

యాదృచ్ఛిక చలరాశులు, సంభావ్యతా విభాజనాలు.

1. $X = x$ -3 -2 -1 0 1 2 3

$P(X = x)$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{9}$

అనేది ఒక యాదృచ్ఛిక చలరాశి X సంభావ్యతా విభాజనం. అయితే X విస్తృతి కనుక్కోండి.

జ: అంకమధ్యమం $\mu = \sum x_i P(X = x_i)$

$$= (-3) \times \frac{1}{9} + (-2) \times \frac{1}{9} + (-1) \times \frac{1}{9} + 0 \times \frac{1}{9} + 1 \times \frac{1}{9} + 2 \times \frac{1}{9} + 3 \times \frac{1}{9}$$

$$= -\frac{3}{9} - \frac{2}{9} - \frac{1}{9} + 0 + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} = 0$$

విస్తృతి $\sigma^2 = \sum x^2 P(X = x) - \mu^2$

$$= 9 \times \frac{1}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + 1 \times \frac{1}{9} + 0 \times \frac{1}{9} + 1 \times \frac{1}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + 9 \times \frac{1}{9} - 0$$

$$= 1 + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + 1$$

$$= 2 + \frac{10}{9} = \frac{28}{9}$$

2. ఒక యాదృచ్ఛిక చలరాశి సంభావ్యతా విభాజనాన్ని కింద ఇవ్వడమైంది

$X = x_i$ 1 2 3 4 5

$P(X = x_i)$ k $2k$ $3k$ $4k$ $5k$

k విలువను, X యొక్క అంకమధ్యమం, విస్తృతిలను కనుక్కోండి.

జ: $\sum_{i=1}^5 P(X = x_i) = 1$

$$\Rightarrow k + 2k + 3k + 4k + 5k = 1$$

$$\therefore k = \frac{1}{15}$$

X యొక్క అంకమధ్యమం $\mu = \sum_{i=1}^5 x_i P(X = x_i)$

$$= 1(k) + 2(2k) + 3(3k) + 4(4k) + 5(5k)$$

$$= k(1+4+9+16+25)$$

$$= \frac{1}{15} \times 55 = \frac{55}{15} = \frac{11}{3}$$

$$X \text{ యొక్క విస్తృతి } \sigma^2 = \sum x_i^2 P(X = x_i) - \mu^2$$

$$= 1(k) + 4.(2k) + 9.(3k) + 16.(4k)$$

$$+ 25.(5k) - \left(\frac{11}{3}\right)^2$$

$$= k(1+8+27+64+125) - \left(\frac{11}{3}\right)^2$$

$$= \frac{1}{15} (225) - \left(\frac{11}{3}\right)^2 = 15 - \frac{121}{9} = \frac{14}{9}$$

3. ఒక విచ్చిన్న యాదృచ్ఛికచలరాశి సంభావ్యతా విభాజన ప్రమేయం, $x = 0, 1, 2$ బిందువులవద్ద మినహా తక్కిన అన్ని చోట్ల సున్న అవుతుంది. ఈ బిందువుల వద్ద, దాని విలువ

$$P(0) = 3c^3, P(1) = 4c - 10c^2,$$

$$P(2) = 5c - 1, c > 0. \quad c \text{ విలువ కనుక్కోండి.}$$

సాధన. $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$

$$3c^3 + 4c - 10c^2 + 5c - 1 = 1$$

$$3c^3 - 10c^2 + 9c - 2 = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$c = 1 \text{ అయిన } 3 - 10 + 9 - 2 = 12 - 12 = 0$$

$c = 1$ పై సమీకరణాన్ని ధృవీకరిస్తుంది.

$$c = 1 \Rightarrow P(X = 0) = 3 \text{ అసాధ్యం}$$

(1) ను $c - 1$ చే భాగిస్తే

$$(3c^2 - 7c + 2) = 0 \text{ వస్తుంది}$$

$$(c - 2)(3c - 1) = 0$$

$$c = 2 \quad c = \frac{1}{3}$$

$$c = 2 \Rightarrow P(X = 0) = 3.2^3 = 24 \text{ అసాధ్యం}$$

$$c = \frac{1}{3}$$

4. $F(x) = c\left(\frac{2}{3}\right)^x, x=1,2,3,\dots$ ఒక విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి X సంభావ్యతా విభాజన ప్రమేయాన్ని తృప్తిపరచేటట్లుగా, స్థిరరాశి c విలువను కనుక్కోండి.

సాధన. దత్తాంశం నుండి $F(x) = c\left(\frac{2}{3}\right)^x, x=1,2,3$

$$P(x) = c\left(\frac{2}{3}\right)^x, x=1,2,3$$

$$\sum_{x=1}^{\infty} P(x) = 1$$

$$\sum_{x=1}^{\infty} c\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$$

$$\Rightarrow c\left[\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots\infty\right] = 1$$

$$\Rightarrow c \cdot \frac{2}{3}\left[1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots\infty\right] = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2c}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) = 1$$

$$\left[a + ar + ar^2 + \dots\infty = \frac{a}{1-r}, |r| < 1\right]$$

$$\Rightarrow \frac{2c}{3} \times 3 = 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{2}}$$

5.

$$X = x \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$$

$$P(X = x) \quad 0.1 \quad k \quad 0.2 \quad 2k \quad 0.3 \quad k$$

అనేది ఒక యాదృచ్ఛిక చలరాశి X సంభావ్యతావిభాజనం k విలువ, X విస్తృతులను కనుక్కోండి.

సాధన. సంభావ్యత మొత్తం = 1

$$0.1 + k + 0.2 + 2k + 0.3 + k = 1$$

$$4k + 0.6 = 1$$

$$4k = 1 - 0.6 = 0.4$$

$$k = \frac{0.4}{4} = 0.1$$

$$\text{అంకమధ్యమం } (\mu) = (-2)(0.1) + (-1)k$$

$$+ 0(0.2) + 1(2k) + 2(0.3) + 3k$$

$$= 0.2 - k + 0 + 2k + 0.6 + 3k$$

$$= 4k + 0.4$$

$$= 4(0.1) + 0.4$$

$$= 0.4 + 0.4$$

$$= 0.8$$

$$\mu = 0.8$$

$$\text{విస్తృతి } (\sigma^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 P(x = x_i) - \mu^2$$

$$\text{విస్తృతి} = 4(0.1) + 1(k) + 0(0.2) + 1(2k)$$

$$+ 4(0.3) + 9k - \mu^2$$

$$= 0.4 + k + 0 + 2k + 4(0.3) + 9k - \mu^2$$

$$= 12k + 0.4 + 1.2 - (0.8)^2$$

$$= 1.2 + 1.6 - 0.64$$

$$\sigma^2 = 2.8 - 0.64 = 2.16$$

6. ఒక యాదృచ్ఛిక చలరాశి X సంభావ్యతా విభాజనం ఈ క్రింది విధంగా ఉంది.

$$X = x \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7$$

$$P(X = x) \quad 0 \quad k \quad 2k \quad 2k \quad 3k \quad k^2 \quad 2k^2 \quad 7k^2 + k$$

(i) k విలువ (ii) X అంకమధ్యమం

(iii) $P(0 < x < 5)$ లను కనుక్కోండి

సాధన. సంభావ్యతల మొత్తం = 1

$$0 + k + 2k + 2k + 3k + k^2 + 2k^2 + 7k^2 + k = 1$$

$$\Rightarrow 10k^2 + 9k = 1$$

$$\Rightarrow 10k^2 + 9k - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 10k^2 + 10k - k - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 10k(k+1) - 1(k+1) = 0$$

$$\Rightarrow (10k-1)(k+1) = 0$$

$$k = \frac{1}{10} - 1$$

$$k > 0$$

$$k = \frac{1}{10}$$

$$(i) k = \frac{1}{10}$$

(ii) X అంక మధ్యమం

$$(\mu) = \sum_{i=1}^n x_i P(x = x_i)$$

$$(\mu) = 0(0) + 1(k) + 2(2k) + 3(2k) + 4(3k) + 5(k^2) + 6(2k^2) + 7(7k^2 + k)$$

$$= 0 + k + 4k + 6k + 12k + 5k^2 + 12k^2 + 49k^2 + 7k$$

$$= 66k^2 + 30k$$

$$= 66 \left(\frac{1}{100} \right) + 30 \times \left(\frac{1}{10} \right)$$

$$= 0.66 + 3 = 3.66$$

(iii) $P(0 < x < 5)$

$$P(0 < x < 5) = P(X = 1)$$

$$+ P(X = 2) + P(X = 3) + P(x = 4)$$

$$= k + 2k + 2k + 3k$$

$$= 8k$$

$$= 8 \times \frac{1}{10}$$

$$= \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

7. ఒక యూజ్విక చలరాశి వ్యాప్తి $X = \{0, 1, 2\}$ $P(X = 0) = 3c^3, P(X = 1) = 4c - 10c^2$

$P(X = 2) = 5c - 1$ అయినప్పుడు

(i) c విలువ

(ii) $P(X < 1), P(1 < X \leq 2), P(0 < x \leq 3)$ అను కనుక్కోండి.

సాధన. $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$

$$3c^3 + 4c - 10c^2 + 5c - 1 = 1$$

$$3c^3 - 10c^2 + 9c - 2 = 0$$

$c = 1$ పై సమీకరణాన్ని ధృవీకరిస్తుంది

$c = 1 \Rightarrow P(X = 0) = 3$ అసాధ్యం

$c - 1$ చే భాగిస్తే

$$3c^2 - 7c + 2 = 0$$

$$(c - 2)(3c - 1) = 0$$

$c = 2$ లేదా $c = \frac{1}{3}$

$c = 2 \Rightarrow P(X = 0) = 3 \cdot 2^3 = 24$ అది కూడా అసాధ్యం

$$c = \frac{1}{3}$$

(i) $P(X < 1) = P(X = 0)$

$$= 3 \cdot c^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{27} = \frac{1}{9}$$

(ii) $P(1 < X \leq 2) = P(X = 2) = 5c - 1$

$$= \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$$

(iii) $P(0 < x \leq 3) = P(X = 1)$

$$+ P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$= 4c - 10c^2 + 5c - 1 + 0$$

$$\begin{aligned}
&= 9c - 10c^2 - 1 \\
&= 9 \cdot \frac{1}{3} - 10 \cdot \frac{1}{9} - 1 \\
&= 3 - \frac{10}{9} - 1 = 2 - \frac{10}{9} = \frac{8}{9}
\end{aligned}$$

8. ఒక యాదృచ్ఛిక చలరాశి X వ్యాప్తి $\{1, 2, 3, \dots\}$ $P(X = K) = \frac{c^k}{k!}; (k = 1, 2, 3, \dots)$
అయితే c విలువను, $P(0 < x < 3)$ ని కనుక్కోండి.

సాధన. సంభావ్యతల మొత్తం = 1

$$\Sigma P(X = k) = 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^k}{k!} = 1$$

$$c + \frac{c^2}{2!} + \frac{c^3}{3!} + \dots = 1$$

ఇరువైపుల 1 కలుపగా

$$1 + c + \frac{c^2}{2!} + \frac{c^3}{3!} + \dots = 2$$

$$e^c = 2 \Rightarrow \log_e e^c = \log_e 2$$

$$\Rightarrow c = \log_e 2$$

$$P(0 < X < 3) = P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$= c + \frac{c^2}{2} = \log_e 2 + \frac{(\log_e 2)^2}{2}$$

9. ఒక నాణేత్తి n సార్లు ఎగరవేసే ప్రయోగంలో, బొమ్మలు పడే సంఖ్యను, చలరాశి X నూచిస్తుంది.

$P(X = 4), P(X = 5), P(X = 6)$ లు అంకశ్రేణిలో ఉన్నాయి. అప్పుడు n కనుక్కోండి.

సాధన. X ద్విపద విభాజనాన్ని పాటిస్తుంది

$$P = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2} \text{ (నాణేత్తి ఎగరవేస్తే)}$$

Hint : a, b, c లు $A.P$ లో ఉంటే

$$2b = a + c$$

(లేదా) $b - a = c - b$

$P(X = 4), P(X = 5), P(X = 6)$ లు $A.P$ లో ఉన్నాయి

$$\Rightarrow {}^n C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}, {}^n C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}$$

$${}^n C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-6} \text{ లు } A.P \text{ లో ఉన్నాయి}$$

$$\Rightarrow {}^n C_4, {}^n C_5, {}^n C_6 \text{ లు } A.P \text{ లో ఉన్నాయి}$$

$$\Rightarrow 2 {}^n C_5 = {}^n C_4 + {}^n C_6$$

$$\Rightarrow \frac{2(n!)}{5!(n-5)!} = \frac{n!}{4!(n-4)!} + \frac{n!}{6!(n-6)!}$$

$$\Rightarrow \frac{2(n!)}{5 \times 4!(n-5)(n-6)!} =$$

$$\frac{n!}{4!(n-4)(n-5)(n-6)!}$$

$$+ \frac{n!}{6 \times 5 \times 4!(n-6)!}$$

$$\Rightarrow \frac{2(n!)}{5 \times 4!(n-5)(n-6)!}$$

$$= \frac{n!}{4!(n-6)!} \left[\frac{1}{(n-4)(n-5)} + \frac{1}{30} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5(n-5)} = \frac{30 + (n-4)(n-5)}{30(n-4)(n-5)}$$

$$\Rightarrow 2 \times 30(n-4) = 5[30 + n^2 - 9n + 20]$$

$$\Rightarrow 12n - 48 = n^2 - 9n - 50$$

$$\Rightarrow n^2 - 21n + 98 = 0$$

$$n(n-14) - 7(n-14) = 0$$

$$(n-7)(n-14) = 0$$

$$n = 7 \quad \text{లేదా} \quad 14$$

10. ఒక ద్విపద చలరాశి X అంకమధ్యం, విస్తృతులు వరుసగా 2.4, 1.44 అయితే, $P(1 < x \leq 4)$ కనుక్కోండి.

సాధన. X అనికమధ్యమం $= np = 2.4$ (1)

విస్తృతి $= npq = 1.44$ (2)

$$\frac{npq}{np} = \frac{1.44}{2.4}$$

$$q = 0.6 = \frac{3}{5}$$

$$p = 1 - q = 1 - 0.6 = 0.4 = \frac{2}{5}$$

(1) లో రాయగా

$$n(0.4) = 2.4$$

$$n = \frac{2.4}{0.4} = 6$$

$$P(1 < X \leq 4) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$$

$$= {}^6C_2 q \cdot p^2 + {}^6C_3 q^3 \cdot p^3 + {}^6C_4 q^2 \cdot p^4$$

$$= {}^6C_2 \left(\frac{3}{5}\right)^4 \left(\frac{2}{5}\right)^2 + {}^6C_3 \left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)^3 + {}^6C_4 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^4$$

$$= \frac{6^2}{5^6} (15.9 + 20.6 + 15.4)$$

$$= \frac{36}{15625} (135 + 120 + 60)$$

$$= \frac{315 \times 36}{15625}$$

$$= \frac{36 \times 63}{3125} = \frac{2268}{3125}$$

11. కనీసం ఒక బొమ్మ వడుతూ, సంభావ్యత కనీసం 0.8 కావడానికి, ఒక నిష్పాక్షిక నాణేన్ని ఎగరవేయాల్సిన గరిష్ఠ సంఖ్యను కనుక్కోండి.

జ: ఒక నిష్పాక్షిక నాణేన్ని n సార్లు ఎగరవేసితిని అనుకొనుము.

$$\text{ఇచ్చట } p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P(X = x) = {}^n C_x p^x q^{n-x}$$

$$P(X = 0) = {}^n C_0 p^0 q^{n-0} \\ = q^n$$

దత్తాంశం నుంచి బొమ్మ వడుతూ, కనీసం 0.8 కావడానికి, సంభావ్యత

$$P(X \geq 1) \geq 0.8$$

$$\Rightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0.8$$

$$\Rightarrow 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 0.8$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{1}{2}\right)^n \geq -0.2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n < (0.2)$$

$n > 3$ అయిన పై అసమీకరణం సత్యం. కనుక n గరిష్ఠ విలువ = 3

12. ఒక బాంబు ఒక వంతెనను కూల్చివేసే సంభావ్యత $1/2$, వంతెనను కూల్చడానికి మూడుసార్లు (వరసగా కానవసరం లేదు) నేరుగా కొట్టవలసి వస్తుంది. వంతెన కూలే సంభావ్యత 0.9 కంటే తక్కువ కావడానికి కావలసిన బాంబుల కనిష్ఠ సంఖ్యను కనుక్కోండి

జ: దత్తాంశం నుంచి ఒక బాంబు, ఒక వంతెనను కూల్చి వేసే సంభావ్యత = $\frac{1}{2}$

$$\therefore p = \frac{1}{2}, \therefore q = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

దత్తాంశం నుంచి $P(X \geq 3) > 0.9$

$$\Rightarrow 1 - P(X < 3) > 0.9$$

$$\Rightarrow 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$+ P(X = 2)] > 0.9$$

$$\Rightarrow 1 - \left[{}^n C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n + {}^n C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right) \right]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[1+n+\frac{n(n-1)}{2}\right] < 0.1$$

$$\Rightarrow 1+n+\frac{n(n-1)}{2} < (0.1) \cdot 2^n$$

యత్న దోష పద్ధతిని $n \geq 9$ పై అనమీకరణంను తృప్తి పరుస్తుంది.

\therefore కనిష్ట బాంబుల సంఖ్య $n=9$

13. ఒక నగరలో 50 రోజుల వ్యవధిలో 10 ప్రమాదాలు సంభవిస్తాయి. ప్రమాదాల సంఖ్య ఒక పాయిజాన్ విభాజనాన్ని అనుసరిస్తుందనుకొంటే, ఒక రోజులో 3 లేదా అంతకంటే ఎక్కువ ప్రమాదాలు జరగగల సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

జ: ఇచ్చట $\lambda = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$

\therefore దత్తాంశం నుంచి, ప్రమాదాల సంఖ్య ఒక పాయిజాన్ విభాజనాన్ని అనుసరిస్తుందనుకొంటే, ఒక రోజులో 3 లేదా అంతకంటే ఎక్కువ ప్రమాదాలు జరగటానికి సంభావ్యత

$$P(X=x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$P(X \geq 3) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)]$$

$$= 1 - \left[e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \cdot \lambda + \frac{e^{-\lambda} \lambda^2}{2!} \right]$$

$$= 1 - \left[e^{-\frac{1}{5}} + \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{25} \right) e^{-\frac{1}{5}} \right]$$

$$= 1 - \left[e^{-\frac{1}{5}} + \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}} \cdot \frac{1}{50} e^{-\frac{1}{5}} \right]$$

$$= 1 - e^{-\frac{1}{5}} \left[1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{50} \right] = 1 - e^{-\frac{1}{5}} \left[\frac{61}{50} \right]$$

(లేదా)

$$P(X \geq 3) = \sum_{x=3}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \lambda = \frac{1}{5}$$

14. 5 నాణేలను 320 సార్లు ఎగరవేశారు. బొమ్మల సంఖ్యకు పొసఁపునఱ్య విభాజనాన్ని కనుక్కొని, ఫలితాన్ని పట్టికగా రాయండి.

జ: ఒక నాణేంను ఎగురవేసినప్పుడు $p = \frac{1}{2}$ మరియు $q = \frac{1}{2}$ ఇచ్చట $n = 5$;

బొమ్మల సంఖ్యకు పొసఁపునఱ్య విభాజనం

$$f_x = N \cdot {}^n C_x p^x q^{n-x}, x = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \text{ (బొమ్మల సంఖ్య)}$$

$x = 0$ అయిన

$$f_0 = 320({}^5 C_0) \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-0} = 320 \left(\frac{1}{2^5}\right) = 10$$

$$f_1 = 320({}^5 C_1) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = \frac{320 \times 5}{32} = 50$$

$$f_2 = 320({}^5 C_2) \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-2}$$

$$= 320(10) \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 100$$

$$f_3 = 320({}^5 C_4) \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-4}$$

$$= 320(5) \left(\frac{1}{2^5}\right) = 50$$

$$f_5 = 320({}^5 C_5) \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-5} = 10$$

\therefore బొమ్మల సంఖ్య యొక్క పొసఁపునఱ్య విభాజన పట్టిక

$n(H)$	0	1	2	3	4	5
f	10	50	100	100	50	10

15. ఒక ప్రశ్నాపత్రంలోని 10 సమాధానాలకు కనీసం 6 సరైనవిగా ఊహించగల సంభావ్యత కింది సందర్భాలలో కనుక్కోండి

i) ప్రశ్నాపత్రంలో తప్ప ఒప్పులు గల ప్రశ్నలున్నప్పుడు

ii) ప్రశ్నాపత్రంలో, 4 ఐచ్ఛిక సమాధానాలుండే బహుళ ఐచ్ఛిక ప్రశ్నలున్నప్పుడు

జ: ఒక ప్రశ్నాపత్రంలోని 10 సమాధానాలకు కనీసం 6 సరైనవిగా ఊహించగల సంభావ్యత

i) ప్రశ్నాపత్రంలో తప్ప, ఒప్పులు గల ప్రశ్నలు ఉండటానికి సంభావ్యత

$$P(X \geq 6) = P(X = 6) + P(X = 7) +$$

$$P(X = 8) + P(X = 9)$$

$$P(X = x) = {}^n C_x p^x q^{n-x}$$

సమాధానాలు తప్ప లేదా ఒప్పు అగుటకు సంభావ్యత

$$p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}, n = 10$$

$$\therefore P(X = 6) = {}^{10} C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-6}$$

$$+ {}^{10} C_7 \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-7} + {}^{10} C_8 \left(\frac{1}{2}\right)^8 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-8}$$

$$= {}^{10} C_6 \left(\frac{1}{2^{10}}\right) + {}^{10} C_7 \left(\frac{1}{2^{10}}\right) + {}^{10} C_8 \left(\frac{1}{2^{10}}\right) + {}^{10} C_9 \left(\frac{1}{2^{10}}\right) + {}^{10} C_{10} \left(\frac{1}{2^{10}}\right)$$

$$= \frac{1}{2^{10}} [{}^{10} C_6 + {}^{10} C_7 + {}^{10} C_8 + {}^{10} C_9 + {}^{10} C_{10}]$$

ii) ప్రశ్నాపత్రంలో 4 ఐచ్ఛిక సమాధానాలుంటే బహుళ ఐచ్ఛిక ప్రశ్నలు ఉండటానికి సంభావ్యత

$$p = \frac{1}{4}, q = \frac{3}{4}$$

$$\therefore P(X \geq 6) = P(X = 6) + P(X = 7)$$

$$+ P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$$

$$P(X = x) = {}^n C_x p^x q^{n-x}$$

$$= {}^{10} C_x \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{10-x}$$

$$\therefore P(X \geq 6) = {}^{10} C_6 \left(\frac{1}{4}\right)^6 \left(\frac{3}{4}\right)^4 + {}^{10} C_7 \left(\frac{1}{4}\right)^7 \left(\frac{3}{4}\right)^3 + {}^{10} C_8 \left(\frac{1}{4}\right)^8 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + {}^{10} C_9 \left(\frac{1}{4}\right)^9 \left(\frac{3}{4}\right) + {}^{10} C_{10} \left(\frac{1}{4}\right)^{10}$$

$$= {}^{10} C_6 \frac{3^4}{4^{10}} + {}^{10} C_7 \frac{3^3}{4^{10}} + {}^{10} C_8 \frac{3^2}{4^{10}} + {}^{10} C_9 \frac{3}{4^{10}} + {}^{10} C_{10} \frac{1}{4^{10}}$$

$$= \frac{1}{4^{10}} [{}^{10}C_6 3^4 + {}^{10}C_7 3^3 + {}^{10}C_8 3^2 + {}^{10}C_9 (3) + {}^{10}C_{10}]$$

పై రెండు సందర్భాలు (i) మరియు (ii) ల నుంచి

$$(i) \text{ ప్రశ్నాపత్రంలో తప్ప ఒప్పులు గల ప్రశ్నలున్నప్పుడు సంభావ్యత} = {}^{10}C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$(ii) \text{ ప్రశ్నాపత్రంలో 4 ఐచ్ఛిక సమాధాలుండే బహుళ ఐచ్ఛిక ప్రశ్నలున్నప్పుడు సంభావ్యత} \\ = {}^{10}C_6 \frac{3^4}{4^{10}}$$

16. ఒక సినిమా టికెట్ కౌంటరు వద్దకు ఒక నిమిషంలో వచ్చి చేరే వ్యక్తుల సంఖ్య, 6 పరామితితో ఒక పాయిజాన్ విభాజనం అవుతుంది.

i) ఒక నిర్దిష్ట నిమిషంలో ఏ ఒక్కరూ క్యూలో వచ్చిచేరని

ii) ఒక నిమిషంలో ఇద్దరు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ మంది క్యూలో వచ్చి చేరే, సంభావ్యతలను కనుక్కోండి.

జ: దత్తాంశము నుంచి $\lambda = 6$ మరియు పాయిజాన్ విభాజనం

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots$$

i) ఒక నిర్దిష్ట నిమిషంలో ఏ ఒక్కరూ క్యూలో వచ్చిచేరని సంభావ్యత

$$P(X = 0) = \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = e^{-6}$$

ii) ఒక నిమిషంలో ఇద్దరు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ మంది క్యూలో వచ్చిచేరే సంభావ్యత

$$P(X \geq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

$$= 1 - \left[e^{-6} + \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!} \right]$$

$$= 1 - e^{-6} - 6e^{-6}$$

17. ఒక కంపెనీ తయారు చేసే విద్యుత్ (ఎలక్ట్రిక్) బల్బులలో 10 శాతం లోపం ఉన్నవని ఇచ్చారు.

20 బల్బులలో 2 కంటే ఎక్కువ బల్బులు లోపం ఉన్నవి కాగల సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

సాధన. $p =$ బల్బు లోపం కలది కావటానికి సంభావ్యత $= \frac{1}{10}$

$$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

$$n = \text{బల్బుల సంఖ్య} = 20$$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$$

$$= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]$$

$$P(X = 0) = {}^{20}C_0 \left(\frac{9}{10}\right)^{20} = \left(\frac{9}{10}\right)^{20}$$

$$P(X = 1) = {}^{20}C_1 \left(\frac{9}{10}\right)^{19} \cdot \left(\frac{1}{10}\right) = \frac{20 \cdot 9^{19}}{10^{20}}$$

$$P(X = 2) = {}^{20}C_2 \left(\frac{9}{10}\right)^{18} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{190 \cdot 9^{18}}{10^{20}}$$

$$P(X > 2) = 1 - \left(\frac{9^{20}}{10^{20}} + \frac{20 \cdot 9^{19}}{10^{20}} + \frac{190 \cdot 9^{18}}{10^{20}}\right)$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^2 {}^{20}C_k \left(\frac{9}{10}\right)^{20-k} \left(\frac{1}{10}\right)^k$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^2 {}^{20}C_k \frac{9^{20-k}}{10^{20}} = \sum_{k=3}^{20} {}^{20}C_k \left(\frac{9^{20-k}}{10^{20}}\right)$$

18. ఒక పాచికలను దొర్లించారు. దాని ముఖం పై కనబడే సంఖ్య X యొక్క అంకమధ్యమం, విస్తృతులను కనుక్కోవండి.

సాధన. సాంపిల్ ఆవరణ S , దీనితో అనుబంధమయ్యే యాదృచ్ఛిక చలరాశిని X అనుకుందాం. $P(X)$ క్రింది పట్టిక ద్వారా ఇవ్వబడింది.

$X = x_i$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$X \text{ మధ్యమం} = \mu = \sum (X = x_i) P(X = x_i)$$

$$= 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)$$

$$= \frac{1}{6} \frac{(6)(6+1)}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$$

$$X \text{ విస్తృతులు} = \sigma^2 = \sum x_i^2 P(X = x_i) - \mu^2$$

$$(i.e.,) \sigma^2 = 1^2\left(\frac{1}{6}\right) + 2^2\left(\frac{1}{6}\right) + 3^2\left(\frac{1}{6}\right) + 4^2\left(\frac{1}{6}\right) + 5^2\left(\frac{1}{6}\right) + 6^2\left(\frac{1}{6}\right) - \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) - \frac{49}{4} \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{(6)(6+1)(2 \times 6+1)}{6} - \frac{49}{4} \\
&= \frac{91}{6} - \frac{49}{4} \\
&= \frac{182 - 147}{12} = \frac{35}{12}
\end{aligned}$$

19. $P(X = k) = \frac{(k+1)}{2^k}, (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$ సంభావ్యతా విభజనంతో X యాదృచ్ఛిక చలరాశి అయితే, c ని కనుక్కోండి.

సాధన. $P(X = k) = \frac{(k+1)}{2^k}, (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$

$$\text{కాబట్టి } \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)c}{2^k}$$

$$\Rightarrow c \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots \infty \right) = 1$$

$$c \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} \right] = 1$$

H int: A.G.P లో

ఇచ్చట $a = 1, d = 1$

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r} + \frac{d \cdot r}{(1-r)^2} \quad r = \frac{1}{2}$$

$$c \left[\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \right] = 1$$

$$c[2 + 2] = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{4}$$

అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. 8 నాణేలను ఏకకాలంలో ఎగరవేశారు. కనీసం 6 బొమ్మలు పడటానికి గల సంభావ్యతను కనుక్కోండి

జ: ఒక నాణేన్ని ఎగరవేసే ప్రయోగంలో బొమ్మ పడే సంభావ్యత = $\frac{1}{2}$, బొరును పడే సంభావ్యత = $\frac{1}{2}$.

8 నాణేలను యాదృచ్ఛికంగా ఎగరవేసినప్పుడు r బొమ్మలు పడే సంభావ్యత

$$P(X = r) = {}^8C_r \left(\frac{1}{2}\right)^r \left(\frac{1}{2}\right)^{8-r}$$

$$= {}^8C_r \left(\frac{1}{2}\right)^8, r = 0, 1, 2, \dots, 8$$

కనీసం 6 బొమ్మల పడే సంభావ్యత

$$P(X \geq 6) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^8 ({}^8C_6 + {}^8C_7 + {}^8C_8) = \frac{37}{256}$$

2. ఒక ద్విపద చలరాశి మధ్యమం, విస్తృతుల మధ్య భేదం $\frac{5}{9}$ అయితే, ప్రయోగాన్ని 5 సార్లు నిర్వహించినప్పుడు 2 సార్లు సఫలం అయ్యే ఘటన సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

సాధన. $n = 5, p$ లు ద్విపద విభాజనానికి పరామితులు

$$\text{మధ్యమం} - \text{విస్తృతి} = \frac{5}{9}$$

$$np - npq = \frac{5}{9}$$

$$np(1-q) = \frac{5}{9}, p + q = 1$$

$$n.p^2 = \frac{5}{9} \Rightarrow 5p^2 = \frac{5}{9}$$

$$p^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow p = \frac{1}{3}$$

$$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(X = 2) = {}^5C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$= 10 \times \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{9} = \frac{80}{243}$$

$$2 \text{ సార్లు సఫలం అయ్యే ఘటన సంభావ్యత} = \frac{80}{243}$$

3. ప్రయాణానికి సంసిద్ధమైన 9 ఓడలలో ఒకటి మునిగిపోయే ప్రమాదం ఉంది. 6 ఓడలు ప్రయాణానికి సంసిద్ధమైతే

(i) కనీసం ఒకటి క్షేమంగా చేరడానికి

(ii) సరిగ్గా 3 క్షేమంగా చేరడానికి గల సంభావ్యతలను కనుగొనండి.

సాధన. $p =$ ఓడ మునిగిపోవటానికి సంభావ్యత

$$= \frac{1}{9}$$

$$= \frac{1}{9} q = 1 - p = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

ఓడల సంఖ్య $= n = 6$

$$P(X = 0) = {}^6C_0 \left(\frac{8}{9}\right)^{6-0} \left(\frac{1}{9}\right)^0 = \left(\frac{1}{9}\right)^6$$

(i) కనీసం ఒకటి క్షేమంగా చేరడానికి సంభావ్యత $= P(X > 0) = 1 - P(X = 0)$

$$= 1 - \left(\frac{1}{9}\right)^6 = 1 - \frac{1}{9^6}$$

$$(ii) P(X = 3) = {}^6C_3 \left(\frac{8}{9}\right)^3 \left(\frac{1}{9}\right)^3$$

$$= \frac{1}{9^6} \cdot {}^6C_3 \cdot 8^3 = 20 \left(\frac{8^3}{9^6}\right)$$

4. సగటున ప్రతి 30 రోజులలో 12 రోజుల వర్షం కురిస్తే, ఒక వారంలో 3 రోజుల వర్షం కురిసే సంభావ్యతను కనుక్కోండి

జ: దత్తాంశం నుంచి, సగటున ప్రతి 30 రోజులలో 12 రోజులు వర్షం కురిసే సంభావ్యత $= \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$

$$\therefore p = \frac{2}{5} \text{ మరియు } q = 1 - p = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

ఇచ్చట $n = 7$

\therefore ఒక వారంలో 3 రోజుల వర్షం కురిసే సంభావ్యత

$$P(X = 3) = {}^7C_3 \left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(\frac{3}{5}\right)^{7-3}$$

$$= {}^7C_3 \left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{35 \times 2^3 \times 3^4}{5^7}$$

5. అంకమధ్యమం 6, విస్తృతి 2 గల ఒక ద్విపద విభాజనంలోని మొదటి రెండు పదాను కనుక్కోండి.

జ: అంకమధ్యమం $(np) = 6$

విస్తృతి $(npq) = 2$

$$\therefore q = \frac{npq}{np} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore p = 1 - q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore np = 6 \Rightarrow \frac{2n}{3} = 6 \Rightarrow n = 9$$

$$P(X = x) = {}^nC_x p^x q^{n-x}$$

$$P(X = 0) = {}^9C_0 \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^{9-0} = \left(\frac{1}{3}\right)^9$$

$$P(X = 1) = {}^9C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^{9-1}$$

$$= 9 \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^8 = \frac{18}{3^9}$$

$$= \frac{3^2 \times 2}{3^2 \times 3^7} = \frac{2}{3^7}$$

6. 450 పేజీలు ఉన్న ఒక పుస్తకంలో 400 ముద్రణ లోపాలు ఉన్నాయి. ఒక పేజీలోని దోషాలసంఖ్యపాయిజాన్ న్యాయాన్ని అనుసరిస్తుందనుకొని, 5 పేజీల యాదృచ్ఛిక శాంపుల్, ముద్రణ దోషాలను ఏమీ కలిగి ఉండని సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

సాధన. ఈ పుస్తకంలోని ఒక పేజీకి గల సగటు దోషాల సంఖ్య

$$\lambda = \frac{400}{450} = \frac{8}{9}$$

ఒక పేజీకి r దోషాలు ఉండే సంభావ్యత

$$= P(X = r) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^r}{r!}$$

$$\text{కాబట్టి } P(X = 0) = \frac{e^{-8/9} \left(\frac{8}{9}\right)^0}{0!} = e^{-8/9}$$

5 పేజీల యాదృచ్ఛిక శాంపుల్లో అసలు దోషాలు ఏవీ లేని ఘటన సంభావ్యత

$$[P(X=0)]^5 = (e^{-8/9})^5$$

7. ఒక పాయిజాన్ చలరాశి $P(X=1) = P(X=2)$ ను తృప్తిపరుస్తుంది. $P(X=5)$ ను కనుక్కోండి.

సాధన. $P(X=1) = P(X=2)$

$$P(X=r) = \frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{r!}, \lambda > 0$$

$$\frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!} = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$$

$$\lambda = 2, (\lambda > 0)$$

$$P(X=5) = \frac{2^5 e^{-2}}{5!}$$

$$= \frac{32}{120e^2} = \frac{4}{15e^2}$$

8. X ఒక పాయిజాన్ విభాజనాన్ని అనుసరిస్తూ $P(X=1) = 3P(X=2)$ అయితే, X యొక్క విస్తృతిని కనుక్కోండి.

సాధన. $\lambda > 0$ పరామితి X పాయిజాన్ చలరాశి

$$P(X=1) = 3P(X=2) \text{ కనుక}$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^1}{(1)!} = 3 \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^2}{2!}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{3\lambda^2}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

$$X \text{ విస్తృతి} = \lambda = \frac{2}{3}$$

9. $P(X=-2) = P(X=-1) = P(X=2) = P(X=1) = \frac{1}{6}$ $P(X=0) = \frac{1}{3}$ ను తృప్తిపరిచేటట్లు X

యాదృచ్ఛిక చలరాశి అనికమధ్యమం, విస్తృతులను కనుక్కోండి.

సాధన. అంకమధ్యమం

$$(\mu) = (-2) \cdot \frac{1}{6} + (-1) \cdot \frac{1}{6} + 2 \left(\frac{1}{6} \right) + (1) \left(\frac{1}{6} \right) + 0 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)$$

$$= -\frac{2}{6} - \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} + 0$$

$$\mu = 0$$

$$\text{విస్తృతి } (\sigma^2) = (-2)^2 \left(\frac{1}{6}\right) + (-1)^2 \left(\frac{1}{6}\right) + 0^2 \left(\frac{1}{3}\right) + 2^2 \left(\frac{1}{6}\right) + 1^2 \left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{4}{6} + \frac{1}{6} + 0 + \frac{4}{6} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

10. ఒక ద్విపద విభజనం అనికమధ్యమం, విస్తృతి వరుసగా 4,3. ఆ విభజనాన్ని సంధానించి, $P(X \geq 1)$ ను కనుక్కోండి.

సాధన. ద్విపద విభజనానికి అనికమధ్యమం

$$= np = 4$$

$$\text{విస్తృతి} = npq = 3$$

$$\frac{npq}{np} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow q = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow p = 1 - q$$

$$= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$np = 4$$

$$n \frac{1}{4} = 4$$

$$\Rightarrow n = 16$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

$$= 1 - {}^{16}C_0 \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^{16-0} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{16}$$

$$P(X \geq 1) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{16}$$