సంభావ్యత

అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. **పరస్పర వివర్జిత, పూర్ణఘటనలకు రెండు ఉదాహరణలను ఇవ్వండి**

జ: *i*) ఒక పాచికను దొర్లించే యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో శాంపిల్ ఆవరణ $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

$E_1 =$ పాచికను దొర్లించినపుడు బేసి అంకె రావటం అనే ఘటన

$\therefore E_1=\{1,3,5\}$

$E_2 =$ పాచికను దొర్లించినపుడు సరి అంకె రావటం అనే ఘటన

$\therefore E_2=\{2,4,6\}$ అయిన

$\Rightarrow E_1 \cup E_2 = S,\ E_1 \cap E_2 = \phi$

$\therefore E_1, E_2$ లు పరస్పర వివర్జిత, పూర్ణ ఘటనలు

ii) రెండు నాణేలను ఒకేసారి దొర్లంచే యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో శాంపిల్ ఆవరణ

$S=\{HH, HT, TH, TT\}$

ఇచ్చుట $H =$ బొమ్మను, $T =$ అచ్చును సూచిస్తుంది

$E_1 =$ రెండు నాణేలను ఒకేసారి దొర్లించినపుడు కనీసం అచ్చులు కావటం అనే ఘటన

$\therefore E_1=\{HH, HT, TH\}$

$E_2 =$ రెండు నాణేలను ఒకేసారి దొర్లించినపుడు రెండు అచ్చులు కావటం అనే ఘటన

$\therefore E_2 == \{TT\}$

ఇచ్చుట $E_1 \cup E_2 = S,\ E_2 \cap E_2 = \phi$

$\therefore E_1, E_2$ పరస్పర వివర్జిత, పూర్ణ ఘటనలు

2. **పరస్పర వివర్జిత ఘటనగానీ, పూర్ణఘటనగానీ కానట్టి ఘటనలకు రెండు ఉదాహరణలను ఇవ్వండి**

జ: *i*) ఒక పాచికను దొర్లించే యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో శాంపిల్ ఆవరణ $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

$E_1 =$ సరి ప్రధాన అంకె రావటం అనే ఘటన

$\therefore E_1=\{2\}$

$E_2 =$ సరి అంకె రావటం అనే ఘటన

$\therefore E_2=\{2,4,6\}$

ఇచ్చుట

$E_1 \cap E_2 = \{2\},\ E_1 \cup E_2 = \{2,4,6\}$

కాబట్టి E_1, E_2 లు రెండు పరస్పర వివర్జితం గానీ, పూర్ణ ఘటనలు గానీ కానటువంటి ఘటనలు

ii) రెండు నాణేలను ఒకేసారి ఎగురవేసినప్పుడు, శాంపిల్ ఆవరణ $S=\{HH,HT,TH,TT\}$

ఇచ్చట $H=$ బొమ్మను, $T=$ అచ్చును సూచిస్తుంది.

$E_1=$ ఒక బొమ్మ రావటం అనే ఘటన

$\therefore E_1=\{HT,TH\}$

$E_2=$ కనీసం ఒక బొమ్మ రావటం అనే ఘటన

$\therefore E_2=\{HH,HT,TH\}$

ఇచ్చట $E_1\cap E_2=\{HT,TH\}$

$E_1\cup E_2=\{HH,HT,TH\}$

$\therefore E_1,E_2$ లు రెండు పరస్పర వివర్జితం గానీ, పూర్ణ ఘటనలు గానీ కానటువంటి ఘటనలు

3. సమ సంభవంగానీ, పూర్ణ ఘటనగానీ కానట్టి ఘటనలకు రెండు ఉదాహరణలను ఇవ్వండి

జ: *i*) రెండు నాణేలను ఎగురవేసే యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో శాంపిల్ ఆవరణ $S=\{HH,HT,TH,TT\}$

$E_1=$ ఒక అచ్చు రావటం అనే ఘటన

$\therefore E_1=\{HT,TH\}$

$E_2=$ కనీసం ఒక అచ్చు రావటం అనే ఘటన

$\therefore E_2=\{HT,TH,TT\}$

$P(E_1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ మరియు $P(E_2)=\frac{3}{4}$

$\therefore E_1,E_2$ లు సమసంభవాలు కాని ఘటనలు

$[\because P(E_1)\neq P(E_2)]$

$E_1\cup E_2=\{HT,TH,TT\}$

$\therefore E_1,E_2$ పూర్ణ ఘటనలు కావు

ii) పాచికను దొర్లించే యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో శాంపిల్ ఆవరణ $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

$E_1=$ బేసి ప్రధాన సంఖ్య రావటం అనే ఘటన

$\therefore E_1=\{3,5\}$

$E_2=$ బేసి సంఖ్య రావటం అనే ఘటన

$\therefore E_2=\{1,3,5\}$

$P(E_1)=\frac{2}{6}, P(E_2)=\frac{3}{6}$

$\therefore E_1,E_2$ లు సమసంభవాలు కాని ఘటనలు

$[\because P(E_1)\neq P(E_2)]$

$E_1\cup E_2=\{1,3,5\}$

$\therefore E_1,E_2$ లు పూర్ణ ఘటనలు కావు

4. నాలుగు నిష్పాక్షిక నాణేలను ఒకేసారి ఎగురవేసినప్పుడు 2 బొమ్మలు, 2 బొరుసులు పడే సంభావ్యతను కనుక్కోండి

జ: నాలుగు నిష్పాక్షిక నాణేలను ఒకేసారి ఎగురవేసినప్పుడు $n(S) = 2^4 = 16$

$E =$ రెండు బొమ్మలు, రెండు బొరుసులు రావటం అనే ఘటన

$$\therefore n(E) = {}^4C_2 = \frac{4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1} = 6$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

5. ఒక పేక ముక్కల కట్ట నుంచి యాదృచ్ఛికంగా ఒక పేక ముక్కను తీసే ప్రయోగంలో ఇస్పేటు ముక్కను తీసే ఘటనను A తోను, బొమ్మను కలిగిన కార్డును (రాజు, రాణి లేదా జాకీ) తీసే ఘటనను B తోను సూచిద్దాం. అప్పుడు $A, B, (A\cap B), (A\cup B)$ ల సంభావ్యతను కనుక్కోండి

జ: చీట్ల పేక కట్ట నుంచి యాదృచ్ఛికంగా ఒక పేకముక్కను తీయగా, $n(S) = 52$

$i)$ A అనేది తీసిన పేకముక్క ఇస్పేటు కావటం అనే ఘటన

$$\Rightarrow n(A) = 13$$

$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$ii)$ B అనేది బొమ్మను కలిగిన కార్డు తీసే ఘటన

$$\Rightarrow n(B) = 12$$

$$\therefore P(A) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

$iii)$ $A\cap B$ అనేది తీసిన కార్డు బొమ్మను కలిగిన ఇస్పేటు కార్డు కావటం అనే ఘటన

$$\Rightarrow n(A\cap B) = 3$$

$$\therefore P(A\cap B) = \frac{n(A\cap B)}{n(S)} = \frac{3}{52}$$

సంకలన సిద్ధాంతము నుంచి

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

$$= \frac{13}{52} + \frac{12}{52} - \frac{3}{52} = \frac{22}{52} = \frac{11}{26}$$

6. A, B, C **లు ఒక పట్టణం నుంచి వెలువడే వార్తా పత్రికలు. ఆ పట్టణ జనాభలో 20%** A **ని, 16%** B **ని, 14%** C **ని, 8%** A, B **రెండింటిని, 5%** A, C **రెండింటిని, 4%** B, C**, రెండింటిని, 2% మూడింటినీ చదువుతారు. కనీసం ఒక వార్తాపత్రికను చదివే జనాభా శాతాన్ని కనుక్కోండి**

జ: $P(A) = \frac{20}{100},\ P(B) = \frac{16}{100},\ P(C) = \frac{14}{100}$

$P(A \cap B) = \frac{8}{100},\ P(A \cap C) = \frac{5}{100},$

$P(B \cap C) = \frac{4}{100},\ P(A \cap B \cap C) = \frac{2}{100}$

$\therefore$ కనీసం ఒక వార్తాపత్రిక చదివే జనాభా శాతం

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

$-P(A \cap B) - P(B \cap C)$

$-P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$

$= \frac{20}{100} + \frac{16}{100} + \frac{14}{100} - \frac{8}{100} - \frac{4}{100} - \frac{5}{100} + \frac{2}{100}$

$= \frac{35}{100} = 35\%$

$\therefore$ 35% మంది కనీసం ఒక వార్తాపత్రిక చదువుతారు.

7. ఒక నాణాన్ని మూడుసార్లు ఎగరవేయడం, వచ్చిన ఫలితాన్ని రాయడం ఒక క్రీడ. అన్ని ఎగరవేతలలోనూ ఒకే ఫలితం వస్తే ఒక బాలుడు గెలిచినట్లు, అట్లాకాకపోతే ఓడినట్లు భావిస్తారు. ఆ బాలుడు క్రీడలో ఓడిపోయే సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

జ: ఒక నాణేన్ని 3 సార్లు ఎగురవేస్తే $n(S) = 2^3 = 8$

$\therefore n(E) = 2$

అన్ని ఎగరవేలలోనూ ఒకే ఫలితం వస్తే, అంటే అన్నీ బొమ్మలు లేదా అన్నీ అచ్చులు వస్తే బాలుడు గెలిచినట్లుగా భావిస్తారు. కనుక బాలుడు గెలిచే ఘటన E అయితే

$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{8}$

$\therefore$ ఆ బాలుడు క్రీడలో ఓడిపోయే సంభావ్యత

$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

$= 1 - \frac{2}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

8. $E_1 \cap E_2 = \phi$ **తో** E_1, E_2 **లు రెండు ఘటనలు. అప్పుడు** $P\left(E_1^c \cap E_2^c\right) = P\left(E_1^c\right) - P\left(E_2^c\right)$ **అని చూపండి.**

జ: $P\left(E_1^c \cap E_2^c\right) = P\left[\left(E_1 \cup E_2\right)^c\right]$

$= 1 - \left[P\left(E_1 \cup E_2\right)\right]$

$= 1 - \left[P\left(E_1\right) + P\left(E_2\right)\right]$

$\left[\because P\left(E_1 \cap E_2\right) = P(\phi) = 0\right]$

($\because$ సంకలన సిద్ధాంతం నుంచి)

$= 1 - P(E_1) - P(E_2)$

$= P\left(E_1^c\right) - P\left(E_2\right)$

9. రెండు పాచికలను దొర్లించారు. ఏ పాచిక 2 ను చూపని సందర్భానికి సంభావ్యత ఎంత?

సాధన. రెండు పాచికలను దొర్లించారు. కనుక $n(S) = 6^2 = 36$

E అనేది ఏ పాచిక 2 చూపని ఘటన

$n(E) = 5 \times 5 = 25$

$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{25}{36}$

10. 60 బాలురు, 20 బాలికలు గల తరగతిలో సగం మంది బాలురు, సగం మంది బాలికలు క్రికెట్‌పై అవగాహన కలిగినవారు. ఈ తరగతి నుంచి ఒక విద్యార్థిని ఎంపిక చేసినప్పుడు, బాలుడు లేదా క్రికెట్ తెలిసిన వ్యక్తి అయ్యేఘటనకు సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

సాధన. ఎంపిక చేసినవాడు బాలుడు అయ్యే ఘటన A, ఎంపిక చేసినవారు క్రికెట్ తెలిసిన వ్యక్తి అయ్యే ఘటన B అనుకుందాం.

$n(S) = {}^{(60+60)}C_1 = 80$

$n(A) = 60, n(B) = (30+10) = 40$

$(A \cap B)$ సగం మంది క్రికెట్ తెలిసిన బాలుడు కావటం అనే ఘటన అవుతుంది.

$(A \cap B) = 30$ (సగం మంది బాలురకు క్రికెట్‌పై అవగాహన ఉంది)

$P(A) = \frac{60}{80}, P(B) = \frac{40}{80}, P(A \cap B) = \frac{30}{80}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{60}{80} + \frac{40}{80} - \frac{30}{80} = \frac{70}{80}$

$$=\frac{7}{8}$$

11. **రెండు ఘటనలు A,B లకు $P(A^C \cap B^C)=1+P(A\cap B)-P(A)-P(B)$ అని చూపండి.**

సాధన. $A^C \cap B^C=(A\cup B)^C$ కనుక

$$P(A^C \cap B^C)=P\left[\left(A\cup B\right)^C\right]$$

$$=1-P\left(A\cup B\right)$$

$$=1-\left[P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)\right]$$

$$=1+P\left(A\cap B\right)-P(A)-P(B)$$

$$P(A^C \cap B^C)=1+P(A\cap B)-P(A)-P(B)$$

12. **ఒక నిష్పాక్షిక నాణేన్ని 200 సార్లు ఎగరవేశారు. బేసి సంఖ్యలో (అన్నిసార్లు) బొమ్మపడే సంభావ్యత కనుక్కోండి.**

సాధన. మొత్తం ఫలితాల సంఖ్య 2^{200}

బేసి సంఖ్యలో బొమ్మపడే ఘటలనను E అనుకొందాం

E కి అనుకూల ఫలితాల సంఖ్య

$$={}^{200}C_1+{}^{200}C_3+{}^{200}C_5+....+{}^{200}C_{199}$$

$$=2^{200}\div 2=2^{199}$$

కాబట్టి కావసిన సంభావ్యత $P\left(E\right)=\frac{2^{191}}{2^{200}}=\frac{1}{2}.$

13. **యాదృచ్ఛికంగా ఒకగుండ్రని బల్లచుట్టూ కూర్చున్న 20 మంది వ్యక్తులలో A,B లు ఉన్నారు. A,B ల మధ్య ఎవరైనా ఆరుగురు వ్యక్తులుండే సంభావ్యత కనుక్కోండి.**

సాధన. గుండ్రటి బల్లచూట్టూ ఏ లిసనం పైనైనా 'A' కూర్చోవచ్చు. అప్పుడు B కి అందుబాటులో ఉన్న ఆసనాల సంఖ్య 19. కాని A,B ల మధ్య ఆరుగురు వ్యక్తులు ఉండాలంటే B కి గల అవకాశాలు రెండే. కాబట్టి కావలసిన సంభావ్యత $\frac{2}{19}$

14. రెండు పాచికలతో మొత్తం స్కోరు 7 దొర్లించే సంభావ్యత ఎంత?

సాధన. ఇచ్చిన ప్రయోగం శాంపులే ఆవరణం

$$S=\{(1,1),(1,2),.....,(1,6),$$

$$(2,1),(2,2),.....(2,6),$$

$$(6,1,(6,2),......,(6,6)\}$$

ఏదైనా ఒక మూలకంలోని మొదటి నిరూపకం మొదటి పాచికపై స్కోరును, రెండు నిరూపకం రెండో పాచికపై స్కోరును సూచిస్తాయి. S లో మొత్తం 36 మూలకాలున్నాయి. S లోని మూలకాలన్నీ సమసంభవాలు.

మొత్తం స్కోరు 7 పొందే ఘటనను E అనుకోండి. అప్పుడు

$$E=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$

లో మొత్తం 6 మూలకాలున్నాయి

$$P(E)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

15.**9. బాగా కలిపిన 52 పేకముక్కలకట్ట నుంచిఒక ముక్కను తీస్తే అది ఆసు గాని, ఇస్పేటు గాని అయ్యే సంభావ్యత ఎంత?**

గమనిక. పేక ముక్కలకట్ట అంటే 52 కార్డులు ఉన్న పేక ముక్కల కట్ట అని అర్థం. అందులో 26 ఎర్రనివి, 26 నల్లనివి. ఈ 52 కార్డులను నాలుగు సెట్లుగా విభజిస్తూ వీటిని ఆఠీను, కళావరు, డైమండ్, స్పేడ్ (ఇస్పేటు) అనే పేర్లతో పిలుస్తారు. ప్రతి సెట్‌లోనూ 13 కార్డులుంటాయి. అవి

$A,2,3,4,5,6,7,8,9,10,K,Q,J$

($A=$ ఆసు, $K=$ రాజు $,Q=$ రాణీ, $J=$ జాకీ)

సాధన. తీసిన ముక్క ఇస్పేటు అయ్యేఘటన E_1, ఆసు అయ్యేఘటన E_2, అనుకోండి. E_1,E_2 లు పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు కావని గమనించండి. $P(E_1\cup E_2)$ ని కనుక్కోవాలి.

ఇక్కడ $n(E_1)=13,n(E_2)=4,n(E_1\cap E_2)=1$

$$\therefore P(E_1\cup E_2)=P(E_1)+P(E_2)-P(E_1\cap E_2)$$

$$=\frac{13}{52}+\frac{4}{52}-\frac{1}{52}=\frac{16}{52}=\frac{4}{13}.$$

16. A, B లు ఐఐటి లో ప్రవేశం కోరుకుంటున్నారు. A ఎంపిక కాగల సంభావ్యత 0.5, ఇద్దరూ ఎంపిక కాగల సంభావ్యత 0.3 అయితే, B ఎంపిక కాగల సంభావ్యత 0.9 అయ్యే అవకాశం ఉందా?

జ: దత్తాంశం నుంచి $P(A) = 0.5;\ P(A \cap B) = 0.3$

మరియు $P(A \cup B) \le 1$

$\Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \le 1$

$\Rightarrow 0.5 + P(B) - 0.3 \le 1$

$\Rightarrow P(B) \le 1 - 0.2 = 0.8$

$\therefore P(B) = 0.9$ కావటం అసాధ్యం

17. 25 మంది సభ్యులు గల ఒక కమిటీలో ప్రతి సభ్యుడు గణితంలో గాని, సాంఖ్యక శాస్త్రంలోగాని లేదా రెండింటిలో గాని ప్రవీణులై ఉంటారు. వీరిలో 19 మంది గణితంలోను, 16 మంది సాంఖ్యక శాస్త్రంలోను ప్రవీణులైతే, కమిటీ నుంచి ఎంపిక చేసిన ఒక సభ్యుడు రెండింటిలోను ప్రవీణుడై ఉండే సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

జ: ఎన్నుకున్న వ్యక్తి గణితంలో ప్రవీణుడయ్యే ఘటన $= M$ సాంఖ్యకశాస్త్ర ప్రవీణుడయ్యే ఘటన $= S$ అనుకొనుము.

$n(S) = 25;\ n(A) = 19;\ n(B) = 16$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{19}{25} + \frac{16}{25} - 1 = \frac{35 - 25}{25} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$

$\therefore$ ఎన్నుకొన్న వ్యక్తి రెండు శాస్త్రాల్లోనూ ప్రవీణుడయ్యే ఘటన సంభావ్యత $= \frac{2}{5}$

18 **రెండు నిష్పాక్షిక పాచికలను దొర్లించారు. ఆ పాచికల ముఖాలపై గల సంఖ్యల మొత్తం 10 అయ్యే సంభావ్యత ఎంత?**

సాధన. రెండు పాచికలను దొర్లిస్తే

$n(S) = (6)^2 = 36$

పాచికల ముఖాలపై గల సంఖ్యమొత్తం 10 అయ్యేఘటన E అనుకుంటే

$E = \{(4,6), (5,5), (6,4)\}$

$n(E) = 3$

$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. $\{1,2,3,....100\}$ **నుంచి ఒక సంఖ్య xను యాదృచ్ఛికంగా తీయడంజరిగింది $\left(x+\dfrac{100}{x}\right)>29$ అయ్యే సంభావ్యత ఎంత?**

సాధన. ఇక్కట మొత్తం ఫలితాలసంఖ్య 100

$\{1,2,3,....100\}$ లో నుంచి ఎన్నుకొన్న సంఖ్య x అనేది

$x+\dfrac{100}{x}>29$ ని ధ్రువపరిచే ఘటనను A అనుకొందాం.

అప్పుడు $x+\dfrac{100}{x}>29$

$\Leftrightarrow x^2-29x+100>0$

$\Leftrightarrow (x-4)(x-25)>0$

$\Leftrightarrow x>25 \quad x<4$

$\Leftrightarrow x\in\{1,2,3,26,27,....100\}=A$

(అనుకొందా)

కాబట్టి A అనుకూల ఫలితాలసంఖ్య 78

కాబట్టి కావసిన సంభావ్యత

$=P(A)=\dfrac{78}{100}=0.78$

2. **ఒక చదరంగం బల్లపై రెండు చతురస్రాలను యాదృచ్ఛికంగా ఎన్నుకొన్నారు. వాటికి ఉమ్మడి ఉండటానికి గల సంభావ్యత $\dfrac{1}{18}$ అని చూపండి.**

సాధన. మొదటి చతురస్రాన్ని 64 విధాలుగా, రెండోదాన్ని 63 విధాలుగా ఎన్నుకోవచ్చు. కాబట్టి రెండు చతురస్రాలను ఎన్నుకొనే విధాలు 64×63

ఈ చతురస్రాలు ఒక ఉమ్మడి భుజాన్ని కలిగిఉండే ఘటన E అనుకొందాం.

ఇప్పుడు E అనుకూల ఫలితాల సంఖ్యను కనుక్కోందా.

మొదటగా ఎన్నుకొన్న చతురస్రం మూలనున్న నాలుగు చతురస్రాల్లో ఒకటి అయితే రెండురెండో చతురస్రాన్ని (ఉమ్మడి భుజం ఉండేటట్లు) రెండు రకాలుగా ఎన్నుకోవచ్చు.

మొదటిగా ఎన్నుకొన్న చతురస్రం చదరంగం బల్ల భుజం వెంబడి గల (మూలల వద్ద ఉన్న వాటిని మినహాయిస్తే) 24 చదరాల్లో ఒకటి అయితే, రెండో చతురస్రాన్ని 3 విధాలుగా ఎన్నుకోవచ్చు.

మొదటిగా ఎన్నుకొన్న చతురస్రం మిగిలిన 36 చతురస్రాల్లో ఒకటి అయితే రెండోదాన్ని 4 విదాలుగా ఎన్నుకోవచ్చు.

కాబట్టి అనుకూల ఫలితాల సంఖ్య

$(4\times 2)+(24\times 3)+(36\times 4)=224$

కాబట్టి కావలసిన సంభావ్యత $=\dfrac{224}{64\times 63}=\dfrac{1}{18}$.

3. ఒక సంచిలో 12 రెండు రూపాయినాణేలు, 7 రూపాయినాణేలు, 4 అర్ధరూపాయి నాణేలు ఉన్నాయి. ఆ సంచి నుంచి యాదృచ్ఛికంగా మూడు నాణేలను ఎంపిక చేస్తే, *i*) మూడు నాణేల మొత్తం గరిష్ఠం కావడానికి,

***ii*) మూడు నాణేల మొత్తం కనిష్ఠం కావడానికి,**

***iii*) మూడు నాణేలు వేర్వేరు విలువలను కలిగి ఉండడానికి గల సంభావ్యతలను కనుక్కోండి**

జ: సంచిలోని నాణేల సంఖ్య = 12 + 7 + 4 = 23

యాదృచ్ఛికంగా 3 నాణేలను ఎన్నుకునే విధాల సంఖ్య $n(S)={}^{23}C_3$

$i)\ E_1=$ ఎన్నుకున్న 3 నాణేల మొత్తం గరిష్ఠం కావటం అనే ఘటన అంటే 3 రెండు రూపాయి నాణేలు కావాలి

$$\therefore n(E_1)={}^{12}C_3,\ P(E_1)=\frac{n(E_1)}{n(S)}=\frac{{}^{12}C_3}{{}^{23}C_3}$$

$ii)\ E_2=$ఎన్నుకున్న 3 నాణేల మొత్తం కనిష్ఠం కావటం అనే ఘటన అంటే 3 నాణేలు అర్ధ రూపాయి నాణనేలు కావాలి

$$\therefore n(E_2)={}^{4}C_3, P(E_2)=\frac{n(E_2)}{n(S)}=\frac{{}^{4}C_3}{{}^{23}C_3}$$

$iii)\ E_3=$ ఒక్కొక్కటి ఒక్కో రకం నాణేం కావటం అనే ఘటన

$n(E_3)={}^{12}C_1\times{}^{7}C_1\times{}^{4}C_1=12\times 7\times 4$

$$P(E_3)=\frac{n(E_3)}{n(S)}=\frac{12\times 7\times 4}{{}^{23}C_3}$$

4. మూడు ఘటనలు A, B, C ల సంభావ్యతలు కింది విధంగా ఉన్నాయి. $P(A)=0.3$, $P(B)=0.4$, $P(C)=0.8$, $P(A\cap B)=0.08$,

$P(A\cap C)=0.28$, $P(A\cap B\cap C)=0.09$, $P(A\cup B\cup C)\geq 0.75$. $P(B\cap C)$

$P(A\cup B\cup C)\geq 0.75$

$\therefore 0.75\leq P(A\cup B\cup C)\leq 1$

$\Rightarrow 0.75\leq P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)$

$-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)\leq 1$

$\Rightarrow 0.75\leq 0.3+0.4+0.8-0.08-P(B\cap C)$

$-0.28+0.09\leq 1$

$\Rightarrow 0.75\leq 1.23P(B\cap C)\leq 1$

$\Rightarrow -1.23+0.75\leq -P(B\cap C)\leq 1-1.23$

$\Rightarrow -0.48\leq -P(B\cap C)\leq -0.23$

$\Rightarrow 0.23\leq P(B\cap C)\leq 0.48$

$\Rightarrow P(B\cap C)\in[0.23, 0.48]$

5. లీపు సంవత్సరం కాని సందర్భంలో (i) 53 **ఆదివారాలు** (ii) 52 **ఆదివారాలు మాత్రమే వచ్చే సంభావ్యతను కనుక్కోండి.**

సాధన. లీపు సంత్సరం కాని (*i.e.,*) సాధారణ సంవత్సరంలో 365 రోజులుంటాయి. అంటే 52 వారాలు పోగా, ఒకరోజు మిగులుతుంది. ఆ ఒక్కరోజు ఆది లేక సోమ లేక మంగళలేక బుధ లేక గురు లేక శుక్ర శనివారం కావచ్చు.

కనుక శాంపిల్ ఆవరణ

$S=\{$ఆది, సోమ, మంగళ, బుధ, గురు, శుక్ర, శని$\}$

$n(S)=7$

(i) E అనేది సాధారణ సంవత్సరంలో 53 ఆదివారాలు ఉండే ఘటన

$n(E)=1$

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{1}{7}$$

(ii) ఇక 52 ఆదివారాలు మాత్రమే ఉండే ఘటన సంభావ్యత $P(E^C)=1-P(E)$

$$=1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$$

6. ముందుగా 3ను దొర్లించిన వాళ్ళు ఆట గెలిచినట్లు అనే షరతుపై A, B అనే ఇద్దరు వ్యక్తులు రెండు పాచికలను దొర్లించారు. ఆటను ముందుగా A మొదలుపెడితే, A, Bలు వరుసగా ఆట గెలిచే సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

సాధన. పాచికను దొర్లించినపుడు 3 చుక్కలున్న ముఖం తిరగబడుటకు సంభావ్యత $p = \frac{1}{6}$

$(i.e.,)$ సంఫల సంభావ్యత $p = \frac{1}{6}$

విఫల సంభావ్యత $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

A గెలిచే ఘటన జరగాలంటే

1. మొదటి యత్నంలోనే A గెలవాలి (ఈ ఘటన సంభావ్యత p) లేదా

2. మొదటి రెండు యత్నాలలో A, B లు ఓడిపోయి, తరువాత యత్నంలో A గెలవాలి.

ఈ ఘటన సంభావ్యత $= q.q.p = q^2 p$ లేదా

3. మొదటి నాలుగు యత్నాలలో A, B లు ఓడిపోయి ఆ తరువాత యత్నంలో A గెలవాలి.

ఈ ఘటన సంభావ్యత $= q.q.q.q.p = q^4 p......$

ఈ విధంగా A పాచికలపై 3 చుక్కలు వచ్చేవరకు ఆట కొనసాగుతుంది.

పై ఘటనలన్నీ పరస్పర వివర్జితాలు.

సంకలన సిద్ధాంతం నుంచి A గెలుపు సంభావ్యత

$$P(A) = p + q^2 p + q^4 p + ...$$

$$= p\left[1 + q^2 + q^4 + ...\right]$$

$$= p\left(\frac{1}{1 - q^2}\right) = \frac{p}{1 - q^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{6}\right)}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{1}{6} \times \frac{36}{11} = \frac{6}{11}$$

B గెలుపు సంభావ్యత

$$= 1 - P(A) = 1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11}$$

7. **1 నుంచి 30 వరకు సంఖ్యలను వేసిన 30 టిక్కెట్ల నుంచి యాదృచ్ఛికంగా ఒక టిక్కెట్‌ను ఎంపికచేస్తే, ఆ టిక్కెట్‌పై గల సంఖ్య**

(i) ***5 లేదా 7 గుణిజం***

(ii) ***3 లేదా 5 గుణిజం***

కా గల సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

సాధన. 1 నుండి 30 వరకు అంకెలున్న 30 టిక్కెట్ల నుండి యాదృచిఛకంగా ఒక టిక్కెట్ ఎన్నుకునే విధాల సంఖ్య

$n(S) = {}^{30}C_1 = 30$

(i) E_1 అనేది ఆ అంకె 5 యొక్క గుణిజం కావటం అనే ఘటన

$E_1 = \{5,10,15,20,25,30\}$

$n(E_1) = 6$

$$p(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

E_2 అనేది ఆ అంకె 7 యొక్క గుణిజం కావటం అనే ఘటన

$E_2 = \{7,14,21,28\}$

$n(E_2) = 4$

$$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{4}{30}$$

$E_1 \cap E_2 = \phi$

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

$$= \frac{6}{30} + \frac{4}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

(ii) E_1 అనేది అంకె 3 యొక్క గుణిజం కావటం అనే ఘటన

$E_1 = \{3,6,9,12,15,18,21,24,27,30\}$

$n(E_1) = 10$

$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{10}{30}$$

E_2 అనేది అంకె 5 యొక్క గుణిజం కావటం అనే ఘటన

$E_2 = \{5,10,14,20,25,30\}$

$n(E_2) = 6$

$$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{6}{30}$$

$$E_1 \cap E_2 = \{15, 30\}$$

$$n(E_1 \cap E_2) = 2 \Rightarrow P(E_1 \cap E_2) = \frac{2}{30}$$

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

$$= \frac{10}{30} + \frac{6}{30} - \frac{2}{30}$$

$$= \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$$

8. 20 వరస సహజ సంఖ్యల నుంచి రెండు సంఖ్యలను యాదృచ్ఛికంగా ఎంపిక చేస్తే, ఆ రెండు సంఖ్యల మొత్తం

(i) ఒక సరిసంఖ్యకావడానికి

(ii) ఒక బేసి సంఖ్యకావడానికి సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

సాధన. 20 వరస సంఖ్యల నుంచి 2 సంఖ్యలను ఎంపిక చేసే విధానాలు

$$n(S) = {}^{20}C_2 = \frac{20 \times 19}{1 \times 2} = 190$$

వీటిలో 10 బేసిసంఖ్యలు, 10 సరిసంఖ్యలు

(i) E అనేది ఎంపిక చేసిన రెండు సంఖ్యల మొత్తం సరి సంఖ్యకావాలి అనే ఘటన రెండు బేసి సంఖ్యల మొత్తం సరి సంఖ్య అవుతుంది, లేదా రెండు సరి సంఖ్య మొత్తంసరి సంఖ్యఅవుతుంది.

కనుక $n(E) = {}^{10}C_2 + {}^{10}C_2 = \frac{2(10)(9)}{1 \times 2} = 90$

(ii) ఎంపిక చేసిన రెండు సంఖ్యల మొత్తం బేసి సంఖ్య కావడానికి సంభావ్యత

$$P(E^C) = 1 - P(E) = 1 - \frac{9}{19} = \frac{10}{19}$$

9. ఒక జత పాచికలను 24 సార్లు దొర్లించారు. ఈ 24 పర్యాయాలలో ఎప్పుడూ ఒక జత 6 ను దొర్లించని వ్యక్తి గెలిచినట్లుగా భావిస్తారు. ఆ వ్యక్తి గేలిచే సంభావ్యత ఎంత?

సాధన. పాచికను 2 సార్లు దొర్లిస్తే పూర్ణ లఘు ఘటనల సంఖ్య

$$= 6 \times 6 = 36$$

రెండు పాచికలను 24 సార్లు దొర్లించారు కనుక

$$n(S) = (36)^{24}$$

E అనేది దొర్లించిన 24 సార్లలో ఏ ఒక్కసారీ రెండింటిపై 6 రాకపోవటం అనే ఘటన

$$n(E) = 35 \times 35 \times .... \times 35(24 \quad = (35)^{24}$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{(35)^{24}}{(36)^{24}}$$

10. ఒక పెట్టెలోని 15 బల్బులలో 5 పనిచేయనివి. పెట్టెలో నుంచి యాదృచ్ఛికంగా 5 బల్బులను తీసినప్పుడు, క్రింది ఘటనల సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

(i) **వాటిలో ఏదీ లోపం లేనిది కావటం అనేది**

(ii) **వాటిలో ఏదోఒకటి పనిచేయనిది**

(iii) **వాటిలో కనీసం ఒకటి పనిచేయనిది.**

సాధన. పెట్టెలో ఉన్న 15 బల్బులలో 5 లోపం గలిగి ఉన్నవి. మిగిలిన 10 మంచివి. పెట్టె నుండి యాదృచ్ఛికంగా 5 బల్బులను ఎన్నుకునే విధాలు

$$n(S) = {}^{15}C_5$$

(i) E_1 అనేది 5 బల్బులు ఏదీ లోపం లేనిది అనే ఘటన

$$n(E_1) = {}^{10}C_5$$

$$P(E_1) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{{}^{10}C_5}{{}^{15}C_5}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11} = \frac{12}{143}$$

(ii) E_2 అనే 5 బల్బులలో ఒకే ఒకటి లోపం గలది ఉండే ఘటన $n(E_2) = {}^5C_1 \times {}^{10}C_4$

$$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{5 \times {}^{10}C_4}{{}^{15}C_2}$$

$$= \frac{5 \times \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4}}{\frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}} = \frac{50}{143}$$

(iii) కనీసం ఒకటి పనిచేయనిది అయ్యేఘటన $= 1 - P(E_1) = 1 - \frac{12}{143} = \frac{131}{143}$

11. **ఒక కాంట్రాక్టరు రోడ్డు కాంట్రాక్టును పొందే సంభావ్యత $\frac{2}{3}$, భవనం కాంట్రాక్టును పొందే సంభావ్యత $\frac{5}{9}$, కనీసం ఒకకాంట్రాక్టునైనా పొందే సంభావ్యత $\frac{4}{5}$. అతడు రెండు కాంట్రాక్టులనూ పొందే సంభావ్యతను కనుక్కోండి.**

సాధన. కాంట్రాక్టరు రోడ్డు కాంట్రాక్టు పొందటానికి సంభావ్యత $P(A) = \frac{2}{3}$

భవనం కాంట్రాక్టు పొందడానికిసంభావ్యత $P(B) = \frac{5}{9}$

కనీసం ఒకటి పొందటానికి సంభావ్యత $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$

రెండు కాట్రాక్టులనూ పొందటానికి సంభావ్యత

$\left[P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)\right]$

$(i.e.,)$ $P\left(A \cap B\right) = P\left(A\right) + P(B) - P(A \cup B)$

$= \frac{2}{3} + \frac{5}{9} - \frac{4}{5}$

$= \frac{30 + 25 - 36}{45} = \frac{19}{45}$

12.. **ఒక పరుగు పందెంలో A, B, C మూడు గుర్రాలు. A పందెం గెలిచే సంభావ్యత B సంభావ్యతకు రెట్టింపు, B పెందెం గెలిచే సంభావ్యత C గెలుపుకి రెట్టింపు అయితే, A, B, C లు ఆ పెందెం గెలవగల సంభావ్యతలేవి?**

సాధన. ఇచ్చట A, B, C లు పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు

$P(A) + P(B) + P(C) = 1$................(1)

$P(A) = 2P(B), P(B) = 2P(C)$.........(2)

(1), (2) ల నుంచి

$2P(B) + P(B) + P(C) = 1$

$\Rightarrow 3P(B) + P(C) = 1$

$$\Rightarrow 3(2)P(C)+P(C)=1$$

$$\Rightarrow 7P(C)=1 \Rightarrow P(C)=\frac{1}{7}$$

$$P(C)=\frac{1}{7}, P(B)=2\left(\frac{1}{7}\right)=\frac{2}{7}$$

$$P(A)=2\left(\frac{2}{7}\right)=\frac{4}{7}$$

13. ఒకగుట్టలో గల 50 స్క్రూలలో 5 చెడిపోయినవి. ఈ గుట్టలో నుంచి మూడు స్క్రూలను యాదృచ్ఛికంగా తీశారు. (a) తీసిన స్క్రూలను తిరిగి భర్తీ చేసే విధంగా (b) తీసిన స్క్రూలను తిరిగి భర్తీ చేయని విధంగా వీటిని ఎంపిక చేశారనుకుంటే, మూడు స్క్రూలు పనిచేసేవి అయ్యే సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

సాధన. స్క్రూలు సంఖ్య $=50,$

అందు చెడిపోయినవి $=5$

మంచివి $=45$

E అనేది 3 స్క్రూలు చెడిపోయినవి అయ్యే ఘటన

$a)$ ఒక స్క్రూను ఎన్నుకొన్న వెంటేనే తిరిగి అందులోకే చేర్చడం

$$P(E)=\frac{^{45}C_1}{^{50}C_1}\times\frac{^{45}C_1}{^{50}C_1}\times\frac{^{45}C_1}{^{50}C_1}$$

$$=\frac{45}{50}\times\frac{45}{50}\times\frac{45}{50}=\frac{9}{10}\times\frac{9}{10}\times\frac{9}{10}=\left(\frac{9}{10}\right)^3$$

$b)$ ఒక స్క్రూను ఎన్నుకొన్న వెంటనే తిరిగి అందులోకి చేర్చకపోవడం

$$P(E)=\frac{^{45}C_1}{^{50}C_1}\times\frac{^{44}C_1}{^{49}C_1}\times\frac{^{43}C_1}{^{48}C_1}$$

$$=\frac{45}{50}\times\frac{44}{49}\times\frac{43}{48}$$

$$=\frac{1419}{1960}$$

14. ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో A, B, C లు మూడు స్వతంత్ర ఘటనలవుతూ $P\left(A \cap B^{C} \cap C^{C}\right)=\frac{1}{4}$, $P\left(A^{C} \cap B \cap C^{C}\right)=\frac{1}{8}, P\left(A^{C} \cap B^{C} \cap C^{C}\right)=\frac{1}{4}$ అయినప్పుడు లను కనుక్కోండి.

సాధన. A, B, C లు మూడు స్వతంత్ర ఘటనలు

$$P\left(A \cap B^{C} \cap C^{C}\right)=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P(A).P\left(B^{C}\right), P\left(C^{C}\right)=\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$P\left(A^{C} \cap B \cap C^{C}\right)=\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow P\left(A^{C}\right).P(B).P\left(C^{C}\right)=\frac{1}{8} \quad (2)$$

$$P\left(A^{C} \cap B^{C} \cap C^{C}\right)=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P\left(A^{C}\right).P\left(B^{C}\right).P\left(C^{C}\right)=\frac{1}{4} \quad (3)$$

$$(1) \div (3) \Rightarrow \frac{P(A).P\left(B^{C}\right).P\left(C^{C}\right)}{P\left(A^{C}\right).P\left(B^{C}\right).P\left(C^{C}\right)}=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)}=1$$

$$\Rightarrow \frac{P(A)}{P\left(A^{C}\right)}=1$$

$$\Rightarrow \frac{P(A)}{1-P(A)}=1$$

$$\Rightarrow P(A)=1-P(A)$$

$$\Rightarrow 2P(A)=1 \Rightarrow P(A)=\frac{1}{2}$$

$$(2) \div (3) \Rightarrow \frac{P\left(A^{C}\right) P(B).P\left(C^{C}\right)}{P\left(A^{C}\right).P\left(B^{C}\right).P\left(C^{C}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{1}{8}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)} \Rightarrow \frac{P(B)}{1-P(B)}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2P(B)=1-P(B)$$

$$\Rightarrow 3P(B)=1$$

$$\therefore P(B)=\frac{1}{3}$$

(1) నుండి $P(A).P(B^C).P(C^C)=\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow P(A).[1-P(B)][1-P(C)]=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P(A)\left(1-\frac{1}{3}\right)[1-P(C)]=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)[1-P(C)]=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 1-P(C)=\frac{1}{4}\times 3=\frac{3}{4}$$

$$\therefore P(C)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

$$\therefore P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{1}{3}, P(C)=\frac{1}{4}.$$

15. ఒక సంచిలో 3 నల్లని, 4 తెల్లని బంతులు ఉన్నాయి. రెండో సంచిలో 4 నల్లని, 3 తెల్లని బంతులు ఉన్నాయి. ఒక పాచికను, దొర్లించి దానిపై 1 లేదా 3 పడినప్పుడు మొదటి సంచిని ఎంపిక చేస్తారు. మిగిలిన సందర్భాలలో రెండో సంచిని ఎనిపిక చేస్తారు. ఒక సంచిని ఈ విధంగా ఎంపిక చేసినప్పుడు ఒక నల్లని బంతిని తీసే సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

సాధన. పాచికపై 1 లేదా 3 పడినప్పుడు మొదటి సంచిని ఎంపిక చేస్తారు. కనుక మొదటి సంచిని ఎన్నుకొనేందుకు

సంభావ్యత $=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\therefore$ రెండవ సంచిని ఎన్నుకొనేందుకు సంభావ్యత

$$=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

మొదటి సంచిని ఎనిపికచేసి అందుండి నల్లబంతి తీసేందుకు సంభావ్యత $=\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}=\frac{3}{21}$

ఇక రెండవ సంచిని ఎంపికచేసి అందుండి నల్ల బంతి తీసేందుకు సంభావ్యత $=\frac{2}{3}\times\frac{4}{7}=\frac{8}{21}$

కనుక కావలసిన సంభావ్యత $=\frac{3}{21}+\frac{8}{21}=\frac{11}{21}.$

16. ఒక జత పాచిలకను దొర్లించారు. ఏ పాచిక 2ను చూప నట్లయితే, ఆ పాచిలకలపై మొత్తం 7 రాగల సంభావ్యత ఎంత?

సాధన. A అనేది రెండు పాచికలపై మొత్తం 7 రాగల ఘటన. అప్పుడు

$A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$

B అనేది ఏ పాచిక 2 ను చూపనట్టి ఘటన.

$B = \{(1,1),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)$

$(3,1),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)$

$(4,1),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)$

$(5,1),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)$

$(6,1),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

$n(B) = 25$

$A \cap B = \{(1,6),(3,4),(4,3),(6,1)\}$

$n(A \cap B) = 4$

కావలసిన సంభావ్యత $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$= \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{4}{25}.$

17. ఒక జత పాచిలకను దొర్లించారు. ఆ పాచికలపైమొత్తం 7 అయినప్పుడు, ఏ ఒక పాచిక రెండు చూపకపోయే ఘటన సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

సాధన. పాచికలపై మొత్తం 7 రావటం అనే ఘటన

A అనుకుంటే $A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$

$\therefore n(A) = 6$

ఏ ఒక పాచిక రెండు చూపకపోవటం అనే ఘటన

B అనుకుంటే

$B = \{(1,1),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)$

$(3,1),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)$

$(4,1),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)$

$(5,1),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)$

$(6,1),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

$A \cap B = \{(1,6),(3,4),(4,3),(6,1)\}$

$n(A \cap B) = 4$

$\therefore$ కావలసిన సంభావ్యత

$$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

18. A, B **లు ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలోని ఘటనలు;** $P(B) \neq 1, P\left(\frac{A}{B^C}\right) = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)}$ **అని చూపండి.**

సాధన. నియతసంభావ్యతా నిర్వచనం నుండి

$$P\left(\frac{A}{B^C}\right) = \frac{P(A \cap B^C)}{P(B^C)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)}$$

$$\left[\because A \cap B^C = A - (A \cap B), P(B^C) = 1 - P(B)\right]$$

19. ఒక పాచికను, వరుసగా 2 సార్లు దొర్లించారు. రెండో ప్రయత్నంలో చూపే సంఖ్య, మొదటి ప్రయత్నంలో చూపే సంఖ్యకంటే పెద్దది కాగల సంభావ్యత ఎంత?

సాధన. ఒక పాచికను వరుసగా రెండుసార్లు దొర్లించారు. కనుక $n(S) = 6 \times 6 = 36$

E అనేది మొదటి ప్రయత్నంలోదొర్లించినప్పుడు పాచికపై వచ్చేసంఖ్య కంటే రెండో ప్రయత్నంలో దొర్లించినప్పుడు దానిపై వచ్చే సంఖ్య పెద్దది అయ్యే ఘటన

$E = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),$

$(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),$

$(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)\}$

$n(E) = 15$

$$\therefore P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

20. ఒక చీట్ల పేక కట్ట నుంచి ఒక పేకముక్కను యాదృచ్ఛికంగా తీశారు. తీసినది ఆసు అయ్యే ఘటన, ఆటీను అయ్యేఘటన స్వతంత్ర ఘటనలని చూపండి.

సాధన. పేకకట్ట నుండి ఒక ముక్కను ఎన్నుకొనే విధాల సంఖ్య

$n(S) = {}^{52}C_1 = 52$

E_1 అనేది ఆసు అయ్యే ఘటన అనుకుంటే

$n(E_1) = {}^{4}C_1 = 4$

$P(E_1) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

E_2 అనేది ఆటీను అయ్యే ఘటన

$n(E_1) = {}^{13}C_1 = 13$

$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

$E_1 \cap E_2$ అనే ఘటన తీసిన ముక్క ఆటీను ఆసు కావటం

$n(E_1 \cap E_2) = 1$

$P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{52} = \frac{1}{13} \times \frac{1}{4} = P(E_1).P(E_2)$

కనుక E_1, E_2 లు స్వతంత్ర ఘటనలు

21. $P(A \cup B) = 0.65, P(A \cap B) = 0.15$ **అయ్యేటట్లు A, B రెండు ఘటనలు. అప్పుడు $P(A^C) + P(B^C)$ విలువను కనుక్కోండి.**

సాధన. A, B లు రెండు ఘటనలు.

$P(A \cup B) = 0.65, P(A \cap B) = 0.15$

$\because P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Rightarrow 0.65 = P(A) + P(B) - 0.15$

$\Rightarrow P(A) + P(B) = 0.65 + 0.15 = 0.80$

ఇప్పుడు

$P(A^C) + P(B^C) = [1 - P(A)] + [1 - P(B)]$

$= 2 - (P(A) + P(B))$

$= 2 - 0.80$

$= 1.2$

$\therefore P\left(A^C\right) + P\left(B^C\right) = 1.2$

22. A, B, C **స్వతంత్ర ఘటనలు అయితే**, $A \cup B$ **మరియు** C **కూడా స్వతంత్ర ఘటనలనిచూపండి.**

సాధన. A, B, C లు సంతంత్ర ఘటనలుకనుక

$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ (1)

మరియు $A, B; B, C; C, A$ లు కూడా సంతంత్ర ఘటనలే.

$P(A \cap C) = P(A).P(C)$

$P(B \cap C) = P(B).P(C),$

$P[(A \cup B) \cap C] = P[(A \cap C) \cup (B \cap C)]$

$= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P[(A \cap C) \cap (B \cap C)]$

$= P(A).P(C) + P(B).P(C) - P(A \cap B \cap C)$

$= P(A).P(C) + P(B).P(C) - P(A).P(B).P(C)$

$= P(C)[P(A \cap B)]$

$\therefore P[(A \cup B) \cap C) = P(A \cup B).P(C)$

$A \cup B, C$ లు సంతంత్ర ఘటనలు

23. రెండు ఘటనలు జరిగే సంభావ్యత $\frac{1}{6}$ **అయ్యేటట్లు, రెండూ జరగకపోవడానికి గల సంభావ్యత** $\frac{1}{3}$ **అయ్యేటట్లుగా** A, B **లు రెండు స్వతంత్ర ఘటనలు.** $P(A)$ **ను కనుక్కోండి.**

సాధన. A, B లు సంతంత్రఘటనలు

$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \Rightarrow P(A).P(B) = \frac{1}{6}$ (1)

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(\bar{A}).P(\bar{B}) = \frac{1}{3}$ (2)

$P(A) = x, P(B) = y$ అనుకుందాం. అపుడు

(1),(2) ల నుండి

$xy = \frac{1}{6}$ (3)

$$(1-x)(1-y)=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 1-x-y+xy=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=x+y$$

$$\Rightarrow \frac{6+1-2}{6}=x+y$$

$$\therefore x+y=\frac{5}{6} \quad (4)$$

$(3),(4)$ ల నుండి

$$x+\frac{1}{6x}=\frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{6x^2+1}{6x}=\frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow 6x^2+1=5x$$

$$\Rightarrow 6x^2-5x+1=0$$

$$\Rightarrow (2x-1)(3x-1)=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{2} \text{ లేక } \frac{1}{3}$$

24. **ఒక క్రికెట్ ఆటలో ఇండియాపై ఆస్ట్రేలియా గెలిచే సంభావ్యత $\frac{1}{3}$. ఇండియా, ఆస్ట్రేలియా 3 ఆటలలో ఆడితే,**

$i)$ ఆస్ట్రేలియా మూడు ఆటలలో ఓడిపోయే సంభావ్యతను,

$ii)$ ఆస్ట్రేలియాకనీసం ఒక ఆట గెలిచే సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

సాధన. E అనేది ఇండియా పై ఆస్ట్రేలియాగెలిచే ఘటన అనుకుందా.

$$P(E)=\frac{1}{3}, P(\bar{E})=1-P(E)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$i)$ ఆస్ట్రేలియా మూడు ఆటలు ఓడిపోవడానికి సంభావ్యత $=\left(P(\bar{E})\right)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$

$ii)$ ఆస్ట్రేలియా కనీసం ఒక ఆట గెలిచే సంభావ్యత

$$=1-\left(P(\bar{E})\right)^3$$

$$= 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

25. ఒక కంపెనీలో ఉద్యోగుల నుంచి 5 గురు వ్యక్తులను ఆ కంపెనీ పాలక వర్గ ప్రతినిధులుగా ఎన్నుకొన్నారు. 5 గురి వ్యక్తుల వివరాలు కింది విధంగా ఉన్నాయి

క్ర.సం.	పేరు	లింగం	వయస్సు (సం॥లలో)
1	హరీష్	పు	30
2	రోహన్	పు	33
3	శీతల	స్త్రీ	46
4	అలీస్	స్త్రీ	28
5	సలీం	పు	41

పై సమూహం నుంచి ఒక వ్యక్తిని యాదృచ్ఛికంగా ప్రసంగకర్తగా ఎన్నుకొంటే, ఆ వ్యక్తి పురుషుడు లేదా 35 సంవత్సరాలు పైబడినవాడు అయ్యే సంభావ్యతను కనుక్కోండి

జ: ఎన్నుకొనే వ్యక్తి పురుషుడు అయ్యే ఘటన A అనుకొనిన,

$n(A) = 3$

ఎన్నుకొనే వ్యక్తి 35 సంవత్సరములు దాటిన వ్యక్తి అయ్యే ఘటన B అనుకొనిన, $n(B) = 2$

శాంపుల్ ఆవరణం 'S' అనుకొనిన

$n(S) = 5,\ n(A \cap B) = 1$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

$$= \frac{3}{5} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

26. వందమంది విద్యార్థుల నుంచి 40 మరియు 60 మంది విద్యార్థులు గల రెండు సెక్షన్లు ఏర్పడ్డాయి. నీవు, నీ మిత్రుడు ఆ వంద మందిలో ఉండి,

i) **మీ ఇద్దరూ ఒకే సెక్షన్‌లోకి ప్రవేశించే వేర్వేరు సెక్షన్లలోకి ప్రవేశించే**

ii) **సంభావ్యతలను కనుక్కోండి**

జ: S శాంపుల్ ఆవరణం అనుకొనిన $n(S) = {}^{100}C_{40}$

i) ఇద్దరూ ఒకే సెక్షన్‌లోకి ప్రవేశించే సంభావ్యత

$n(A) = {}^{98}C_{38} + {}^{98}C_{58}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{{}^{98}C_{38} + {}^{98}C_{58}}{{}^{100}C_{40}} = \frac{17}{33}$$

ii) వేర్వేరు సెక్షన్లలోకి ప్రవేశించే సంభావ్యత

$n(A) = {}^{98}C_{39} + {}^{98}C_{59}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{{}^{98}C_{39} + {}^{98}C_{54}}{{}^{100}C_{40}} = \frac{16}{33}$$

27. A, B **లు రెండు ఘటనలైతే** $P(A/B)P(B) + P(A/B^c)P(B^c) = P(A)$ **అని చూపండి.**

జ: $P\left(\frac{A}{B}\right)P(B) + P\left(\frac{A}{\overline{B}}\right)P\left(\overline{B}\right)$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \times P(B) + \frac{P\left(A \cap \overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)} \times P\left(\overline{B}\right)$$

$$= P(A \cap B) + P(A) - P(A \cap B) = P(A)$$

$$\left[\because \left(A \cap \overline{B}\right) = A - (A \cap B)\right]$$

28. **ఒక పాత్రలో 12 ఎర్రని బంతులు, 12 ఆకుపచ్చని బంతులు ఉన్నాయి. ఒకదాని వెంబడి మరొకటి, భర్తీ చేయని విధంగా రెండు బంతులను తీశారు. మొదట తీసిన బంతి ఎర్రనిది అయినప్పుడు, రెండో బంతి ఆకపచ్చనది కాగల సంభావ్యతను కనుక్కోండి.**

జ: E_1 అనేది మొదటిసారి తీసిన బంతి ఎర్రనిదిగా అయ్యే ఘటన పాత్రలోని బంతుల సంఖ్య = 24

$\therefore n(E_1) = {}^{12}C_1 = 12$

$$\therefore P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

మొదటిసారి తీసిన బంతి సంచిలో చేర్చలేదు. కనుక ఇప్పుడు సంచిలోని బంతుల సంఖ్య = 23

రెండవసారి తీసిన బంతి ఆకుపచ్చనిది అయ్యే ఘటన E_2 అనుకొనుము.

$$n\left(\frac{E_2}{E_1}\right) = {}^{12}C_1 = 12$$

$$\therefore P\left(\frac{E_2}{E_1}\right) = \frac{12}{23}$$

$\therefore$ కావలసిన సంభావ్యత

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1).P\left(\frac{E_2}{E_1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{12}{23} = \frac{6}{23}$$

మొదట తీసిన బంతి ఎర్రనిది అయినప్పుడు, రెండో బంతి ఆకుపచ్చనిది కాగల సంభావ్యత $= \frac{6}{23}$

29. A అనే బాలుడు స్కాలర్‌షిప్పు పొందే సంభావ్యత 0.9. B అనే మరో బాలుడు స్కాలర్‌షిప్పు పొందే సంభావ్యత 0.8. వీరిలో కనీసం ఒకరు స్కాలర్‌షిప్పు పొందే సంభావ్యత ఎంత?

జ: బాలుడు E_1 స్కాలర్‌షిప్ పొందడానికి సంభావ్యత

$P(E_1) = 0.9$

బాలుడు E_2 స్కాలర్‌షిప్ పొందడానికి సంభావ్యత

$P(E_2) = 0.8$

$\therefore$ కావలసిన సంభావ్యత

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

$$= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1).P(E_2)$$

$$= 0.9 + 0.8 - 0.72$$

$$= 1.7 - 0.72 = 0.98$$

29. ఒక నాణాన్ని మూడుసార్లు ఎగరవేశారనుకోండి. మూడు బొమ్మలు వచ్చే ఘటన A, మొదటిసారి ఎగరవేసినప్పుడు బొమ్మ వచ్చే ఘటన B అనుకోండి. అప్పుడు A, B లు అస్వతంత్ర ఘటనలని చూపండి.

జ: నాణేన్ని మూడు సార్లు ఎగరవేశారు కనుక

$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT,$
$TTH, TTT\}$

$\Rightarrow n(S) = 2^3 = 8$

A అనేది 3 బొమ్మలు వచ్చే ఘటన, కనుక

$$\Rightarrow n(A) = {}^3C_3 = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{8}$$

B అనేది మొదటిసారి ఎగరవేసినప్పుడు బొమ్మ వచ్చే ఘటన $B = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$

$$n(B) = 4 \quad \therefore P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$A \cap B = \{HHH\}$

$n(A \cap B) = 1$

$$n(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{8}$$

$$P(A).P(B) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

$\therefore P(A \cap B) \neq P(A).P(B)$

$\therefore A, B$ లు అస్వతంత్ర ఘటనలు

30. ఒక నిష్పాక్షిక పాచికల యుగ్మాన్ని దొర్లించారు. రెండింటి మూఖాల పై ఒకే సంఖ్య వచ్చే ఘటన A అనుకోండి. రెండింటి ముఖాలపైన వచ్చే సంఖ్యల మొత్తం 7 కంటే ఎక్కువ అయ్యే ఘటన B అనుకోండి. అప్పుడు

$i) P(A/B)$, $ii) P(B/A)$ లను కనుక్కోండి.

జ: రెండు నిష్పాక్షిక పాచికలను దొర్లించారు. కనుక

$n(S) = 36$

A అనేది రెండు పాచికలపై ఒకే సంఖ్య వచ్చే ఘటన

$n(A) = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

$$P(A) = \frac{6}{36}$$

B అనేది రెండింటి పైన వచ్చే సంఖ్యల మొత్తం 7 కంటే ఎక్కువ అయ్యే ఘటన

$n(B) = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2),(3,6),$

$(4,5),(5,4),(6,3),(4,6),(5,5),(6,4),(5,6),$

$(6,5),(6,6)\} = 15$

$$P(B) = \frac{15}{36}$$

$n(A \cup B) = \{(4,4),(5,5),(6,6)\} = 3$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{36}$$

$$i) P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{15}{36}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

$$ii) P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

31. A, B లు స్వతంత్ర ఘటనలనడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమం $P(A/B) = P\left(A/B^c\right)$ అని చూపండి.

జ: A, B లు స్వతంత్ర ఘటనలు

$$L.H.S: P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

$$R.H.S: P\left(A/B^c\right) = \frac{P\left(A \cap B^c\right)}{P\left(B^c\right)}$$

$$= \frac{P(A).P(B^c)}{P(B^c)} = P(A)$$

$\therefore L.H.S = R.H.S$

32. $P(A) = 0.6,\ \ P(B) = 0.7$ **తో** A, B **లు స్వతంత్ర ఘటనలనుకోండి. అప్పుడు** $i)\,P(A \cap B)\ \ ii)\,P(A \cup B)\ \ iii)\,P(B/A)\ \ iv)\,P(A^c \cap B^c)$ **లను కనుక్కోండి**

జ: $P(A) = 0.6,\ P(B) = 0.7$ మరియు A, B లు స్వతంత్ర ఘటనలు

$i)\,P(A \cap B) = P(A).P(B)$

$= 0.6 \times 0.7 = 0.42$

$ii)\,P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0.6 + 0.7 - 0.42$

$= 1.3 - 0.42 = 0.88$

$$iii)\,P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.42}{0.6} = 0.7$$

$iv)\,P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B})$

$= [1 - P(A)][1 - P(B)]$

$= (1 - 0.6)(1 - 0.7)$

$= (0.4)(0.3) = 0.12$

33. ఒకనికి నిర్మాణపు కంపెనీలో ఉద్యోగం లభించింది. ఆ కంపెనీలోని పనివారు సమ్మెకు దిగే సంభావ్యత 0.65. సమ్మె లేనప్పుడు నిర్మాణం పని సరైన సమయంలో పూర్తయ్యే సంభావ్యత 0.80. సమ్మె ఉన్నప్పటికీ, నిర్మాణం పని పూర్తయ్యే సంభావ్యత 0.32 అయితే నిర్మాణం పని సరైన సమయంలో పూర్తయ్యే సంభావ్యతను నిర్ధారించండి.

జ: $P(S) =$ కంపెనీలోని పనివారు సమ్మెకు దిగే సంభావ్యత

$= 0.65$

$P(\overline{S}) =$ కంపెనీలోని పనివారు సమ్మెకు దిగేకుండా ఉండుటకు సంభావ్యత

$P(\overline{S}) = 1 - P(S) = 1 - 0.65 = 0.35$

$P(A/S) =$ సమ్మె ఉన్నప్పటికీ, నిర్మాణం పని పూర్తయ్యే సంభావ్యత = 0.32

$P(A/\overline{S}) =$ సమ్మె లేకుండా నిర్మణ పని సరైన సమయంలో పూర్తయ్యే సంభావ్యత = 0.80

$P(A) =$ నిర్మాణ పని సరైన సమయంలో పూర్తి కావడానికి సంభావ్యత

$$\therefore P(A) = P(S)P\left(\frac{A}{S}\right) + P(\overline{S})P\left(\frac{A}{\overline{S}}\right)$$

$= (0.65)(0.32) + (0.35)(0.80)$

$= 0.2080 + 0.2800$

$= 0.4880$

$\therefore P(A) = 0.488$

34. A, B లు ఏవేని ఘటనలయితే, $P(A \cap B) - P(A)P(B) \quad = P(A^c)P(B) - P(A^c \cap B) \quad = P(A)P(B^c) - P(A \cap B^c)$ అని చూపండి.

జ: $P(A^c)P(B) - P(A^c \cap B)$

$= [1 - P(A)]P(B) - P[(S - A) \cap B]$

$= P(A) - P(B) - P(B) + P(A \cap B)$

$= P(A \cap B) - P(A)P(B)........(1)$

$P(A)P(B^c) - P(A \cap B^c)$

$= P(A)[1 - P(B)] - P[A - (A \cap B)]$

$= P(A) - P(A)P(B) - P(A) + (A \cap B)$

$= P(A \cap B) - P(A)(B).........(2)$

(1), (2) ల నుంచి

$= P(A \cap B) - P(A)(B)$

$= P(A^c)P(B) = P(A^c \cap B)$

$= P(A)P(B^c) = P(A \cap B^c)$

35. ఒక కళాశాలలో 25% బాలురు, 10% బాలికలు గణితాన్ని అభ్యసిస్తున్నారు. విద్యార్థుల సంఖ్యలో బాలికలు 60%. యాదృచ్ఛికంగా ఎంపిక చేసిన ఒక విద్యార్థి గణితం చదువుతున్నట్లయితే, ఆ విద్యార్థి బాలిక కాగల సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

జ: ఎన్నుకోబడిన విద్యార్థి బాలిక కాగల సంభావ్యత

$P(E_1) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

ఎన్నుకోబడిన విద్యార్థి బాలుడు కాగల సంభావ్యత

$P(E_2) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

బాలుడు గణితం అభ్యసించడానికి గల సంభావ్యత

$P\left(\frac{M}{E_1}\right) = \frac{1}{10}, P\left(\frac{M}{E_2}\right) = \frac{1}{4}$

బేయీ సిద్ధాంతం ప్రకారం, ఎంపిక చేసిన విద్యార్థి గణితం చదువుతున్నట్లయితే, ఆ విద్యార్థి బాలిక కాగల సంభావ్యత

$$P\left(\frac{E}{M}\right)=\frac{P(E_1).P\left(\frac{M}{E_1}\right)}{P(E_1).P\left(\frac{M}{E_1}\right)+P(E_2).P\left(\frac{M}{E_2}\right)}$$

$$=\frac{\frac{3}{5}\times\frac{1}{10}}{\frac{3}{5}\times\frac{1}{10}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{\frac{3}{50}}{\frac{3}{50}+\frac{2}{20}}+\frac{3}{50}\times\frac{1000}{160}=\frac{3\times 10}{80}=\frac{3}{8}$$

36. ఒకనికి 3 సార్లలో 2 సార్లు నిజం చెప్పే అలవాటు ఉంది. అతడు ఒక పాచికను దొర్లించి, అది 1 అని నివేదిస్తాడు. అది నిజంగా 1 అయ్యే సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

జ: ప్రతి 3 సార్లలో 2 సార్లు నిజం చెప్తే అతని సంభావ్యత $P(T)$ అయిన,

$$P(T)=\frac{2}{3}$$

$$P(\overline{T})=\frac{1}{3}$$

అతడు 1 అని నివేదించిన తరువాత పాచిక 1 చూపే సంభావ్యత $=\frac{1}{6}$

$$P\left(\frac{A}{T}\right)=\frac{1}{6}$$

$$P\left(\frac{A}{\overline{T}}\right)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

37. 30 వరస పూర్ణాంకాల నుంచి రెండింటిని యాదృచ్ఛికంగా ఎన్నుకొన్నారు. వాటి మొత్తం బేసి సంఖ్య అయ్యే సంభావ్యత ఎంత?

జ: 30 సంఖ్యల నుంచి 2 సంఖ్యలను ఎన్నుకొనే విధాలు ${}^{30}C_2$. ఈ 30 సంఖ్యలలో 15 బేసి సంఖ్యలు కాగా 15 సరి సంఖ్యలు. ఎన్నుకొన్న రెండు సంఖ్యల మొత్తం బేసి సంఖ్య కావాలంటే, అందులో ఒకటి సరిసంఖ్య మరొకటి బేసి సంఖ్య కావాలి. కాబట్టి అనుకూల ఫలితాల సంఖ్య

${}^{15}C_2\times{}^{15}C_1$

$\therefore$ కావలసిన సంభావ్యత

$$=\frac{{}^{15}C_1\times{}^{15}C_1}{{}^{30}C_2}=\frac{15\times 15\times 2}{30\times 29}=\frac{15}{29}$$

38. A, B, C **లు మూడు ఘటనలైతే,** $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C)$ $- P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$ **అని చూపండి.**

జ: $B \cup C = D$ గా రాద్దాం అప్పుడు

$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup D)$

$P(A) + P(D) - P(A \cap D)$

$P(A) + P(B \cup C) - P[(A \cap (B \cap C)]$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C)$

$- P[(A \cap B) \cup (A \cap C)]$.................(1)

$E = (A \cap B), F = (A \cap C)$ అనుకొందాం అప్పుడు

$P[(A \cap B) \cup (A \cap C)] = P(E \cup F)$

$= P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

$= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap A \cap C)$

$= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)$...(2)

సమీకరణం (2) ను (1) లో ప్రతిక్షేపించి, కావలసిన ఫలితాన్ని పొందగలం.

39. A, B **లు ఒక నాణేన్ని ఒక్కొక్కరు 50 సార్లు ఏకకాలంలో ఎగరవేస్తారు. ఇద్దరికీ ఒకే ఎరగవేతలో బొరును పడకపోవడానికి సంభావ్యత కనుక్కోండి.**

జ: A, B లు ఇద్దరికీ ఒక ఎరగవేతలో బొరుసు పడకపోయే ఘటనలు E అనుకొందాం. ప్రతి ఎగరవేతలో కింద పేర్కొన్న నాలుగు రకాల అవకాశాలున్నాయి.

$i) A$ కి H రావడం, B కి H రావడం

$ii) A$ కి H రావడం, B కి T రావడం

$iii) A$ కి T రావడం, B కి H రావడం

$iv) A$ కి T రావడం, B కి T రావడం

ఇక్కడ 50 యత్నాలు కాబట్టి మొత్తం అవకాశాల సంఖ్య 4^{50} పైన పేర్కొన్న నాలుగు సందర్భాలలో $(i), (ii), (iii)$ లు మాత్రమే కావలసిన ఘటన E కు అనుకూల సందర్భాలు

$\therefore P(E) = \frac{3^{50}}{4^{50}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{50}$

ధీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు

1. I, II, III **అంకెలను కలిగిన మూడు పెట్టెలలో క్రింది విధంగా బంతులు ఉన్నాయి.**

	తెల్లనివి	నల్లనివి	ఎర్రనివి
I	**1**	**2**	**3**
II	**2**	**1**	**1**
III	**4**	**5**	**3**

ఒక పెట్టెను ఎంచుకొని అందులోనుంచి ఒకబంతిని యాదృచ్ఛికంగా తీశారు. బంతి ఎర్రనిదైతే అది పెట్టె II ***నుంచితీయగల సంభావ్యతను కనుక్కోండి.***

సాధన. E_1, E_2, E_3 లు వరుసగా I, II, III పెట్టెలను ఎన్నుకునే ఘటనలు అనుకుందాం.

$$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{3}$$

పెట్టె I నుండి ఎర్ర బంతిని ఎన్నుకోవటానికి సంభావ్యత

$$(i.e.,)\, P(R/E_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ఇట్లే $P(R/E_1) = \frac{1}{4}, P(R/E_3) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

తీసిన బంతి ఎర్రనిది అయితే అది పెట్టె II నుంచి తీయగల సంభావ్యత (బేయిస్ సిద్ధాంతం నుంచి)

$$P(E_2/R) = \frac{P(E_2).P(R/E_2)}{P(E_1).P(R/E_1) + P(E2).P(R/E_2) + P(E_3).P(R/E_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}.\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{1}{4}}{(1)} = \frac{1}{4}$$

2 . **మూడు పాత్రలు క్రింది విధంగా బంతులను కలిగి ఉన్నాయి.**

పాత్ర I : 1 తెల్లనిది, 2 నల్లనివి

పాత్ర II : 2 తెల్లనిది, 1 నల్లనివి

పాత్ర III : 2 తెల్లనిది, 2 నల్లనివి

ఒక పాత్రను యాదృచ్ఛికంగా ఎనిపికచేసి, దాని నుంచి ఒక బంతిని తీశారు. అది తెల్లనిదిగా గుర్తించారు. ఆ బంతి పాత్ర III నుంచి తీయగల సంభావ్యత కనుక్కోండి.

సాధన. i పాత్రను ఎన్నుకొనే ఘటనను $E_i\left(i=1,2,3\right)$ తో సూచిస్తే,

i అనే పాత్రను ఎన్నుకోవటానికి సంభావ్యత $P\left(E_i\right)$

ఇచ్చట $P\left(E_1\right)=P\left(E_2\right)=P\left(E_3\right)=\frac{1}{3}.$

i పాత్ర నునిడితెల్లబంతి రావటం అనే ఘటనను $\left(W/E_i\right)$ తో సూచిస్తే, దాని సంభావ్యత $P\left(W/E_i\right)$ అవుతుంది.

ఇప్పుడు

$$P\left(W/E_1\right)=\frac{1}{3}$$

$$P\left(W/E_2\right)=\frac{2}{3}$$

$$P\left(W/E_3\right)=\frac{2}{4}$$

తీసిన బంతి తెల్లనిది అయితే అది పాత్ర III నుంచిరావటానికి సంభావ్యత

(బేయిస్ సిద్ధాంతం నుంచి)

$$P(E_3/W)=\frac{P(E_3).P(W/E_3)}{P(E_1).P\left(\frac{W}{E_1}\right)+P(E_2).P\left(\frac{W}{E_2}\right)+P(E_3).P\left(\frac{W}{E_3}\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}.\frac{2}{4}}{\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}\right)}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)}=\frac{1}{3}$$

3. **ఒక కాల్పుల పోటీలో A, B, C లక్ష్యాన్ని ఛేదించే సంభావ్యతలు వరుసగా $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ వీరందరూ ఒకే లక్ష్యాన్ని కాల్పులు జరిపినప్పుడు**

$i)$ ఒకే ఒకరు లక్ష్యాన్ని ఛేదించే $ii)$ కనీసం ఒకరు లక్ష్యాన్ని ఛేదించే సంభావ్యతలను కనుక్కోండి.

సాధన. కాల్పుల పోటీలో A, B, C లక్ష్యాన్ని ఛేదించే సంభావ్యతలు వరుసగా

$P(A)=\frac{1}{2}; P(B)=\frac{2}{3}, P(C)=\frac{3}{4}$ లు

$$\therefore P(\bar{A})=1-P(A)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$P(\bar{B})=1-P(B)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

$$P(\bar{C})=1-P(C)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

$i)$ ఒకే ఒకరు లక్ష్యాన్ని ఛేదించే సంభావ్యత

$$=P\left(A\cap\bar{B}\cap\bar{C}\right)+P(\bar{A}\cap B\cap\bar{C})$$

$$+P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C)$$

$$=P(A).P(\bar{B}).P(\bar{C})+P(\bar{A}).P(B)P(\bar{C})$$

$$+P(\bar{A}).P(\bar{B}).P(C)$$

$\because A, B, C$ లు స్వతంత్రఘటనలు

$$=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}+\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{1}{4}.+\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{3}{4}$$

$$=\frac{1+2+3}{24}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}.$$

$ii)$ కనీసం ఒకరు లక్ష్యాన్ని ఛేదించే సంభావ్యత

$$=P(A\cup B\cup C)$$

$=1-$ (ఏ ఒక్కరు లక్ష్యాన్ని ఛేదించలేని సంభ్వాత)

$$=1-\left[P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C})\right]$$

$$=1-P(\bar{A}).P(\bar{B}).P(\bar{C})$$

$$=1-\left(\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}\right)$$

$$=1-\frac{1}{24}=\frac{23}{24}$$

4. మూడు పరస్పర వివర్జిత ఘటనల సంభావ్యతలు వరసగా $\frac{1+3p}{3},\frac{1-p}{4},\frac{1-2p}{2}$ అయితే $\frac{1}{3}\le p\le\frac{1}{2}$ అని నిరూపించండి.

జ: A,B,C లు పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు అనుకుంటే,

$$P(A)=\frac{1+3P}{3}$$

$$P(B)=\frac{1-P}{4}$$

$$P(C)=\frac{1-2P}{2}$$

ఇచ్చుట

$0\le P(A)\le 1 \qquad 0\le P(B)\le 1$

$0\le\frac{1+3P}{3}\le 1 \qquad 0\le\frac{1-P}{4}\le 1$

$0\le 1+3P\le 3 \qquad 0\le 1-P\le 4$

$-1\le 3P\le 2 \qquad -1\le -P\le 3$

$\frac{-1}{3}\le P\le\frac{2}{3}$

$1\ge P\ge -3$........1)

$-3\le P\le 1$......(2)

$0\le P\le 1$

$0\le\frac{1-2P}{2}\le 1$

$0\le 1-2P\le 2$

$-1\le -2P\le 1$

$1\le 2P\le -1$

$$\frac{1}{2} \le P \le -\frac{1}{2}$$

$$\frac{-1}{2} \le P \le \frac{1}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

A, B, C లు పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు,

$$0 \le P(A \cup B \cup C) \le 1$$

$$\Rightarrow 0 \le P(A) + P(B) + P(C) \le 1$$

$$\Rightarrow 0 \le \frac{4+12P+3-3P+6-12P}{12} \le 1$$

$$\Rightarrow 0 \le \frac{13-3P}{12} \le 1$$

$$\Rightarrow 0 \le 13-3P \le 12$$

$$\Rightarrow -13-3P \le -1$$

$$\Rightarrow 13 \ge 3P \ge 1$$

$$\Rightarrow \frac{13}{3} \ge P \ge \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \le P \le \frac{13}{3} \ldots\ldots\ldots(4)$$

$\left\{\frac{-1}{3}, -3, \frac{-1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$ లో గరిష్ఠం $= \frac{1}{3}$

$\left\{\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{2}, \frac{13}{3}\right\}$ లో కనిష్ఠం $= \frac{1}{2}$

(1), (2), (3) మరియు (4) ల నుండి

$$\frac{1}{3} \le P \le \frac{1}{2}$$

5. A, B, C **లు ఒక బుడగను పేల్చడానికి ప్రయత్నం చేస్తారు. 5 ప్రయత్నాలలో 4 సార్లు A సఫలమవుతాడు. 4 ప్రయత్నాలలో 3 సార్లు B, 3 ప్రయత్నాలలో 2 సార్లు C సఫలం అవుతారు. ముగ్గురూ ఏకకాలంలో బుడగను పేల్చడానికి సంసిద్ధం అయితే, కనీసం ఇద్దరు బుడగను పేల్చివేసే సంభావ్యతను కనుక్కోండి.**

జ: దత్తాంశం నుంచి

$P(A)=\frac{4}{5}; P(B)=\frac{3}{4}; \ P(C)=\frac{2}{3}$ ముగ్గురూ ఏకకాలంలో బుడగను పేల్చడానికి సంసిద్ధం అయితే, కనీసం ఇద్దరూ బుడగను పేల్చివేసే సంభావ్యత

$\therefore$ కావలసిన సంభావ్యత

$=P(A\cap B\cap \overline{C})+P(A\cap \overline{B}\cap C)+P(\overline{A}\cap B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$

$=P(A)P(B)P(\overline{C})+P(A)P(\overline{B})P(C)+P(\overline{A})P(B)P(C)+P(A)P(B)P(C)$

$=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)+\frac{4}{5}\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{2}{3}+\left(1-\frac{4}{5}\right)\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}$

$=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}$

$=\frac{1}{5}+\frac{2}{15}+\frac{1}{10}+\frac{2}{5}=\frac{6+4+3+12}{30}$

$=\frac{25}{30}=\frac{5}{6}$

6. **ఒక నిష్పాక్షిక పాచికను దొర్లించారు.** $A=\{1,3,5\}$, $B=\{2,3\}$, $C=\{2,3,4,5\}$ **ఘటనలను తీసుకోండి**

$i)\ P(A\cap B),\ P(A\cup B)$

$ii)\ P(A/B),\ P(B/A)$

$iii)\ P(A/C),\ P(C/A)$

$iv)\ P(B/C),\ P(C/B)$ **లను కనుక్కోండి**

జ: $n(S)=6$

$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}; \quad P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ మరియు

$P(C)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

$i)\ A\cap B=\{3\}$

$\therefore n(A\cap B)=1$

$\therefore P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

$A\cup B=\{1,2,3,5\}$

$n(A \cup B) = 4$

$\therefore P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$ii)\ P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}\left(\frac{3}{1}\right) = \frac{1}{2}$

$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

$iii)\ P\left(\frac{A}{C}\right) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)}$

$A \cap C = \{3, 4\}$

$\therefore n(A \cap C) = 2$

$\therefore P(A \cap C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\therefore P\left(\frac{A}{C}\right) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$

$P\left(\frac{C}{A}\right) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

$iv)\ P\left(\frac{B}{C}\right) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)}$

$B \cap C' = \{2, 3\}$

$\therefore n(B \cap C) = 2 \Rightarrow P(B \cap C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\therefore P\left(\frac{B}{C}\right) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$

$$P\left(\frac{C}{B}\right)=\frac{P(C\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}=1$$

7. A,B,C **లు ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలోని మూడు ఘటనలు. కింది వాటిని నిరూపించండి.**

$i)\ P(A/A)=1$

$ii)\ P(\phi/A)=0$

$iii) A\subseteq B\Rightarrow P(A)-P(A\cap B)$

$iv)\ P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

$v) A,B$ **లు పరస్పర వివర్జితాలై** $P(B)>0$ **అయితే,** $P(A/B)=0$

$vi)\ A,B$ **లు పరస్పర వివర్జితాలైతే,**

$$P(A/B^c)=\frac{P(A)}{1-P(B)};P(B)\neq 1$$

$vii)\ A,B$ **లు పరస్పర వివర్జితాలు,** $P(A\cup B)\neq 0$ **అయితే,** $P(A/A\cup B)=\dfrac{P(A)}{P(A)+P(B)}$

జ: $i)$ ఇచ్చుట $P\left(\frac{A}{A}\right)=\frac{P(A\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1$

$$ii) P\left(\frac{\phi}{A}\right)=\frac{P(\phi\cap A)}{P(A)}=\frac{P(\phi)}{P(A)}=\frac{0}{P(A)}=0$$

$iii)\ A\subseteq B\Rightarrow A\cap C\leq B\cap C$

$\Rightarrow P(A\cap C)\leq P(B\cap C)$

$$P\left(\frac{A}{C}\right)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}\leq\frac{P(B\cap C)}{P(C)}\leq P\left(\frac{B}{C}\right)$$

$$\therefore P\left(\frac{A}{C}\right)\leq P\left(\frac{B}{C}\right)$$

$iv) P(A-B)=P(A\cap\overline{B})$

$=P(A\cap(S-B))$

$=P[(A\cap S)-(A\cap B)]$

$=P(A)-P(A\cap B)$

$v)\ A,B$ లు పరస్పర వివర్జితాలై, $P(B)>0$ అయితే

$\Rightarrow A\cap B=\phi\Rightarrow P(A\cap B)=P(\phi)=0$

$$\therefore P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0}{P(B)}=0$$

$(\because P(B)>0)$

$vi) A,B$ లు పరస్పర వివర్జితాలైన,

$$P\left(\frac{A}{\overline{B}}\right)=\frac{P\left(A\cap\overline{B}\right)}{P(\overline{B})}$$

$$=\frac{P[A\cap(S-B)]}{P\left(\overline{B}\right)}$$

$$=\frac{P[(A\cap S)-(A\cap B)]}{P\left(\overline{B}\right)}$$

$$=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{P\left(\overline{B}\right)}$$

$$=\frac{P(A)}{1-P\left(B\right)}$$

$[\because A\cap B=\phi\Rightarrow P(A\cap B)=0]$

$vii)$ A,B లు పరస్పర వివర్జితాలై, $P(A\cup B)\neq 0$ అయిన

$$P\left(\frac{A}{A\cup B}\right)=\frac{P[A\cap(A\cup B)]}{P\left(A\cup B\right)}$$

$$=\frac{P(A)}{P\left(A\cup B\right)}$$

$[\because A\cap\left(A\cup B\right)=A]$

$$=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$

$$=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)}$$

$[\because P(A\cap B)=0]$

8. 75% సందర్భాలలో A నిజంమాట్లడతాడు, B 80% సందర్భాలలో B నిజం మాట్లాడతాడు. ఒక సంఘటన గురించివారు చెప్పే విషయం పర్సపరం విభేదించడానికి సంభావ్యత ఎంత?

సాధన. ఒక సంఘటన గురించి A,B లు నిజంచెప్పే ఘటనలు వరుసగా E_1,E_2 అనుకోండి అప్పుడు

$$P(E_1)=\frac{75}{100}=\frac{3}{4},P(E_2)=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$$

$$P(E_1^C)=\frac{1}{4},P(E_2^C)=\frac{1}{5}$$

ఒక సంఘటన గురించి వారు చెప్పే విషయం పరస్పరం విభేదించే ఘటన E అనుకొందాం. ఇది రెండు విధాలుగా జరగవచ్చు.

(i) A నిజం, B అబద్ధం చెబుతాడు

(*ii*) A అబద్ధం, B నిజం చెబుతాడు

ఈ రెండు ఘటనలను వరసగా $E_1 \cap E_2^C, E_1^C \cap E_2$ తో సూచింవచ్చు. ఈ రెండూ పరస్పర విర్జిత ఘటనలు.

$P(E) = P(E_1 \cap E_2^C) + P(E_1^C \cap E_2)$

$= P(E_1)P(E_1^C) + P(E_1^C)P(E_2)$

E_1, E_2 లు స్వతంత్రాలు

$= \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{7}{20}$

9. **కలన గణితంలోని ఒక సమస్యను ఇద్దరు విద్యార్థులు A, B లకు ఇస్తే వారు సమస్యను సాధించే సంభావ్యతలు వరుసగా $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ వారిద్దరూ స్వతంత్రంగా సమస్యను సాధించడానికి ప్రయత్నిస్తే, ఆ సమస్య సాధించగల సంభావ్యత ఎంత?**

సాధన. A, B లతో సమస్య సాధించబడే ఘటనలు వరుసగా E_1, E_2 లు అనుకందాం

దత్తాంశం ప్రకారం

$P(E_1) = \frac{1}{3}, P(E_2) = \frac{1}{4}$

ఈ రెండు ఘటనలు, స్వతంత్ర ఘటనలని గమనిద్దాం కాబట్టి కావలసిన సంభావ్యత

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

(E_1, E_2 లు స్వతంత్రాలు)

$= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1).P(E_2)$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12}$

$= \frac{1}{2}$

18. **ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో A, B లు స్వతంత్ర ఘటనలైతే A^C, B^C లూ రెండూ స్వతంత్ర ఘటలని చూపండి.**

సాధన. A, B స్వతంత్ర ఘటనలు కాబట్టి

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ అప్పుడు

$P(A^C \cap B^C) = P\left\{(A \cup B)^C\right\}$

$$=1-P\left(A\cup B\right)$$

$$=1-\left\{P(A)+P(B)-P\left(A\cap B\right)\right\}$$

$$=1-\left\{P(A)+P(B)+P\left(A\cap B\right)\right\}$$

$$=\left[1-P(A)\right]\left[1-P(B)\right]=P(A^C)P(B^C)$$

A^C, B^C లు స్వతంత్ర ఘటనలు

10. **మూడు B_1, B_2, B_3 లలోని బంతులు క్రింద వివరించిన రంగులలో ఉన్నాయి.**

	తెల్లనివి	**నల్లనివి**	**ఎర్రనివి**
B_1	**2**	**1**	**2**
B_2	**3**	**2**	**4**
B_3	**4**	**3**	**2**

ఒక పాచికను దొర్లించారు పాచిక పై ముఖం పై 1లేదా 2 వస్తే B_1 ను ఎన్నుకొంటారు, 3 లేదా 4 వస్తే B_2ను ఎన్నుకొంటారు, 5 లేదా 6 వస్తే B_3 ను ఎన్నుకొంటారు. ఈ విధంగా ఒక పెట్టెను ఎన్నుకొన్నాక, అందులో నుంచి ఒక బంతిని యాదృచ్ఛికంగా ఎన్నుకొన్నారు. అలా ఎన్నుకొన్న బంతి ఎర్రనిదైతే అది పెట్టె B_2 నుంచివచ్చే సంభావ్యత ఎంత?

సాధన. పెట్టె B_i ను ఎన్నుకొనే సంభావ్యత

$P(E_i)(i=1,2,3)$ అనుకొందాం అప్పుడు

$$P(E_i)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3};\ i=1,2,3$$

పెట్టె B_i ను ఎన్నుకొన్నాక అనిదులో నుంచితీసిన బంతి ఎర్రనిదయ్యే సంభావ్యత $P\left(\frac{R}{E_i}\right)$ అనుకొంటే

$$P\left(\frac{R}{E_1}\right)=\frac{2}{5},\ P\left(\frac{R}{E_2}\right)=\frac{4}{9},\ P\left(\frac{R}{E_3}\right)=\frac{2}{9}$$

కనుక్కోవలసిన సంభావ్యత $P\left(\frac{E_2}{R}\right)$ బేయి సిద్ధాంతం నుంచి $P\left(\frac{E_2}{R}\right)=$

$$\frac{P(E_2)P\left(\frac{R}{E_2}\right)}{P(E_1)P\left(\frac{R}{E_1}\right)+P(E_2)P\left(\frac{R}{E_2}\right)+P(E_3)P\left(\frac{R}{E_3}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}}{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{2}{9}\right)} = \frac{\left(\frac{4}{27}\right)}{\left(\frac{18+20+10}{5\times 9\times 3}\right)} = \frac{5}{12}$$

11. ఒక పాత్రలో w తెల్లని b నల్లని బంతులున్నాయి. Q, R అనే ఇద్దరు ఆటగాళ్ళు పాత్ర నుంచి ఒకరి తరువాతఒకరు, తీసిన బంతిని తిరిగి భర్తీ చేస్తూ, బంతులను తోస్తున్నారు. తెల్లటి బంతి ఎవరుముందుగా తీస్తే వారు గెలిచినట్లు. Q ఆటను మొదలు పెడితే, Q గెలిచే సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

సాధన. తెల్లటి బంతిని తీసే ఘటన W తో, నల్లని బంతిని తీస్తే ఘటనను B తో సూచించామనుకోండి. అప్పుడు

$$P(W) = \frac{w}{w+b}, P(B) = \frac{b}{w+b}$$

Q గెలిచే సంభావ్యత (Q ముందుగా ఆటను మొదలు పెడితే)

$= P(W \;\; BBW \;\; BBBBW$ లేదా$)$

$= P(W) + P(BBW) + P(BBBBW) + ...$

$= P(W) + P(B)P(B)P(W) + P(B)P(B)P(B)\,P(B)P(W) + ...$

$= P(W)\left[1 + P(B)^2 + P(B)^4 + ...\right]$

$$= \frac{P(W)}{1-P(B)^2} = \frac{\frac{w}{w+b}}{1-\left(\frac{b}{w+b}\right)^2} = \frac{w+b}{w+2b}$$

12. సంభావ్యతల సంకలన సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి, నిరూపించుము.

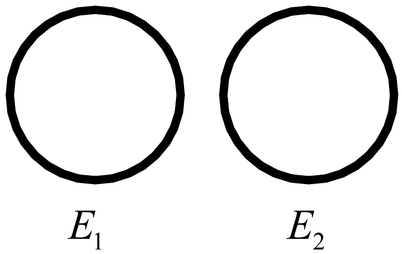
సాధన. సంభావ్యతల సంకలన సిద్ధాంతము. ఒక యాదృచ్ఛికప్రయోగంలో E_1, E_2 లు ఏవైనా రెనిడు ఘటనలైతే

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

నిరూపణ.

$case\,(i): E_1 \cap E_2 = \phi$ అనుకొందాం

$\Rightarrow P(E_1 \cap E_2) = P(\phi) = 0$



సమ్మేళన స్వీకృతం నుండి

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

$= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

$[P(E_1 \cap E_2) = 0]$

$Case(ii): E_1 \cap E_2 \neq \phi$ అనుకొందాం

అప్పుడు $E_1 \cup E_2 = E_1 \cup (E_2 - E_1)$

మరియు $E_1 \cap (E_2 - E_1) = \phi$

$P(E_1 \cup E_2) = P[E_1 \cup (E_2 - E_1)]$

$= P(E_1) + P(E_2 - E_1)$

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2 - E_1) ......(1)$

ఇప్పుడు $E_2 = [(E_1 \cap E_2) \cup (E_2 - E_1)]$

మరియు $(E_1 \cap E_2) \cap (E_2 - E_1) = \phi$

కనుక $P(E_2) = P[(E_1 \cup E_2) \cup (E_2 - E_1)]$

$\Rightarrow P(E_2) = P(E_1 \cup E_2) + P(E_2 - E_1)$

$P(E_2 - E_1) = P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) ....(2)$

కాబట్టి (1), (2) ల నుంచి

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

13. నియత సంభావ్యత ను నిర్వచింపుము. సంభావ్యత గుణన సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి నిరూపించుము.

సాధన. నియతసంభావ్యత

ఒక యాదృచ్ఛికప్రయోగంలో ఘటన $A, P(A) > 0$ అయితే ఆ ప్రయోగంలో ఏదైనా ఘటన E యొక్క నియతసంభావ్యత $P\left(\frac{E}{A}\right)$ ను $P\left(\frac{E}{A}\right) = P\frac{(E \cap A)}{P(A)}$ అని నిర్వచిస్తాం

దీనినే ఘటన E యొక్క షరతు సంభావ్యత లేదా సాపేక్ష సంభావ్యత అంటాం.

సంభావ్యతా గుణన సిద్దాంత ప్రవచనము

$(Multiplication\, theorem\, of\;\, probability)$

ఒక యాదృచ్ఛికము ప్రయోగములో E_1, E_2 లు రెండు ఘటనలు మరియు $P(E_1) \neq 0, P(E_2) \neq 0$ అయిన

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1).P\left(\frac{E_2}{E_1}\right) \text{ లేదా}$$

$$P(E_2 \cap E_1) = P(E_2).P\left(\frac{E_1}{E_2}\right)$$

నిరూపణ. యాదృచ్ఛిక ప్రయోగములో E_1, E_2 లు రెండు ఘటనలు $P(E_1) \neq 0, P(E_2) \neq 0$

$P(E_1) \neq 0$ నియత సంభావ్యతా నిర్వచనము నుండి $P\left(\frac{E_2}{E_1}\right) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}$

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1).P\left(\frac{E_2}{E_1}\right)$$

మరియు $P(E_2) \neq 0$ కనుక

$$P\left(\frac{E_1}{E_2}\right) = \frac{P(E_2 \cap E_1}{P(E_2)}$$

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_2).P\left(\frac{E_1}{E_2}\right)$$