^2}{y_1}\right)} = 1$$

$$OA = \frac{a^2}{x_1}, OB = \frac{a^2}{y_1}$$

$$OAB = \frac{1}{2}|OA.DB| = \frac{1}{2}\left|\frac{a^2}{x_1}.\frac{a^2}{y_1}\right|$$

$$= \frac{a^4}{2|x_1 y_1|}$$

www.sakshieducation.com

20. $x^2+y^2=a^2$ వృత్తానికి P గుండా గీసిన స్పర్శరేఖలు X - అక్షం గుండా θ_1, θ_2 కోణాలు చేస్తున్నాయి. $\cot\theta_1+\cot\theta_2=k$ అయ్యే బిందు పథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

A. వృత్త సమీకరణము $x^2+y^2=a^2$

స్పర్శరేఖ m అయితే $P(x_1, y_1)$ గుండా పోయే స్పర్శరేఖ సమీకరణము

$$y_1=mx_1\pm a\sqrt{1+m^2}$$

$$(y_1-mx_1)^2=a^2(1+m^2)$$

$$m^2x_1^2+y_1^2-2m_1y_1-a^2-a^2m^2=0$$

$$m^2(x_1^2-a^2)-2mx_1y_1+(y_1^2-a^2)=0$$

m_1, m_2 ల మూలాలు అనుకొందాం

$$m_1+m_2=\tan\theta_1+\tan\theta_2=\frac{2x_1y_1}{x_1^2-a^2}$$

$$m_1m_2=\tan\theta_1\tan\theta_2=\frac{y_1^2-a^2}{x_1^2-a^2}$$

దత్తాంశం ప్రకారం $\cot\theta_1+\cot\theta_2=k$

$$\frac{1}{\tan\theta_1}+\frac{1}{\tan\theta_2}=k$$

$$\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{\tan\theta_1.\tan\theta_2}=k$$

$$\frac{2x_1y_1}{y_1^2-a^2}=k$$

$$2x_1y_1=k(y_1^2-a^2)$$

$P(x_1, y_1)$ బిందు పథము $2xy=k(y^2-a^2)$

విపర్యంగా $P(x_1,y_1)2xy=k(y^2-a^2)$

నియమాన్ని తృప్తిపరుస్తుంది

$\cot\theta_1+\cot\theta_2=k$ అని చూపవచ్చును

www.sakshieducation.com

P బిందు పథము $2xy = k\left(y^2 - a^2\right)$

21. $lx + my + n = 0$ రేఖపై ఉన్న బిందువుల నుంచి $x^2 + y^2 = a^2$ వృత్తానికి గీసిన స్పర్శజ్యాల మధ్య బిందువుల బిందు పథాన్ని కనుక్కోండి.

A. $P\left(x_1, y_1\right)$ బిందు పథము P మీది బిందువు

$x^2 + y^2 = a^2$

జ్యా సమీకరణము $lx + my + n = 0$ .... (1)

వృత్త సమీకరణము $x^2 + y^2 = a^2$

$\left(x_1, y_1\right)$ మధ్య బిందువుగా గల జ్యా సమీకరణము

$S_1 = S_{11}$

$xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2$

$xx_1 + yy_1 - \left(x_1^2 + y_1^2\right) = 0$ .... (2)

వృత్తం దృష్ట్యా (2) యొక్క ధృవము

$$\left(\frac{-a^2 l}{n}, -\frac{a^2 m}{n}\right) = \left(\frac{-a^2 x_1}{-\left(x_1^2 + y_1^2\right)}, \frac{-a^2 y_1}{-\left(x_1^2 + y_1^2\right)}\right)$$

$$= \left(\frac{a^2 x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \frac{a^2 y_1}{x_1^2 + y_1^2}\right)$$

$lx + my + n = 0$ రేఖ మీద P ఉంది

$$l\frac{\left(a^2 x_1\right)}{x_1^2 + y_1^2} + \frac{m\left(a^2 y_1\right)}{x_1^2 + y_1^2} + n = 0$$

$$la^2 x_1 + ma^2 y_1 + n\left(x_1^2 + y_1^2\right) = 0$$

$P\left(x_1, y_1\right)$ బిందు పథము $n\left(x^2 + y^2\right) + a^2\left(lx + my\right) = 0$

www.sakshieducation.com

22. $x^2+y^2-14x+6y+33=0$, $x^2+y^2+30x-2y+1=0$ లకు నాలుగు ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు ఉంటాయని చూపి వాటికి సరూప అంతర కేంద్రం సరేప బాహ్య కేంద్రంలను కనుక్కోండి.

A. వృత్తాల సమీకరణాలు

$x^2+y^2-14x+6y+33=0$ మరియు

$x^2+y^2+30x-2y+1=0$

కేంద్రాలు $A(7,-3), B(-15,1)$

$r_1=\sqrt{49+9-33}=5$

$r_2=\sqrt{225+1-1}=15$

$AB=\sqrt{(7+15)^2+(-3-1)^2}$

$=\sqrt{484+16}=\sqrt{500}>r_1+r_2$

$\therefore$ దత్త వృత్తానికి 4 ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలను గీయగలము

$r_1:r_2=5:15=1:3$

S^1, AB ని 1 : 3 నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజిస్తుంది

S^1 నిరూపకాలు

$$\left(\frac{1.(-15)+3.7}{1+3},\frac{1.1+3(-3)}{1+3}\right)$$

$$=\left(\frac{6}{4},\frac{1-9}{4}\right)=\left(\frac{3}{2},-2\right)$$

బాహ్య స్వరూప కేంద్రం S, AB ని బాహ్యంగా 1 : 3 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది

S నిరూపకాలు

$$\left(\frac{1(-15)-3(7)}{1-3},\frac{1.1-3(-3)}{1-3}\right)$$

$$=\left(\frac{-15-21}{-2},\frac{1+9}{-2}\right)=(18,-5)$$

www.sakshieducation.com

23. $x^2+y^2-8x-6y-21=0$, $x^2+y^2-2y-15=0$ వృత్తాలకు రెండే రెండు ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలుంటాయని చూపండి. ఇంకా వీటి ఖండన బిందువులను కనుక్కోండి.

A. C_1, C_2 కేంద్రాలు మరియు r_1, r_2 లు వ్యాసార్థాలు

వృత్తాల సమీకరణాలు

$x^2+y^2-8x-6y-21=0$ మరియు

$x^2+y^2-2y-15=0$

$C_1(4,3), C_2(0,1)$

$r_1=\sqrt{16+9-21}=2, r_2=\sqrt{1+15}=4$

$\overline{C_1C_2^2}=(4-0)^2+(3-1)^2=16+4=20$

$C_1C_2=2\sqrt{5}$

$|r_1-r_2|=|2-4|=2, r_1+r_2=2+4=6$

$|r_1-r_2|<C_1C_2<r_1+r_2$

దత్త వృత్తాలు ఖండించుకుంటాయి. 2 ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు ఉంటాయి

$r_1:r_2=2:4=1:2$

ఈ స్పర్శరేఖలు బాహ్య సరూప కేంద్రం వద్ద ఖండిచుకుంటాయి

S నిరూపకాలు

$$\left(\frac{1.0-2.4}{1-2},\frac{1.0-2.3}{-2}\right)=\left(\frac{-8}{-1},\frac{-5}{-1}\right)=(8,5)$$

www.sakshieducation.com

24. $x^2+y^2-4x-6y-12=0$, $x^2+y^2+6x+18y+26=0$ వృత్తాలు స్పృశించుకుంటాయని చూపండి. ఇంకా స్పర్శబిందువును, స్పర్శబిందువు వద్ద ఉమ్మడి స్పర్శరేఖను కనుక్కోండి.

A. వృత్తాల సమీకరణాలు

$x^2+y^2-4x-6y-12=0$ మరియు

$x^2+y^2+6x+18y+26=0$

కేంద్రాలు $C_1(2,3)$, $C_2=(-3,-9)$

$r_1=\sqrt{4+9+12}=5$

$r_2=\sqrt{9+81-26}=8$

$C_1C_2=\sqrt{(2+3)^2+(3+9)^2}$

$=\sqrt{25+144}=13=r_1+r_2$

$\therefore$ వృత్తాలు బాహ్యంగా స్పృశించుకుంటాయి

ప్రత్యక్ష ఉమ్మడి స్పర్శరేఖల సమీకరణము

$S_1-S_2=0$

$-10x-24y-38=0$

$5x+12y+19=0$

స్పర్శబిందువు P, C_1C_2ని 5 : 8 నిష్పత్తిలో

విభజిస్తుంది. నిరూపకాలు

P నిరూపకాలు

$$\left(\frac{5(-3)+8.2}{5+8},\frac{5(-9)+8.3}{5+8}\right)=\left(\frac{1}{13},\frac{-21}{13}\right)$$

www.sakshieducation.com