ప్రస్తారాలు, సంయోగాలు

అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. $^{n}P_3 = 1320$ **అయితే** n **విలువ కనుక్కోండి.**

జ: ఇచ్చినది $^{n}P_3 = 1320$

$\Rightarrow n(n-1)(n-2) = 12 \times 11 \times 10$

రెండు వైపులా గల గరిష్ఠ పూర్ణాంకాలను సరిపోలిస్తే

$n = 12$

2. $^{12}P_5 + 5.{}^{12}P_4 = {}^{13}P_r$ **అయితే** r **విలువ ఎంత?**

జ: $^{n}P_r = {}^{(n-1)}P_r + r.{}^{(n-1)}P_{r-1}$

$\therefore {}^{12}P_r = 5.{}^{12}P_4 = {}^{13}P_r$

$\Rightarrow {}^{13}P_5 = {}^{13}P_r$

$\therefore r = 5$

3. **ఒక వ్యక్తికి నలుగురు కొడుకులున్నారు. అతడికి అందుబాటులో 5 పాఠశాలలున్నాయి. ఏ ఇద్దరు పిల్లలు ఒకే పాఠశాలలో లేకుండా ఆ వ్యక్తి తన పిల్లలను ఎన్ని విధాలుగా పాఠశాలల్లో చేర్చవచ్చు?**

జ: మొదటి కొడుకును, ఉన్నవి 5 పాఠశాలలు కనుక 5 విధాలుగా చేర్పించవచ్చు. రెండవ వాడిని 4 పాఠశాలల్లో 4 విధాలుగా చేర్పించవచ్చు. ఈ విధంగా కొనసాగించగా, ఏ ఇద్దరు పిల్లలు ఒకే పాఠశాలలో లేకుండా ఒక వ్యక్తి తన నలుగురు కొడుకులను 5 పాఠశాలల్లో చేర్చే విధాల సంఖ్య

$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 = {}^{5}P_4 = 120$

4. **5 విభిన్న గణిత పుస్తకాలు, 4 విభిన్న భౌతికశాస్త్ర పుస్తకాలు, 3 విభిన్న రసాయనశాస్త్ర పుస్తకాలను ఒక వరసలో ఒక శాస్త్రానికి సంబంధించిన పుస్తకాలన్నీ ఒకే చోట కలిసి ఉండేలా ఎన్ని రకాలుగా అమర్చవచ్చు?**

జ: విభిన్న గణిత పుస్తకాల సంఖ్య = 5

విభిన్న భౌతికశాస్త్ర పుస్తకాల సంఖ్య = 4

విభిన్న రసాయనశాస్త్ర పుస్తకాల సంఖ్య = 3

గణిత పుస్తకాలు ఒక యూనిట్, భౌతికశాస్త్ర పుస్తకాలు ఒక యూనిట్, రసాయనశాస్త్ర పుస్తకాలు ఒక యూనిట్ అనకుందాం. మూడు యూనిట్లను ఒక వరుస క్రమములో 3! విధాలుగా అమర్చవచ్చు.

5 విభిన్న గణత పుస్తకాలను $5!$ విధాలుగా అమర్చవచ్చు. 4 విభిన్న భౌతికశాస్త్ర పుస్తకాలను $4!$ విధాలుగా అమర్చవచ్చు.

3 విభిన్న రసాయనశాస్త్ర పుస్తకాలను $3!$ విధాలుగా అమర్చవచ్చు.

$\therefore$ ప్రాథమిక గణన సూత్రం నుండి పుస్తకాలన్నీ ఒకేచోట కలిసి ఉండేలా అమర్చే విధాల సంఖ్య

$= 3! \times 5! \times 4! \times 3!$

$= 6 \times 120 \times 21 \times 6 = 1,03,680$

5. ${}^{n}P_7 = 42.\ {}^{n}P_5$**, అయితే ఎంత** (May 11, 07)

సాధన: ${}^{n}P_7 = (42).\ {}^{n}P_5$

$\Rightarrow (n)(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$

$= 42(n)(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$

$\Rightarrow (n-5)(n-6) = 42$

$\Rightarrow (n-5)(n-6) = 7 \times 6$

$\Rightarrow n-5 = 7$ లేదా $n-6 = 6$

$\Rightarrow n = 12$

6. ${}^{(n+1)}P_5 : {}^{n}P_6 = 2:7$ **అయితే** n **విలువ కనుక్కోండి.** (Mar 07)

సాధన: ${}^{(n+1)}P_5 : {}^{n}P_6 = 2:7$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)_{P_5}}{n_{p_6}} = \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)!}{(n+1-5)!} \times \frac{(n-6)!}{n!} = \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)}{(n+1-5)} = \frac{2}{7}$$

$\Rightarrow 2(n^2 - 9n + 20) = 7n + 7$

$\Rightarrow 2n^2 - 22n - 3n + 33 = 0$

$\Rightarrow 2n(n-11) - 3(n-11) = 0$

$\Rightarrow (n-11)(2n-3) = 0$

$\Rightarrow n = 11$ లేదా $n = \dfrac{3}{2}$

$\because n$ ధన పూర్ణాంకం కనుక $n = 11$

7. $^{18}P_{r-1} : {}^{17}P_{r-1} = 9:7$ **,అయితే r విలువను కనుక్కోండి.**

సాధన: $^{18}P_{r-1} : {}^{17}P_{r-1} = 9:7$

$$\Rightarrow \frac{^{18}P_{(r-1)}}{^{17}P_{(r-1)}} = \frac{9}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{(18)!}{[18-(r-1)]!} \times \frac{[17-(r-1)]!}{17!} = \frac{9}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{18!}{(19-r)!} \times (18-r)! = \frac{9}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{18}{19-r} = \frac{9}{7}$$

$$\Rightarrow 19-r = 14$$

$$\Rightarrow r = 5$$

8. **ఒక రైల్వే లైనులో 25 స్టేషన్లున్నాయి. ఈ స్టేషన్లలో ఒక సేషన్ నుంచి మరొక స్టేషన్‌కు వెళ్ళడానికి అనుమతించేలా ఎన్ని విభిన్న రకాల రెండో తరగతి టిక్కెట్లు ముద్రించాలి ?**

సాధన: రైల్వే లైనులో గల స్టేషన్‌ల సంఖ్య = 25

ఒక స్టేషన్‌కు వెళ్లడానికి అనుమతించే రెండో తరగతి టిక్కెట్ల సంఖ్య

$^{25}P_r = 25 \times 24 = 600$

9. **ఒక తరగతిలో 30 మంది విద్యార్థులున్నారు. ప్రతీ విద్యార్థి తన సహాధ్యాయులకు ఒక్కొక్కరికి నూతన సంవత్సర శుభాకాంక్షలతో ఒక కార్డు చొప్పున పంపిచాలంటే మొత్తం ఎన్ని కార్డులు కావాలి ?**

సాధన: తరగతిలో విద్యార్థుల సంఖ్య

ప్రతీ విద్యార్థి తన సహాధ్యాయులకు ఒక్కొక్కరికి నూతన సంవత్సర శుభాకాంక్షలతో ఒక కార్డు వంతున పంపించాలంటే కావలసిన కార్డుల సంఖ్య

= $^{30}P_2 = 30 \times 29 = 870$

10. ప్రతీ అక్షరాన్ని ఎన్నిసార్లైనా వాడుకొనే పద్ధతిలో RHYME పదం లోని అక్షరాలతో 5 అక్షరాల పదాలు ఎన్ని ఏర్పరచవచ్చు ?

సాధన: RHYME పదంలో 5 అక్షరాలున్నవి.

X	X	X	X	X
5	5	5	5	5

5 అక్షరాలలో పునరావృతాన్ని అనుమతించినపుడు ఏర్పడే 5 అక్షరాల పదాల సంఖ్య

$= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

$= 5^5 = 3,125$

11. 1, 2, 3, 4, 5, 6 అంకెలనుపయోగించి, కనీసం ఒక అంకె అయినా పునరావృతం అయ్యేలా ఎన్ని 4 అంకెల టెలిఫోన్ నెంబర్లు ఏర్పరచవచ్చు ?

సాధన: 6 అంకెలనుపయోగించి పునరావృతాన్ని అనుమతించిపుడు ఏర్పడే 4 అంకెల సంఖ్యలు $= 6^4$

పునరావృతం లేనపుడు ఏర్పడే 4 అంకెల సంఖ్యలు ${}^6P_4$ కనీసం ఒక అంకె అయినా పునరావృతం అయ్యేలా ఏర్పడే 4 అంకెలున్న టెలిఫోన్ నెంబర్లు $= 6^4 - {}^6P_4$

$= 1296 - 360 = 936$

12. ఒక అక్షరమాలలోని 9 విభిన్న అక్షరాల నుపయోగించి 4 అక్షరాల పదాలు ఏర్పరిస్తే వాటిలో ఎన్ని పదాలలో

i) **అక్షరాలు పునరావృతం కాకుండా ఉంటాయి**

ii) **కనీసం ఒక అక్షరం పునరావృతం అవుతుంది.**

సాధన: i) పునరావృతం కాకుండా 9 విభిన్న అక్షరాల నుండి 4 అక్షరాలతో ఏర్పడే పదాల సంఖ్య

పునరావృతాన్ని అనుమతిస్తే 9 విభిన్న అక్షరాల నుండి అక్షరాలతో ఏర్పడే పదాల సంఖ్య $= {}^9P_4$

$= 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3,024$

ii) పునరావృతాన్ని అనుమతిస్తే 9 విభిన్న అక్షరాల నుండి 4 అక్షరాలలో ఏర్పడే పదాల సంఖ్య

$= 9^4 = 6561$

$\therefore$ కనీసం ఒక అక్షరం పునరావృతం అయ్యే విధంగా 9 విభిన్న అక్షరాల నుండి 4 అక్షరాలలో ఏర్పడే పదాల సంఖ్య

$= 9^4 - {}^9P_4$

$= 6561 - 3024 = 3,537$

13. **0, 1, 2, 3, 4, 5 అంకెలనుపయోగించి వాడిన అంకెను ఎన్నిసార్లైన వాడుతూ 6 తో భాగింపబడే 4 అంకెల సంఖ్యలు ఎన్ని ఏర్పరచవచ్చు ?**

సాధన: మొదటి స్థానాన్ని (వేల స్థానాన్ని) సున్నాలో నింపకూడదు. కనుక ఆ స్థానాన్ని 1 లేదా 2 లేదా 3 లేదా 4 లేదా 5 తో నింపాలి. ఈ పనిని 5 విధాలుగా చేయవచ్చును.

సంఖ్య 6తో భాగింపబడాలి కనుక యూనిట్ స్థానంలో '0' మాత్రమే ఉండాలి. (ఇచ్చిన అంకెల నుండి) ఎందుకనగా ఇది 2 మరియు 3 చే భాగింపబడాలి కనుక.

$\therefore$ ఒకట్ల స్థానాన్ని (యూనిట్) నింపే విధాల సంఖ్య = 1 మిగిలిన రెండు స్థానాలను నింపటానికి 6 × 6 విధాలున్నవి. కనుక 0, 1, 2, 3, 4, 5 అంకెలును ఉపయోగిస్తూ 6 తో భాగింపబడే 4 అంకెలున్న సంఖ్యలు

$= 5 \times 1 \times 6 \times 6 = 180$

14. **6 వేర్వేరు రంగుల పూసలలో ఎన్నిరకాలుగా గొలుసులు తయారు చేయవచ్చు ?** (Mar 08)

సాధన: n విభిన్న వస్తువులతో ఏర్పరచగల వేలాడే రకం వృత్తాకార ప్రస్తారాల సంఖ్య $= \frac{1}{2}(n-1)!$

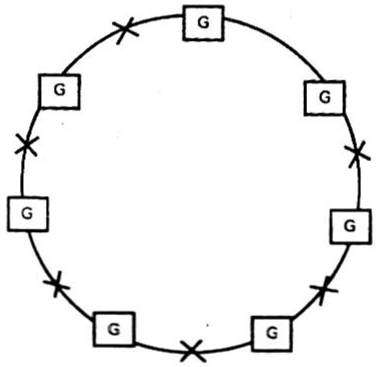
కనక ఇచ్చిన 6 వేర్వేరు రంగుల పూసలతో ఏర్పరచగల గొలుసుల సంఖ్య $= \frac{1}{2}(6-1)!$

$= \frac{1}{2} \times 120 = 60$

15. **ఏడుగురు పురుషులు, నలుగురు స్త్రీలను ఒక గుండ్రని బల్ల చుట్టూ ఏ ఇద్దరు స్త్రీలు పక్క పక్కన లేకుండా ఎన్ని రకాలుగా అమర్చవచ్చు** (May 07)

సాధన: ఏడుగురు పురుషులు ఒక గుండ్రని బల్ల చుట్టూ కూర్చునే విధాల సంఖ్య $(7-1)! = 6!$

వీరిలో ప్రతి ఇద్దరు పురుషుల మధ్య ఒక్కో ఖాళీ వంతున మొత్తం 7 ఖాళీలు ఉంటాయి. ఈ ఖాళీలను 'x' తో గుర్తించటం జరిగింది.



ఇపుడు ఈ ఖాళీలలో నలుగురు స్త్రీలను అమర్చే విధానాలు ${}^7P_4$

$\therefore$ ఏ ఇద్దరు స్త్రీలు పక్క పక్కనలేని వృత్తాకార ప్రస్తారాల సంఖ్య $= 6! \times {}^7P_4$

$= (720)(7\times 6\times 5\times 4) = 6,04,800$

16. విభిన్నంగా ఉన్న 3 పసుపు, 4 తెలుపు 2 ఎరుపు గులాబిలలో ఎర్ర గులాబీలు కలిసి ఉండేలా ఎన్ని దండలు తయారు చేయవచ్చు ?

సాధన: రెండు ఎర్రని గులాబీలను ఒక యునిట్ అనుకుందాం. అపుడు 3 పసుపు రంగు, 4 తెలుపు రంగు గులాబీలు.

ఒక యేనిట్‌లో వున్న రెండు ఎర్ర గులాబీలు మొత్తం 8 అవుతాయి. ఈ ఎనిమిదింటిలో ఏర్పడే వృత్తాకార ప్రస్తారాల సంఖ్య $= (8-1)! = (7)!$

ఇపుడు ఒక యూనిట్‌లో వున్న రెండు ఎర్ర గులాబీలను వాటిలో వాటిని $2!$ విదాలుగా అమర్చవచ్చు.

కనుక వృత్తాకార ప్రస్తారాల సంఖ్య $= (7)! \times 2!$

కాని పువ్వుల దండలు వేలాడే వృత్తాకార ప్రస్తారాల కోవలోకి వస్తాయి. కనుక కావలసిన ప్రస్తారాల సంఖ్య

$= \frac{1}{2}(7! \times 2!) = 7! = 5,040$

17. పునరావృతాన్ని అనుమతించినప్పుడు 1, 2, 4, 5, 7, 8 అంకెలనువయోగించి ఎన్ని 4 అంకెల సంఖ్యలు ఏర్పరచవచ్చును.

జ: దత్త అంకెలు = 1, 2, 4, 5, 7, 8

పునరావృతం అనుమతించగా, 4 అంకెల సంఖ్యలోని ప్రతి స్థానాన్ని ఇచ్చిన 6 అంకెలతో 6 విధాలుగా నింపవచ్చు.

$\therefore$ ప్రాథమిక గణన సూత్రం నుండి, ఇచ్చిన అంకెలతో ఏర్పడే 4 అంకెల సంఖ్యలు $= 6\times 6\times 6\times 6 = 6^4$

= 1296

18. 7 మూలకాలున్న సమితి A నుంచి అదే సమితికి ఎన్ని ద్విగుణ ప్రమేయాలు నిర్వచించవచ్చు?

జ: 7 మూలకాలున్న A సమితిని $\{a_1, a_2, ...a_7\}$ అనుకొందాము. ద్విగుణ ప్రమేయము కనుక, 'a_1' కు ప్రతిబింబాన్ని 7 విధాలుగా ఎన్నుకోవచ్చు. 'a_2' ప్రతిబింబాన్ని 6 విధాలుగా ఎన్నుకోవచ్చు. అలా కొనసాగగా 'a_7' ప్రతిబింబాన్ని ఒకే ఒక విధంగా ఎనుకోగలము.

$\therefore$ కావలసిన ద్విగుణ ప్రమేయాల సంఖ్య

$= 7 \times 6 \times 5 \times ...... \times 1 = 7! = 5040$

19. ఇచ్చిన 'n' అసరూప వస్తువుల నుంచి 'r' వస్తువులతో ఏర్పరచగల ప్రస్తారాలలో ఎన్నింటిలో కనీసం ఒక వస్తువు పునరావృతం అవుతుంది?

జ: పునరావృతం అనుమతించినపుడు 'n' అసరూప వస్తువుల నుంచి 'r' వస్తువులతో ఏర్పరచగల ప్రస్తారాలు $= n^r$

పునరావృతం అనుమతించనపుడు, 'n' అసరూప వస్తువుల నుంచి 'r' వస్తువుతో ఏర్పరచగల ప్రస్తారాలు $= {}^nP_r$

$\therefore$ 'n' అసరూప వస్తువుల నుంచి 'r' వస్తువులతో ఏర్పరచగల ప్రస్తారాన్నింటిలో కనీసం ఒక వస్తువు పునరావృతం అయ్యే సంఖ్య $= n^r - {}^nP_r$

20. పునరావృతాన్ని అనుమతించినప్పుడు $NATURE$ పదంలోని అక్షరాలను ఉపయోగించి ఏర్పచగల 5 అక్షరాల పదాలలో ఎన్ని పదాలు N తో మొదలవుతాయి?

జ: ఇచ్చిన 6 అంకెల పదం = '$NATURE$'

5 అక్షరాల పదం 'N' తో మొదలవుతుంది. పునరావృతం అనుమతించుట వలన మిగిలిన 4 స్థానాలలో ఒక్కొక్క స్థానాన్ని 6 విధాలుగా నింపవచ్చు.

$\therefore$ ప్రాథమిక గణన సూత్రం ప్రకారం 'N' తో మొదలయ్యే 5 అక్షరాల పదాలు $= 6^4 = 1296$

21. పునరావృతాన్ని అనుమతించినప్పుడు 0, 1, 2, 3, 4, 5 అంకెలతో ఏర్పరచగల 5 అంకెల సంఖ్యలలో 5 తో భాగించబడేవి ఎన్ని?

జ: ఇచ్చిన అంకెలు = 0, 1, 2, 3, 4, 5

పునరావృతం అనుమతించుట వలన 5 అంకెల పదంలోని పదివేల స్థానాన్ని 5 విధాలుగా నింపవచ్చు. ఇది 5 చే భాగించబడుతుంది కనుక ఒకట్ల స్థానాన్ని 2 విధాలుగా (0, లేక 5) తో నింపవచ్చు. మిగిలిన 3 స్థానాలలో ఒక్కొక్క స్థానాన్ని 6 విధాలుగా నింపవచ్చు.

$\therefore$ ప్రాథమిక గణన సూత్రం ప్రకారం, ఇచ్చిన అంకెలతో 5 చే భాగింపబడే 5 అంకెల సంఖ్య

$= 5 \times 2 \times 6^3 = 2160$

22. పునరావృతాన్ని అనుమతించినప్పుడు 1, 2, 3, 4 అంకెలను ఉపయోగించి 2000 కన్నా తక్కువగా ఉన్న 4 అంకెల సంఖ్యలెన్ని ఏర్పరచవచ్చు?

జ: ఇచ్చిన అంకెలు = 1, 2, 3, 4

$\therefore$ ఒక అంకె సంఖ్యల సంఖ్య = 4

పునరావృతం అనుమతించుట వలన 2 అంకెల సంఖ్యల సంఖ్య $4^2 = 16$

పునరావృతం అనుమతించుట వలన 3 అంకెల సంఖ్యల సంఖ్య $4^3 = 64$

2000 కన్నా తక్కువగా ఉన్న 4 అంకెల సంఖ్యలోని వేల స్థానం కేవలం ఒకే విధంగా నింపగలము. పునరావృతం అనుమతించుట మిగిలిన 3 స్థానాలను, ఒక్కొక్క దానిని 4 విధాలుగా నింపవచ్చు. కనుక 4 అంకెల సంఖ్యలు = $4^3 = 64$

$\therefore$ ఇచ్చిన అంకెలతో 2000 కన్నా తక్కువగా ఉన్న 4 అంకెల సంఖ్యలు = 4 + 16 + 64 + 64 = 148

23. క్రింది పదాలలోని అక్షరాలను అమర్చడం ద్వారా వచ్చే ప్రస్తారాల సంఖ్యలను కనుక్కోండి.

i) INDEPENDENCE

ii) MATHEMATICS

vi) INTERMEDIATE

సాధన: i) INDEPENDENCE పదంలో 12 అక్షరాలున్నవి. అందు 3N లు, 2D లు, 4E లు మిగిలినది విభిన్నాలు.

కనుక వాటిని అమర్చడం ద్వారా వచ్చే ప్రస్తారాల సంఖ్య $= \dfrac{(12)!}{3!\,2!\,4!}$

ii) MATHEMATICS అనే పదంలో 11 అక్షరాలున్నవి. అందు 2M లు , 2A లు , 2T లు మిగిలినది విభిన్నాలు.

కనుక వాటిని అమర్చడం ద్వారా వచ్చే ప్రస్తారాల సంఖ్య $= \dfrac{(11)!}{2!2!2!}$

vi) INTERMEDIATE పదంలో 12 అక్షరాలున్నవి. అందు 2I లు 2T లు 3E లు మిగిలినవి విభిన్నాలు.

కనుక వాటిని అమర్చడం ద్వారా వచ్చే ప్రస్తారాల సంఖ్య $= \dfrac{(12)!}{2!2!3!}$

24. 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4. అంకెలతో ఏర్పరచగల 7 అంకెల సంఖ్యలెన్ని

సాధన: ఇచ్చిన 7 అంకెలతో 2లు మూడుసార్లు, 3లు రెండుసార్లు, 4లు రెండు సార్లు పునరావృతం అయ్యాయి.

కనుక ఈ 7 అంకెలతో ఏర్పడే 7 అంకెలన్న సంఖ్యలు $=\frac{7!}{3!\,2!\,2!}$

25. ఒక పుస్తక భాండాగారంలో 'n' విబిన్న పుస్తకాలు ఒక్కొక్కటి 'm' ప్రతులున్నాయి. ఈ పుస్తకాలన్నిటినీ ఒక వరసలో ఎన్ని విధాలుగా అమర్చవచ్చు ?

సాధన: పుస్తక భాండాగారంలో పుస్తకాల సంఖ్య $= m \times n = mn$

$\therefore$ పుస్తకాలన్నింటిని ఒక వరుసలో అమర్చే విధాల సంఖ్య

$=\frac{(mn)!}{(m!)^n}$

26. CHEESE పదంలోని అక్షరాలను ఏ రెండు E లు పక్క పక్కన రాకుండా ఎన్ని రకాలుగా అమర్చవచ్చు ?

సాధన: CHEESE పదంలో 6 అక్షరాలున్నవి. అందు 3E లు మిగిలినవి విభిన్నాలు. 3E లలో ఏ రెండు పక్క పక్కన రాకూడదు. కనుక మిగిలిన 3 అక్షరాలను ఒక వరుసలో 3! విధాాఅమర్చవచ్చు. ఆ తరువాత వాటి మధ్యలో మొదట, చివర కలిపి 4 ఖాళీలుంటాయి. ఈ 4 ఖాళీలలో 3E లను

$\frac{^4P_3}{3!}=\frac{4!}{3!}=4$ విధాలుగా అమర్చవచ్చు. కనుక కావలసిన ప్రస్తారాల సంఖ్య

$=(3!)\times 4$

27. ఏడుగురు వ్యక్తులను ఒక వృత్తాకార బల్ల చుట్టూ అమర్చే విధానాల సంఖ్య కనుక్కోండి

జ: 'n' అసరూప వస్తువులన్నింటినీ ఉపయోగించి ఏర్పరచగల వృత్తాకార ప్రస్తారాల సంఖ్య $(n-1)!$

కనుక 7 గురు వ్యక్తులను ఒక వృత్తాకార బల్ల చుట్టూ అమర్చే విధానాల సంఖ్య

$(7-1)!=6!=720$

28. ఒక రాష్ట్రంలో 10 మంది మంత్రులను, ముఖ్యమంత్రిని ఒక గుండ్రని బల్ల చుట్టూ ముఖ్యమంత్రి ఎప్పుడూ నిర్థేశించిన స్థానంలో మాత్రమే ఉండేలా ఎన్ని రకాలుగా అమర్చవచ్చు?

జ: ముఖ్యమంత్రి నిర్ద్రేశించిన స్థానంలో మాత్రమే ఉండాలి కనుక ఆయనను 1 విధంగా అమర్చవచ్చు

10 మంది మంత్రులను 10 స్థానాలలో 10! విధాలుగా అమర్చవచ్చు.

$\therefore$ ప్రాథమిక గణన సూత్రం నుండి అమరికల సంఖ్య

$=1\times 10!=10!$

29. నలుగురు బాలురు, ముగ్గురు బాలికలను ఒక వృత్తం చుట్టూ బాలికలంతా ఒకే చోట ఉండేలా ఎన్ని రకాలుగా అమర్చవచ్చు.

జ: ముగ్గురు బాలికలను 1 యూనిట్ అనుకుందాము. ఈ యూనిట్ నలుగురు బాలురతో కలిసి 5 వ్యక్తులనుకుంటే, వృత్తాకార ప్రస్తారాలు $(5-1)!=4!$

ముగ్గురు బాలికలను వారిలో వారిని విధాలుగా అమర్చవచ్చు.

$\therefore$ ప్రాథమిక బాలికలను సూత్రం నుండి, కావలసిన ప్రస్తారాలు $=3!\times 4!=144$

30. ఒక గృహస్థుడిని, ఏడుగురు అతిథులను ఒక గుండ్రటి బల్ల చుట్టూ నిర్ధేశించిన ఇద్దరు అతిథులు గృహస్థునికి ఇరుపక్కలా ఉండేలా ఎన్ని రకాలుగా అమర్చవచ్చు

జ: అతిథుల సంఖ్య = 7

నిర్ధేశించిన ఇద్దరు అతిథులు గృహస్థుడి ఇరుపక్కలా ఉండాలి. కనుక, ఈ ఇద్దరిని గృహస్థుడితో కలిపి ఒక యూనిట్ అనుకుందాము.

ఈ యూనిట్ మిగిలిన 5 అతిథులతో 6 వ్యక్తులనుకుందాము.

ఈ ఆరుగురుని గుండ్రటి బల్ల చుట్టూ అమర్చగల ప్రస్తారాల సంఖ్య = $(6-1)!=5!$

నిర్ధేశించిన ఇద్దరు అతిథులను, గృహస్థుడి ఇరువైపులా $2!$ విధాలుగా అమర్చవచ్చు.

$\therefore$ కావలసిన ప్రస్తారాలు సంఖ్య $=5!\times 2!=240$

31. 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1 అంకెలను ఉపయోగిస్తూ, సరి స్థానాలలో సరి అంకెలు మాత్రమే ఉండేటట్లు ఎన్ని 7 అంకెల సంఖ్యలు తయారుచేయవచ్చు.

జ: ఇచ్చిన అంకెలు = 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1

7 అంకెల సంఖ్యలో మూడు సరిస్థానాలు ఉంటాయి. ఇచ్చిన అంకెలలో సరి అంకెలు = 2, 2, 4

వీటిని 3 సరి స్థానాలలో $\frac{3!}{2!}=3$ విధాలుగా అమర్చవచ్చు. మిగిలిన 4 స్థానాలలో 1, 3, 3, 1 లను అమర్చే విధాల సంఖ్య

$=\frac{4!}{2!2!}=6$

$\therefore$ ప్రాథమిక గణన సూత్రం నుండి కావలసిన ప్రస్తారాల సంఖ్య $=3\times 6=18$

32. ఒక గ్రంథాలయంలో ఒక పుస్తకానికి 6 ప్రతులు, మరొక రెండు విభిన్నమైన పుస్తకాలకు ఒక్కో దానికి 4 ప్రతులు, వేరొక మూడు విభిన్నమైన పుస్తకాలకు ఒక్కోదానికి 5 ప్రతులు, ఇంకో రెండు విభిన్నమైన పుస్తకాలు ఒక్కొక్కదానికి 3 ప్రతులు ఉన్నాయి. ఈ పుస్తకాలన్నిటినీ ఒక వరసలో ఎన్ని విధాలుగా అమర్చవచ్చు?

జ: గ్రంథాలయంలో ఒక పుస్తకానికి 6 ప్రతులు, మరొక రెండు విభిన్నమైన పుస్తకాలకు ఒక్కోదానికి 4 ప్రతులు, వేరొక మూడు విభిన్నమైన పుస్తకాలకు ఒక్కోదానికి 5 ప్రతులు, ఇంకో రెండు విభిన్న పుస్తకాలను ఒక్కోదానికి 3 ప్రతులు ఉన్నాయి.

$\therefore$ పుస్తకాల మొత్తము = 6 + 4 (2) + 5(3) + 3(2) = 35

$\therefore$ పుకాలన్నింటిని ఒక వరసలో అమర్చే విధాల సంఖ్య

$$= \frac{35!}{6!\times 4!\times 4!\times 5!\times 5!\times 5!\times 3!\times 3!}$$

$$= \frac{35!}{6!.(4!)^2.(5!)^3.(3!)^2}$$

33. 0, 1, 1, 2, 3 అంకెలన్నిటినీ ఉపయోగించి ఏర్పరచగల 5 అంకెల సంఖ్యలెన్ని?

జ: ఇచ్చిన అంకెలు = 0, 1, 1, 2, 3

'5' అంకెల సంఖ్యలోని, పదివేల స్థానాన్ని 4 విధాలుగా అమర్చవచ్చు. మిగిలిన 4 స్థానాలను మిగిలిన 4 అంకెలతో అమర్చే విధానల సంఖ్య $= 4!$

$\therefore$ నాలుగు అంకెల ప్రస్తారాలు $= 4\times 4!$

కానీ ప్రతీ అమరికలో రెండు '1' లు ఉన్నాయి కనుక, ఇచ్చిన అంకెలతో ఏర్పరచగల 5 అంకెల సంఖ్యలు

$$= \frac{4\times 4!}{2!} = 48$$

34. ${}^{n}C_4 = 210$ **అయితే** n **విలువ ఎంత?**

జ: ${}^{n}C_4 = 210$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = 210$$

$$\Rightarrow n(n-1)(n-2)(n-3) = 4!\times 210$$

$$= 24\times 210$$

$$= 7\times 8\times 9\times 10$$

ఇరువైపులా పూర్ణాంకాలను పోల్చగా $n = 10$

35. ${}^{12}C_r = 495$ **అయితే** $'r'$ **విలువ కనుక్కోండి**

${}^{12}C_r = 495$

$= 11 \times 9 \times 5$

$= \dfrac{12 \times 11 \times 9 \times 10}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$

$\Rightarrow {}^{12}C_r = {}^{12}C_4$ లేదా ${}^{12}C_8$

$\Rightarrow r = 4$ లేదా 8

36. ${}^{n}C_4 = {}^{n}C_6$ **అయితే** n **ఎంత?**

జ: ${}^{n}C_4 = {}^{n}C_6$

${}^{n}C_r = {}^{n}C_s$ అయితే $r = s$ లేదా $r + s = n$

$\therefore n = 4 + 6 \Rightarrow n = 10$

37. ${}^{15}C_{2r-1} = {}^{15}C_{2r+4}$ **అయితే** r **విలువ కనుక్కోండి**

జ: ${}^{15}C_{2r-1} = {}^{15}C_{2r+4}$

${}^{n}C_r = {}^{n}C_s$ అయితే $r = s$ లేదా $r + s = n$

$\therefore 2r - 1 = 2r + 4$ లేదా $2r - 1 + 2r + 4 = 15$

ఇది సాధ్యముట

$\Rightarrow 4r + 3 = 15$

$\Rightarrow r = 3$

$\therefore r = 3$

38. ${}^{17}C_{2t+1} = {}^{17}C_{3t-5}$ **అయితే** t **విలువ ఎంత?**

జ: ${}^{17}C_{2t+1} = {}^{17}C_{3t-5}$

${}^{n}C_r = {}^{n}C_s$ అయితే $r = s$ లేదా $n = r + s$

$\therefore 2t + 1 = 3t - 5$ లేదా $2t + 1 + 3t - 5 = 17$

$\Rightarrow t = 6 \qquad \Rightarrow 5t = 21$

$\Rightarrow t = \dfrac{21}{5}$

$'t'$ పూర్ణాంకము కనుక $t = 6$

39. ఆరుగురు పురుషులు, ముగ్గురు స్త్రీల నుంచి అయిదుగురు సభ్యులున్న కమిటీలు ఎన్ని ఏర్పరచవచ్చు?

జ: ఆరుగురు పురుషులు, ముగ్గురు స్త్రీలు (మొత్తం 9 మంది) నుండి అయిదుగురు సభ్యులున్న కమిటీని ఏర్పరుచుకొనే విధానాలు $^{9}C_5 = 126$

40. 10 వ ప్రశ్నలో కనీసం ఇద్దరు స్త్రీలు ఉండే కమిటీలు ఎన్ని?

జ: ఆరుగురు పురుషులు, ముగ్గురు స్త్రీల నుండి అయిదుగురు సభ్యులున్న కమిటీలో కనీసం ఇద్దరు స్త్రీలు ఉండేటట్లుగా కమిటీలను ఈ క్రింది విధంగా ఎన్నుకోవచ్చు.

సందర్భం (1) కమిటీలో ఇద్దరు స్త్రీలు ఉన్నట్లయితే:

ముగ్గురు స్త్రీల నుండి ఇద్దరిని ఎన్నుకొనే విధానాల సంఖ $= {}^{3}C_2$

మిగిలిన ముగ్గురిని ఆరుగురు పురుషుల నుండి ఎన్నకొనే విధానల సంఖ్య $= {}^{6}C_3$

$\therefore$ ప్రాథమిక గణన సూత్రం నుండి, అయిదుగురు సభ్యులలో ఇద్దరు స్త్రీలు, ముగ్గురు పురుషులు ఉండేటట్లుగా కమిటీలను ఎన్నకొనే విధానాలు $= {}^{3}C_2 \times {}^{6}C_3 = 60$

సందర్భం (2) కమిటీలో ముగ్గురు స్త్రీలు ఉన్నట్లయితే:

ముగ్గురు స్త్రీల నుండి ముగ్గురు స్త్రీలను ఎన్నుకొనే విధానాల సంఖ్య $= {}^{3}C_3 = 1$

మిగిలిన ఇద్దరిని ఆరుగురు పురుషుల నుండి ఎన్నకొనే విధానాల సంఖ్య $= {}^{6}C_2 = 15$

ముగ్గురు స్త్రీలు మరియు ఇద్దరు పురుషులతో అయిదుగురు సభ్యుల కమిటీని ఎన్నకొనే విధానాలు $= {}^{3}C_3 \times {}^{6}C_2 = 15$

$\therefore$ మొత్తం విధానాల సంఖ్య = 60 + 15 = 75

41. $^{n}C_5 = {}^{n}C_6$ అయితే $^{13}C_n$ విలువ ఎంత?

జ: $^{n}C_5 = {}^{n}C_6$

$\Rightarrow n = 5 + 6 \quad$ ($^{n}C_r = {}^{5}C_s$ అయితే $n = r + s$ లేదా $r = s$)

$\Rightarrow n = 11$

$\therefore {}^{13}C_n = {}^{13}C_{11} = {}^{13}C_2 = 78$

42. ఏడుగురు బాలికలు, ఆరుగురు బాలుర నుంచి ముగ్గురు బాలురు, ముగ్గురు బాలికలు ఉండే కమిటీలను ఎన్ని రకాలుగా ఏర్పరచవచ్చు?

జ: ఏడురుగు బాలికల నుండి ముగ్గురు బాలికలను ఎన్నుకొనే విధాల సంఖ్య $= {}^{7}C_{3}$

ఆరుగురు బాలుర నుండి ముగ్గురు బాలికలను ఎన్నకొనే విధాల సంఖ్య $= {}^{6}C_{3}$

$\therefore$ ప్రాథమిక గణన సూత్రం నుండి, ఏర్పడే కమిటీల సంఖ్య $= {}^{7}C_{3} \times {}^{6}C_{3} = 35 \times 20 = 700$

43. 10 మంది వ్యక్తుల నుంచి నిర్దేశించిన ఒక వ్యక్తి ఉండేలా ఆరుగురు సభ్యుల కమిటీలు ఎన్ని ఏర్పరచవచ్చు?

జ: కమిటీలోని సభ్యుల సంఖ్య = 6

మొత్తం సభ్యులు = 10

నిర్ధేశించిన వ్యక్తి కమిటీలో ఉండి, మిగిలిన 9 మంది నుండి 5 గురు వ్యక్తులను ఎన్నకొనే విధాల సంఖ్య $= {}^{9}C_{5}$

$\therefore$ 10 మంది వ్యక్తుల నుంచి నిర్ధేశించిన ఒక వ్యక్తి ఉండేలా ఆరుగురు సభ్యుల కమిటీలు ఎన్నకొనే విధాల సంఖ్య $= {}^{9}C_{5} = 126$

44. ఇచ్చిన 9 పుస్తకాల నుంచి నిర్దేశించిన ఒక పుస్తకం లేకుండా 5 పుస్తకాలను ఎన్ని రకాలుగా ఎంచుకోవచ్చు?

జ: 9 పుస్తకాల నుంచి నిర్ధేశించిన ఒక పుస్తకం లేకుండా 5 పుస్తకాలు ఎన్నకోవాలి.

నిర్ధేశించిన పుస్తకం తీసివేయగా, మిగిలిన పుస్తకాలు '8'.

$\therefore$ ఈ 8 పుస్తకాల నుండి 5 పుస్తకాలను ఎంచుకొనే విధాల సంఖ్య $= {}^{8}C_{5} = 56$

45. 12 భుజాలున్న ఒక బహుభుజిలోని కర్ణాల సంఖ్య కనుక్కోండి

జ: బహుభుజి భుజాల సంఖ్య = 12

n భుజాలున్న బహుభుజి కర్ణాల సంఖ్య $= {}^{n}C_{2} - n$

$\therefore$ 12 భుజాలున్న బహుభుజి కర్ణాల సంఖ్య $= {}^{12}C_{2} - 12$

$= 54$

46. 5 అచ్చులు, 6 హల్లుల నుంచి 3 అచ్చులు, 3 హల్లులు ఉండేలా ఎన్ని 6 అక్షరాల పదాలు ఏర్పరచవచ్చు?

జ: అచ్చుల సంఖ్య = 5; హల్లుల సంఖ్య= 6

5 అచ్చుల నుండి మూడు అచ్చుల ఎన్నకొనే విధానాల సంఖ్య $={}^5C_3$

6 అచ్చుల నుండి 3 హల్లులు ఎన్నకొనే విధానాల సంఖ్య $={}^6C_3$

ఈ 6 అక్షరాలను ఎన్నకొనే మొత్తం విధానాలు $={}^5C_3 \times {}^6C_3$

6 అక్షరాలను వాటిలో వాటిని మార్చి వ్రాయగల పదాల సంఖ్య $=6!$

$\therefore$ 6 అక్షరాల పదాలలో 3 అచ్చులు, 3 హల్లులు ఉండేలా ఎన్నకోగల పదాల సంఖ్య $={}^5C_3 \times {}^6C_3 \times 6!$

47. ఒక రైలు మార్గంలో 8 స్టేషన్లు ఉన్నాయి. వీటిలో మూడు స్టేషన్లలో రైలు ఆపాలి. ఆ మూడు స్టేషన్లలో ఏ రెండూ పక్కపక్కన లేకుండా ఎన్ని రకాలుగా ఎంచుకోవచ్చు?

జ: రైలు మార్గములోని 8 స్టేషన్లను $S_1, S_2, S_3, ...S_8$ అనుకుందాము. 3 స్టేషన్లలో రైలు ఆపాలి.

8 స్టేషన్ల నుండి 3 స్టేషన్లు ఎంచుకొనే విధానాలు $={}^8C_3$

3 వరుస స్టేషన్లు ఎన్నకొనే విధానాలు = 6

$\{i.e.(S_1,S_2,S_3),(S_2,S_3,S_4),......(S_6,S_7,S_8)\}$

కేవలం రెండు స్టేషన్లు మాత్రమే వరుసగా వచ్చే విధానాలు $=2\times5+5\times4=30$

3 స్టేషన్లలో ఏ రెండూ పక్కపక్కన లేకుండా ఉండాలి. కనుక వీటిని ఎన్నకొనే విధానాలు $={}^8C_3-6-30=20$

48. ఒక ప్రశ్నాపత్రంలోని మూడు విభాగాలు A,B,C లలో వరుసగా 3, 4, 5 ప్రశ్నలున్నాయి. ఒక్కో విభాగం నుంచి కనీసం ఒక ప్రశ్న ఉండేట్లుగా మొత్తం 6 ప్రశ్నలు ఎంచుకొనే విధానాలు సంఖ్య కనుక్కోండి.

జ: ఒక ప్రశ్నాపత్రంలో A,B,C అనే మూడు బాగాలలో వరుసగా 3, 4, 5 ప్రశ్నలున్నాయి

మొత్తం 12 ప్రశ్నల నుండి 6 ప్రశ్నలు ఎంచుకొనే విధానాలు $={}^{12}C_6$

B మరియు C భాగాల నుండి (9 ప్రశ్నలు నుండి) 6 ప్రశ్నలను ఎంచుకొనే విధానాలు $={}^9C_6$

A మరియు C భాగాల నుండి (8 ప్రశ్నలు నుండి) 6 ప్రశ్నలను ఎంచుకొనే విధానాలు $={}^8C_6$

A మరియు B భాగాల నుండి (7 ప్రశ్నల నుండి) 6 ప్రశ్నలను ఎంచుకొనే విధానాలు $={}^7C_6$

$\therefore$ ఒక్కో భాగం నుంచి కనీసం ఒక ప్రశ్న ఉండే విధంగా మొత్తం 6 ప్రశ్నలు ఎంచుకొనే విధానలు $={}^{12}C_6-{}^7C_6-{}^8C_6\,{}^9C_6=805$

49. 12 వస్తువులను

(*i*) **4 సమాన భాగాలుగా**

(*ii*) **4 గురు వ్యక్తులను సమానంగా విభజించే విధానాలు కనుక్కోండి.**

జ: *i*) 12 విభిన్న వస్తువులను 4 సమభాగాలుగా విభజించే విధానాలు $=\dfrac{12!}{(3!)^4.4!}$

ii) 12 విభిన్న వస్తువులను నలుగురు వ్యక్తులకు సమానంగా విభజించే విధానాలు $=\dfrac{12!}{(3!)^4}$

50. $10.{}^{n}C_2 = 3.{}^{n+1}C_3$ **అయితే** n **విలువ ఎంత ?**

సాధన: $10.{}^{n}C_2 = 3.{}^{n+1}C_3$

$$\Rightarrow 10\times\frac{n(n-1)}{1.2}=\frac{3(n+1)n(n-1)}{1.2.3}$$

$$\Rightarrow 10 = n+1$$

$$\therefore n = 9$$

51. ${}^{n}P_r = 5040,\ {}^{n}C_r = 210$ **అయితే** n, r **విలువలను కనుక్కోండి.**

సూచన : ${}^{n}P_r = r!\,{}^{n}C_r$ and

సాధన: ${}^{n}P_r = n(n-1)(n-2)......[n-(r-1)]$

${}^{n}P_r = 5040,\ {}^{n}C_r = 210$

$$r! = \frac{{}^{n}P_r}{{}^{n}C_r} = \frac{5040}{210} = \frac{504}{21} = 24 = 4!$$

$$\therefore r = 4$$

$${}^{n}P_r = 5040 \Rightarrow {}^{n}P_4 = 5040 = 10\times 504$$

$$= 10\times 9\times 56$$

$$= 10\times 9\times 8\times 7$$

$$= {}^{10}P_4$$

$$\therefore n = 10$$

$$\therefore n = 10,\ r = 4$$

52. $^{15}C_{2r-1} = {}^{15}C_{2r+4}$, **అయితే** r **విలువ కనుక్కోండి.** (Mar 05)

సాధన: $^{15}C_{2r-1} = {}^{15}C_{2r+4}$

$\Rightarrow 2r-1 = 2r+4 \quad (2r-1)+(2r+4) = 15$

i.e., $4r+3 = 15 \Rightarrow 4r = 12 \Rightarrow r = 3$

$\therefore r = 3$

$\therefore 2r-1 = 2r+4 \Rightarrow -1 = 4$

$\therefore r = 3$

53. $^{12}C_{r+1} = {}^{12}C_{3r-5}$, **అయితే** r **విలువ కనుక్కోండి.** (Mar 08)

సాధన: $^{12}C_{r+1} = {}^{12}C_{3r-5}$

$\Rightarrow r+1 = 3r-5 \quad (r+1)+(3r-5) = 12$

$\Rightarrow 1+5 = 2r \quad 4r-4 = 12$

$\Rightarrow 2r = 6 \quad 4r = 16$

$\Rightarrow r = 3 \quad r = 4$

$\therefore r = 3$,.4

54. EQUATION **పదంలోని అక్షరాల నుంచి 3 అచ్చులు, 2 హల్లులు ఎన్ని రకాలుగా ఎంచుకోవచ్చు ?** (May 11)

సాధన: EQUATION అనే పదంలో $\{E, U, A, I, O\}$ అను 5 అచ్చులు $\{Q, T, N\}$ అను 3 హల్లులు కలవు. అందుండి 3 అచ్చులు, 2 హల్లులు ఎన్నుకొనే విధాలు

$^{5}C_{3} \times {}^{3}C_{2} = 10 \times 3 = 30$

55. **ఒక వరుసలో ఉన్న** n **వ్యక్తుల నుంచి పక్క పక్కనే ఉన్న ఇద్దరు వ్యక్తులను ఎన్ని రకాలుగా ఎంచుకోవచ్చు ?**

సాధన: ఒక వరుసలో ఉన్న n వ్యక్తు నుంచి, పక్కపక్కనే ఉన్న ఇద్దరు వ్యక్తును ఎంచుకొనే విధల సంఖ్య

$= n-1$

56. ఆరుగురు భారతీయులు, అయిదుగురు అమెరికా దేశస్థుల నుంచి అయిదుగురు సభ్యులున్న కమిటీని, ఆ కమిటీలో భారతీయుల సంఖ్య పెద్దదిగా ఉండేలా ఎన్ని రకాలుగా ఎంచుకోవచ్చు ? (Mar 08)

సాధన: కమీటిలో భారతీయుల సంఖ్య పెద్దదిగా ఉండేటట్లు కమిటీని ఎన్నుకోనే విధాలు ఈ క్రింది ఇవ్వబడినవి.

$\therefore$ కమిటీని కోరిన విధంగా ఎంచుకొనే విధాల సంఖ్య

$= 200 + 75 + 6 = 281$

57. $^{(n+1)}P_5 : {}^{n}P_5 = 3:2$, **అయితే 'n' విలువ కనుక్కోండి.**

సాదన: $^{(n+1)}P_5 : {}^{n}P_5 = 3:2$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)!}{(n+1-5)!} : \frac{n!}{(n-5)!} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)!}{(n-4)!} \times \frac{(n-5)!}{n!} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{n-4} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 2n + 2 = 3n - 12$$

$$\Rightarrow n = 14$$

58. 9 గణితశాస్త్ర పరీక్షాపత్రాలను, వాటిలో శ్రేష్ఠమయినది, హీనమైనది *(i)* **కలసి ఉండేట్లుగా** *(ii)* **వేరువేరుగా ఉండేట్లుగా ఎన్ని విధాలుగా అమర్చవచ్చు?**

జ: *i)* ఈ రెండు రకాలైన పేపర్లను ఒక యూనిట్‌గా భావిస్తే, మనకి మొత్తం 9 - 2 + 1 = 7 + 1 = 8 పేపర్లు ఉన్నాయి.

వీటిని 8! విధాలుగా అమర్చవచ్చు. ఆ రెండు పేపర్లను 2! విధాలుగా వాటిలో వాటిని అమర్చవచ్చు. కనుక కావలసిన అమరికల సఖ్య (ఆ రెండు పేపర్లు కలిసి ఉండేట్లుగా) $= 8!2!$

ii) మొత్తం 9 పేపర్లను అమర్చే విధానాలు 9!. వీటిలో శ్రేష్ఠమైనది, హీనమైనది కలిసి ఉండేట్లుఆ అమర్చే విధానాలు 8! 2! కనుక, ఈ రెండు గణితశాస్త్ర పేపర్లు వేరువేరుగా ఉండేట్లుగా అమర్చే విధానాలు

$9! - 8!\,2! = 8!\,(9-2) = 8! \times 7$

59. 4 ఉత్తరాలను వాటికి సంబంధించిన నిరునామాలు ఉన్న 4 కవర్లలో ఏ ఉత్తరమూ దానికి సంబంధించిన కవరులోకి పోకుండా ఉండేలా, ఒక్కొక్క కవరులో ఒక్కొక్క ఉత్తరం ఉండేలా ఎన్ని విధాలుగా అమర్చవచ్చు?

జ: కావలసిన అమరికల సంఖ్య

$$= 4!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right)=12-4+1=9$$

గమనిక: ఒక వరసలోని n వస్తువులని తిరిగి అమర్చినప్పుడు ఏ ఒక్కటీ దాని మూలస్థానంలో అమరకపోవడాన్ని ఒక క్రమభంగం అని అంటాం.

n విభిన్న వస్తువుల క్రమభంగాల సంఖ్య

$$= n!\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+....+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)$$

60. 7 విభిన్నమైన రంగుల పూసలతో ఏర్పరచగల పూసల గొలుసుల సంఖ్యలను కనుక్కోండి.

సాధన: అసరూప వస్తువులతో ఏర్పరచగల వేలాడే రకం వృత్తకార ప్రస్తారాల సంఖ్య $\frac{1}{2}\{(n-1)!\}$ అని మనకు తెలుసు.

కనుక, ఇచ్చిన 7 పూసలతో ఏర్పరచగల దండల సంఖ్య

$$\frac{1}{2}\{(n-7)!\}=\frac{1}{2}(6!)=360$$

స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. $CONSIDER$ పదంలోని అక్షరాలనుపయోగించి ఎన్ని 5 అక్షరాల పదాలు ఏర్పరచవచ్చు? వాటిలో ఎన్ని పదాలు 'C' తో మొదలవుతాయి? ఎన్ని పదాలకు చివరి అక్షరం 'R' అవుతుంది? ఎన్ని పదాలు 'C' తో మొదలయి 'R' తో అంతమవుతాయి?

జ: ఇచ్చిన పదం '$CONSIDER$' లో 8 విభిన్న అక్షరాలున్నాయి. $CONSIDER$ లో 8 అక్షరాల నుండి ఏర్పడే 5 అక్షరాల పదాల సంఖ్య $= {}^8P_5$

వీటిలో

$i)$ మొదటి అక్షరం 'C' తో మొదలైతే మిగిలిన నాలుగు స్థానాలను మిగిలిన 7 అక్షరాలతో నింపే విధానాలు $= {}^7P_4$

$ii)$ చివరి అక్షరం 'R' అయితే మొదటి నాలుగు స్థానాలు మిగిలిన 7 అక్షరాలతో నింపే విధానాలు $= {}^7P_4$

$iii)$ మొదటి అక్షరం 'C', చివరి అక్షరం 'R' కలిగినట్లయితే, మిగిలిన 3 స్థానాలను, మిగిలిన 6 అక్షరాలతో నింపే విధానాలు $= {}^6P_3$

2. 5 విభిన్న ఎర్రబంతులు, 4 విభిన్న నల్ల బంతులను ఒక వరసలో (i) ఏ రెండు ఒకే రంగు బంతులు వక్క పక్కన లేకుండా (ii) ఒకే రంగు బంతులన్నీ ఒక చోట ఉండేట్లు ఎన్ని విధాలుగా అమర్చవచ్చు?

జ: ఎర్ర బంతుల సంఖ్య = 5

నల్ల బంతుల సంఖ్య = 4

$i)$ ఏ రెండు ఒకే రంగు బంతులు పక్క పక్కన లేకుండా:

ముందుగా 4 నల్ల బంతులను ఒక వరసలో $4!$ విధాలుగా అమర్చవచ్చు

$\times B \times B \times B \times B \times$

ఇప్పుడు ఏర్పడిన 5 ఖాళీలలో 5 ఎర్ర బంతులను $5!$ విధాలుగా అమర్చవచ్చును

$\therefore$ ప్రాథమిక గణన సూత్రం ప్రకారం ఈ రెండు పనులను $5! \times 4!$ విధాలుగా చేయవచ్చును.

$\therefore$ కావలసిన ప్రకారం అమర్చగల విధానాల సంఖ్య= $4! \times 5!$

$ii)$ ఒకే రంగు బంతులన్నీ ఒక చోట ఉండేటట్లు:

5 ఎర్ర బంతులను ఒక యూనిట్‌గాను, 4 నల్లని బంతులను ఒక యూనిట్‌గాను అనకుందాము

5 ఎర్ర బంతులను వాటిలో వాటిని మార్చి అమర్చగల విధానాల సంఖ్య $= 5!$

4 నల్ల బంతులను వాటిలో వాటిని మార్చి అమర్చగల విధానాల సంఖ్య $= 4!$

ఈ రెండు యూనిట్లను అమర్చగల విధానాల సంఖ్య $= 2!$

$\therefore$ ప్రాథమిక గణన సూత్రం ప్రకారం కావలసిన అమరిక యొక్క విధానాల సంఖ్య $= 2! \times 4! \times 5!$

3. $BRING$ **అనే పదంలోని అక్షరాలను వివిధ రకాలుగా అమరిస్తే వచ్చే పదాలను నిఘంటువు క్రమంలో రాసినప్పుడు ఆ క్రమంలో 59 వ పదం ఏది?**

జ: దత్త పదం = $BRING$

ఈ అక్షరాల నిఘంటువు క్రమం B, G, I, N, R

కనుక నిఘంటువు క్రమంలో ముందుగా B తో మొదలయ్యే పదాలు వస్తాయి.

B తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య $4! = 24$

G తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య $4! = 24$

వీటి మొత్తం 48 కనుక 59 వ పదం I తో మొదలవుతుంది.

IB తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య $= 3! = 6$

కనుక 59 వ పదం IG తో మొదలవుతుంది.

IGB తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య $= 2! = 2$

IGN తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య $= 2! = 2$

ఇప్పటి వరకు మొత్తం

$24 + 24 + 6 + 2 + 2 = 58$ పదాలు

$\therefore$ తరువాత పదం (59 వ పదం) $IGRBN$ అవతుంది.

4. 9 వస్తువులు, 9 పెట్టెలు కలవు. వాటిలో 5 వస్తువులు మూడు చిన్న పెట్టెలలో సరిపోవు. ఒక్కొక్క పెట్టెలో ఒక్కొక్క వస్తువు ఉండేట్లుగా ఎన్ని విధాలుగా అమర్చవచ్చు?

జ: 9 వస్తువులు 9 పెట్టెలు కలవు .

5 వస్తువులు 3 చిన్న పెట్టెలలో పరిపోవు. కనుక ఈ 5 వస్తువులు మిగిలిన 6 పెట్టెలలో అమర్చవచ్చు దీనిన $^6P_5$ విధాలుగా చేయవచ్చు

$\therefore$ మిగిలిన 4 ఖాళీ పెట్టెలలో మిగిలిన 4 వస్తవులను $4!$ విధాలుగా అమర్చవచ్చు.

$\therefore$ ప్రాథమిక గణన సూత్రం నుండి ఇచ్చిన వస్తువులను

$^6P_5 \times 4!$ అంటే 17,280 విధాలుగా అమర్చవచ్చు.

5. TRIANGLE **పదంలోని అక్షరాలను అచ్చుల స్థానాల్లో ఎప్పుడూ అచ్చులూ ఉండేలా ఎన్ని విధాలుగా అమర్చవచ్చు?**

సాధన: TRIANGLE అనే పదంలో 3 అచ్చులు (I, A, E), 5 హల్లులు (T, R, N, G, L) ఉన్నాయి.

$= (3!)(5!) = (6)(120) = 720$

హ	హ	అ	అ	హ	హ	హ	అ

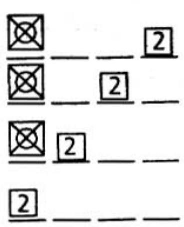
అచ్చుల స్థానాల్లో ఎప్పుడూ అచ్చులే ఉండాలి. కనుక 3 అచ్చులను వాటి వాటి స్థానాల్లో 3! విధాలుగా అమర్చవచ్చు. ఆ తరువాత మిగిలిన 5 స్థానాల్లో 5 హల్లులను 5! విధాలుగా అమర్చవచ్చు.

కనుక అచ్చుల స్థానాలను మార్చకుండా ఏర్పడే ప్రసార్తాల సంఖ్య

$= (3!)(5!) = (6)(120) = 720$

6. **0, 2, 4, 7, 8 అంకెలతో ఏర్పరచగలిగే 4 అంకెల సంఖ్యల మొత్తాన్ని కనుక్కోండి? (పునరావృతం కానట్లుగా మొదటి సంఖ్య)**

సాధన: 0,2,4,7,8 అంకెలతో ఏర్పడే 4 అంకెల సంఖ్యల సంఖ్య $= {}^5P_4 - {}^4P_3 = 120 - 24 = 96$



ఈ 96 సంఖ్యలలో

${}^4P_3 - {}^3P_2$ సంఖ్యలలో 2 యూనిట్ల స్థానంలో ఉంటుంది.

${}^4P_3 - {}^3P_2$ సంఖ్యలలో 2 పదులు స్థానంలో ఉంటుంది.

${}^4P_3 - {}^3P_2$ సంఖ్యలలో 2 వందల స్థానంలో ఉంటుంది.

${}^4P_3$ సంఖ్యలలో 2 వేల స్థానంలో ఉంటుంది.

$\therefore$ 2 వల్ల వచ్చే మొత్తం

$= ({}^4P_3 - {}^3P_2)\,2 + ({}^4P_3 - {}^3P_2)20$

$+ ({}^4P_3 - {}^3P_2)\,200 + {}^4P_3 \times 2000$

$= {}^4P_3(2 + 20 + 200 + 2000)$

$- {}^3P_2(2 + 20 + 200)$

$= 24(2222) - 6(222)$

$= 24 \times 2 \times 1111 - 6 \times 2 \times 111$

ఇదే విధంగా 4 వల్ల వచ్చే మొత్తం

$= 24 \times 4 \times 1111 - 6 \times 4 \times 111$

7 వల్ల వచ్చే మొత్తం

$= 24 \times 7 \times 1111 - 6 \times 7 \times 111$

8 వల్ల వచ్చే మొత్తం

$= 24 \times 8 \times 1111 - 6 \times 8 \times 111$

$\therefore 96$ సంఖ్యల మొత్తం

$= (24 \times 1111(2+4+7+8)$

$= 6 \times 111(2+4+7+8)$

$= 26,664(21) - 666(21)$

$= 21(26664 - 666)$

$= 21(25,998)$

$= 5,45,958$

రెండో పద్ధతి :

ఇచ్చిన n అంకెలలో 'O' కూడా ఉంటే, ఈ 'n' అంకెలతో ఏర్పరచగల 'r' అంకెల సంఖ్యల మొత్తం.

$= {}^{(n-1)}P_{(r-1)} \times$ దత్త అంకెల మొత్తం

$\times \{111.......1(r-1$ సార్లు $) \}$ $(r-1)$

$= {}^{(n-2)}P_{(r-2)} \times$ దత్త అంకెల మొత్తం

$\times \{111........1(r$ సార్లు $) \}$ $(r-2)$

ఇచ్చట $n = 5$, $r = 4$, ఇచ్చిన అంకెలు $\{0,2,4,7,8\}$ అనుక $\{0,2,4,7,8\}$ అంకెలతో ఏర్పరచగలిగే, 4 అంకెల సంఖ్యల మొత్తం

$= {}^{(5-1)}P_{(4-1)} \times (0+2+4+7+8)$

$\times (1111)(4-1)$

$= {}^{(5-2)}P_{(r-2)} \times (0+2+4+7+8)$

$\times (111)(4-2)$

$= {}^{4}P_{3}(21)(1111) - {}^{3}P_{2}(21)(111)$

$= 21[24 \times 1111 - 6 \times 111]$

$= 21[26664 - 666]$

$= 21(25\ 998) = 5,45,958$

7. 0, 2, 4, 6, 8 అంకెలతో (వాటిన అంకెన్లు వాడకుండా) 4000 కన్నా పెద్ద సంఖ్యలు ఎన్ని ఏర్పరచవచ్చు.

సాధన: దత్త అంకెలలో ఏర్పడే 5 అంకెల సంఖ్యలు ప్రతీది 4000 కంటె పెద్దది అవుతుంది. అయితే మొదటి స్థానాన్ని 0 తప్ప మిగిలిన అంకెలలో $\{2,4,6,8\}$ నింపాలి. కనుక పదివేల స్థానాన్ని (మొగటి స్థానాన్ని) 4 విధాలుగా నింపవచ్చు. కనుక 5 అంకెలున్న సంఖ్యలు $4\times 4! = 4\times 24 = 96$

4, 6, 8 తో మొదలయ్యే ప్రతి నాలుగు అంకెల సంఖ్య 4000 కంటె పెద్దది అవుతుంది. కనుక వేల స్థానాన్ని 3 విధాలుగా నింపవచ్చు. మిగిలిన 3 స్థానాలను మిగిలిన 4 అంకెలతో ${}^4P_3$ విధాలుగా నింపవచ్చు.

కనుక 4000 కన్నా పెద్దవైన 4 అంకెలున్న స్థానాలు $3\times {}^4P_3 = 3\times 24 = 72$

$\therefore 4000$ కన్నా పెద్దదైన సంఖ్యలు $96+72=168$

8. MONDAY పదంలోని అక్షరాలను అచ్చులు ఎప్పుడూ బేసి స్థానాల్లో ఉండేలా ఎన్ని రకాలుగా అమర్చవచ్చు ?

సాధన: MONDAY పదంలో 2 అచ్చులు $(0, A)$ 4 హల్లులు (M, N, D, Y) ఉన్నాయి.

	2		4		6

MONDAY పదంలో 6 అక్షరాలున్నవి. అందు 3 సరిస్థానాలు, 3 బేసి స్థానాలు 3 సరిస్థానాల్లో 2 అచ్చులను ${}^3P_2$ విధాలుగా అమర్చవచ్చు.

మిగిలిన 4 స్థానాలలో 4 హల్లులను $4!$ విధాలుగా అమర్చవచ్చు. ప్రాధమిక సూత్రం ప్రకారం ఈ రెండు పనులను ${}^3P_2\times 4!$ విధాలుగా చేయవచ్చు.

కనుక అచ్చులు ఎల్లప్పుడూ సరిస్థానాలలో ఉండేలా అమర్చే విధాల సంఖ్య $= {}^3P_2\times 4!$

$= 3!\times 4! = 6\times 24 = 144$

9. $A_1, A_2, A_3........A_{10}$ అనే 10 మంది విద్యార్థులను ఒక వరుసలో

i) A_1, A_2, A_3 లు కలిసి ఉండేటట్లు

ii) A_1, A_2, A_3 లు నిర్ధేశించిన క్రమంలో ఉండేటట్లు

iii) A_1, A_2, A_3 లు నిర్ధేశించిన క్రమంలో కలిసి ఉండేటట్లు ఎన్ని విధాలుగా అమర్చవచ్చు ?

సాధన: i) $A_1, A_2, ...A_{10}$ లు 10 మంది విద్యార్థులు

A_1, A_2, A_3 లను ఒక యూనిట్‌గా అనుకుంటే, మిగిలిన 7 గురు, ఈ ఒక యూనిట్ మొత్తం 8 అవుతాయి. ఈ ఎనిమిదింటిని $8!$ విధాలుగా అమర్చవచ్చు. ఇపుడు ఒక యూనిట్‌లో వున్న $A_1, A_2, A_3,$ లను వారిలో

వారిని $3!$ విధాలుగా అమర్చవచ్చు. కనుక ప్రాథమిక సూత్రం ప్రకారం, ఈ రెండు పనులను $(8!)(3!)$ విధాలుగా అమర్చవచ్చును.

ii) A_1, A_2, A_3, లు నిర్దేశించిన క్రమంలో ఉండేటట్లు అమర్చినివి.

A_1, A_2, A_3, లను 10 స్థానాలలో నిర్దేశించిన ప్రకారం అమర్చే విధాల సంఖ్య

$$= \frac{{}^{10}P_3}{3!}$$

మిగిలిన 7 గురుని మిగిలిన స్థానాలలో అమర్చే విధాల సంఖ్య $= 7!$

$\therefore A_1, A_2, A_3$ లు ఒక నిర్దేశించిన ప్రకారం అమర్చే విధాల సంఖ్య

$$\frac{{}^{10}P_3}{3!} \times 7! = \frac{10!}{7! \times 3!} \times 7! = \frac{10!}{3!}$$

$$= {}^{10}P_7$$

iii) A_1, A_2, A_3, లు నిర్దేశించిన క్రమంలో కలిసి ఉండేటట్లు అమర్చాలి. A_1, A_2, A_3 లను ఒక యూనిట్ అనుకుంటే, మిగిలిన 7 గురు, ఈ ఒక యూనిట్ మొత్తం 8 అవుతాయి. ఈ ఎనిమిదింటిని ఒక వరస క్రమంలో $(8)!$ విధాలుగా అమర్చవచ్చును. A_1, A_2, A_3 లు నిర్దేశించిన క్రమంలో కలిసి ఉండాలి కనుక వారిలో వారు తమ తమ స్థానాలను మార్చుకోవటానికి వీలులేరు.

కనుక కోరిన ప్రకారం అమర్చే విధాల సంఖ్య $= 8!$

10. 1, 2, 5, 6, 7 అంకెలనుపయోగించి.

i) 2 ii) 3 iii) 4 iv) 5 v) 25 **తో భాగించబడే 4 అంకెల సంఖ్యలు ఎన్ని ఏర్పరచవచ్చు ?**

సాధన: (1, 2, 5, 6, 7) అంకెలనుపయోగించే ఏర్పడే నాలుగు అంకెలున్న సంఖ్యలు $= {}^5P_4 = \frac{5!}{1!} = 120$

i) ఆ విధంగా ఏర్పడిన 4 అంకెలున్న సంఖ్య 2తో భాగింపబడ వలయునన్ను దాని చివరి (ఒకట్ల) స్థానంలో సరి సంఖ్య ఉండాలి. ఆ స్థానాన్ని 2 లేదా 6 తో నింపవచ్చు ఇపుడు మిగిలిన 3 స్థానాలను

$\square \; \square \; \square \; \boxed{x}$

మిగిలిన 4 అంకెలతో ${}^4P_3$ విధాలుగా నింపవచ్చు. కనుక 2 తో భాగింపబడే 4 అంకెల సంఖ్యల సంఖ్యలు

$= 2 \times {}^4P_3 = 2 \times 4! = 2(24) = 48$

ii) ఒక సంఖ్య 3 తో భాగింపబడానికి, ఆ సంఖ్యలోని అంకెల మొత్తం 3 తో బాగించబడాలి. మనకు ఇచ్చిన 5 అంకెల మొత్తం 21 కనుక వీటి నుంచి 4 అంకెలను మొత్తం 3 తో భాగించబడే విధంగా

ఎంచుకోవాలి అంటే

(1, 2,5, 7) అను ఎన్నుకోవాలి వాటి మొత్తం 15 కనుక

$\therefore 3$ తో భాగింపబడే నాలుగు అంకెలున్న సంఖ్యలు

$4! = 24$

iii) ఒక సంఖ్య 4 తో భాగించబడాలంటే చివరి రెండు స్థానాల్లో (అంటే పదులు, ఒకట్ల స్థానాల్లో) ఉన్న రెండు అంకెల సంఖ్య 4తో భాగించబడాలి. కనుక ఆ రెండు స్థానాలను 12, 16, 52, 56, 72, 76 అనే సంఖ్యలతో నింపాలి. అంటే 6 విధాలుగా ఆ రెండు స్థానాలు నింపవచ్చు. ఇపుడు మిగిలిన రెండు స్థానాలను మిగిలిన 3 అంకెలలో $^3P_2$ విధాలుగా నింపవచ్చు. కనుక 4 తో భాగింపబడే 4 అంకెల సంఖ్యల సంఖ్య.

$= 6 \times {}^3P_2 = 6 \times 3! = 6 \times 6 = 36$

iv) ఒక సంఖ్య 5తో భాగించబడాలంటే చివరి (ఒకట్ల) స్థానంలో 5 ఉండాలి. ('0' కూడా ఉండవచ్చు. కాని ఇచ్చిన అంకెలలో సున్నా లేదు) కనుక ఒకట్ల స్థానంలో 5 ఉంచితే మిగిలిన 3 స్థానాలను మిగిలిన 4 అంకెలతో $^4P_3$ విధాలుగా నిపంవచ్చు.

$\therefore 5$ తో భాగింపబడే 4 అంకెల సంఖ్యల సంఖ్య

$= {}^4P_3 = 4! = 24$

v) ఒ& సంఖ్య 25తో భాగించబడాలంటే చివరి స్థానాలలో 25 లేదా 75 తో నింపాలి. (50 లేదా 00 తో కూడా నింపవచ్చు. కాని దత్త అంకెలలో '0' లేదు) అంటే ఈ స్థానాలు 2 విధాలుగా నింపవచ్చు. ఇపుడు మిగిలిన రెండు స్థానాలను మిగిలిన 3 అంకెలలో $^3P_2$ విధాలుగా నింపవచ్చు.

$\therefore 25$ తో భాగింపబడే 4 అంకెల సంఖ్యల సంఖ్య $2 \times {}^3P_2$

$= 2 \times 3! = 2 \times 6 = 12$

11. MASTER **పదంలోని అక్షరాలను ప్రస్తారించిన వల్ల వచ్చే పదాలను నిఘంటువు క్రమంలో రాస్తే ఆ వరుసలో**

i)REMAST ii)MASTER **పదాల కోటిలను కనుక్కోండి.** (May11)

సాధన: దత్త పదం MASTER లోని అక్షరాల నిఘంటువు క్రమం AEMRST

i) స్థానాలు 1 2 3 4 5 6 పదాల సంఖ్య

A – – – – – $\rightarrow 5!$

E – – – – – $\rightarrow 5!$

M – – – – – $\rightarrow 5!$

R A – – – – $\rightarrow 4!$

R E A – – – $\rightarrow 3!$

R E M A S T $\rightarrow 1!$

కనుక REMAST అనే పదం కోటి

$$= 3 \times 5! + 1 \times 4! + 1 \times 3! + 1$$

$$= 3(120) + 24 + 6 + 1$$

$$= 360 + 24 + 6 + 1 = 391$$

ii) నిఘంటువలో ముందుగా A, లో, తరువాత E,లో ఆ తరువాత M తో మొదలయ్యే పదాలు వస్తాయి. వీటిలోనే మనకు కావలసిన పదం MASTER ఉంది. కనుక వీటి నిఘంటువు క్రమాన్ని గమనిస్తే, వీటిలో ముందుగా MA తో మొదలయ్యేవి వస్తాయి. ఈ విధంగా MASTER అనే పదం వచ్చేంత వరకు లెక్కించాలి. (Mar11)

స్థానాలు 1 2 3 4 5 6 పదాల సంఖ్య

A – – – – – $\rightarrow 5!$

E – – – – – $\rightarrow 5!$

M A E – – – $\rightarrow 3!$

M A R – – – $\rightarrow 3!$

M A S E – – $\rightarrow 2!$

M A S R – – $\rightarrow 2!$

M A S T E R $\rightarrow 1!$

కనుక MASTER అనే పదం కోటి

$$= 2 \times 5! + 2 \times 3! + 2 \times 2! + 1$$

$$= 2(120) + 2(6) + 2 \times 2 \times 2 + 1$$

$$= 240 + 12 + 4 + 1$$

$$= 257$$

12. 1, 2, 3, 4, 5, 6 అంకెలతో ఏర్పరచగలిగే నాలుగు అంకెల సఖ్యల మొత్తాన్ని కనుక్కోండి. (పునరావృతం కాకుండా)

మొదటి పద్ధతి :

సాధన: 1, 2, 3, 4, 5, 6 అనే 5 అంకెలతో ఏర్పరచగల 4 అంకెల సంఖ్యల సంఖ్య $= {}^5P_4 = 5! = 120$

ఇపుడు ఈ 120 సంఖ్యల మొత్తం కనుక్కోవాలి. ముందుగా ఈ 120 సంఖ్యల మొత్తం కనుక్కోవాలి. ముందుగా ఈ 120 సంఖ్యల ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెల మొత్తం కనుక్కొందాం. ఒకట్ల స్థానంలో 1 ఉంచితే $\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{1}$ మిగిలిన 3 స్థానాలను మిగిలిన 4 అంకెలతో ${}^4P_3$ విధాలుగా నింపవచ్చు. అంటే పైన చెప్పిన 120 నాలుగు అంకెల సంఖ్యలలో ${}^4P_3$ సంఖ్యల ఒకట్ల స్థానంలో 1 వస్తుంది. ఇట్లే 2, 4, 5, 6 అంకెలు ఒక్కొక్కటి ${}^4P_3$ సార్లు ఒకట్ల స్థానంలో వాస్తాయి. ఈ అంకెలన్నీ కలిపితే మనకు 120 సంఖ్యల ఒకట్ల స్థానంలోని మొత్తం.

$= {}^4P_3 \times 1 + {}^4P_3 \times 2 + {}^4P_3 \times 4 + {}^4P_3 \times 5 + {}^4P_3 \times 6$

$= {}^4P_3 (1+2+4+5+6)$

$= {}^4P_3 (18)$

ఇదే విధంగా ఈ 120 సంఖ్యల పదుల స్థానంలో కూడా పైన చెప్పిన అంకెలు మాత్రమే వస్తాయి. కనుక పదుల స్థానంలోని అంకెల మొత్తం కూడా $= {}^4P_3 (18)$. కాని పదుల స్థానంలోని మొత్తం కనుక దాని విలువ

${}^4P_3 (1+2+4+5+6)10$

$= {}^4P_3 (18)(10)$

ఇలాగే వందల స్థానంలోని అంకెల మొత్తం విలువ ${}^4P_3 \times 18 \times 100$

వేల స్థానంలోని అంకెల మొత్తం విలువ ${}^4P_3 \times 18 \times 1000$

$\therefore$ 1, 2, 4, 5, 6 అంకెలతో ఏర్పడే 4 అంకెల సంఖ్యల మొత్తం.

$= {}^4P_3 \times 18 \times 1 + {}^4P_3 \times 18 \times 10 + {}^4P_3 (18)$

$(100) + {}^4P_3 (18)(1000)$

$= {}^4P_3 \times 18(1+10+100+1000)$

$= 24 \times 18 \times 1111$

$= 4,79,952$

13. ఆరుగురు బాలురు, ఆరుగురు బాలికలు ఒక గుండ్రని బల్ల చుట్టూ

i) బాలికలంతా ఒకే చోట కలిసి ఉండేలా

ii) ఏ ఇద్దరు బాలికలు పక్క పక్కనలేకుండా

iii) బాలురు, బాలికలు ఒకరి తరువాత ఒకరు (ఏకాంతరంగా) వచ్చేలా ఎన్నివిధాలుగా అమర్చవచ్చు ?

సాధన: i) ఆరుగురు బాలికలను ఒక యూనిట్‌గా భావిస్తే, అపుడు మొత్తం వ్యక్తుల సంఖ్య 6 గురు బాలురు +1 యూనిట్ బాలికలు = 7

వీరిని ఒక వృత్తాకార బల్ల చుట్టూ అమర్చే విధానాలు

= $(7-1)! = 6!$

ఇప్పుడు ఆరుగురు బాలికలను వారిలో వారిని $6!$ విధాలుగా అమర్చవచ్చు.

$\therefore$ 6 గురు బాలికలు కలిసి ఒకే చోట ఉండేలా ఏర్పడే వృత్తాకార ప్రస్తారాల సంఖ్య

$= 6! \times 6! = 720 \times 720 = 5,18,400$

ii) ముందుగా ఆరుగురు బాలురను ఒక వృత్తాకార బల్ల చుట్టూ అమర్చే విధానాలు $= (6-1)! = 5!$

వీరిలో ప్రతి ఇద్దరి బాలుర మధ్య ఒక్కో ఖాళీ వంతున మొత్తం 6 ఖాళీలుంటాయి. ఈ 6 ఖాళీలలో 6 గురు బాలికలను అమర్చే విధానాలు $= 6!$

$\therefore$ ఏ ఇద్దరు బాలికలు ప్రక్క ప్రక్కన లేకుండా ఏర్పడే వృత్తాకార ప్రస్తారాల సంఖ్య

$= 5! \times 6! = 120 \times 720 = 86,400$

iii) ఇక్కడ బాలురు, బాలికల సంఖ్య సమానం బాలురు, బాలికలు ఒకరి తరువాత ఒకరు కూర్చోవాలి అంటే ఏ ఇద్దరు బాలురు ప్రక్కప్రక్కన ఉండకూడదు. ఏ ఇద్దరు బాలికలు ప్రక్క ప్రక్కన ఉండకూడదు. ముందుగా ఆరుగురు బాలికలు ఒక గుండ్రని బల్ల చుట్టూ కూర్చున విధాల సంఖ్య

$= (6-1)! = 5!$

వీరిలో ప్రతి ఇద్దరి బాలికల మధ్య ఒక్కో ఖాళీ వంతున మొత్తం 6 ఖాళీలు ఉంటాయి. ఈ 6 ఖాళీలను 6 గురు బాలురతో అమర్చే విధాల సంఖ్య $6!$

$\therefore$ బాలురు, బాలికలు ఒకరి తరువాత ఒకరు వచ్చేలా అమర్చే విధాల సంఖ్య

$= 5! \times 6! = 120 \times 720 = 86,400$

14. 6 విభిన్నమూన ఎర్రరంగు పూసలు, మూడు విభిన్నమైన నీలిరంగు పూసలతో ఏ రెండు నీలి రంగు పూసలు పక్క పక్కన లేకుండా ఎన్ని రకాలుగా పూసల గొలుసులు తయారు చేయవచ్చు ?

సాధన: ముందుగా 6 విభిన్నమైన ఎర్రటి పూసలతో ఏర్పడే వృత్తాకార ప్రస్తారాల సంఖ్య $-(6-1)!=5!=120$. ప్రతి రెండు విభిన్న ఎర్రటి పూసల మధ్య ఒక్క ఖాళీ చొప్పున మొత్తం 6 ఖాళీలు ఉంటామి. ఈ 6 ఖాళాలలో 3 విబిన్న నీలిరంగు పూసలను ${}^6P_3$ విధాలుగా అమర్చవచ్చు.

కనుక మొత్తం వృత్తాకార ప్రస్తారాల సంఖ్య $=5!\times {}^6P_3$ కాని పూసల దండలు వేలాడే వృత్తాకార ప్రస్తారాల సంఖ్య

$$=\frac{1}{2}\times 5!\times {}^6P_3$$

$$=\frac{1}{2}\times 120\times 6\times 5\times 4=7,200$$

15. $i)$ 0, 2, 4, 6, 8 $ii)$ 1, 3, 5, 7, 9 అంకెలతో ఏర్పడే 6 అంకల అనులోమ విలోమాల సంఖ్య ఎంత?

జ: $i)$ ఇచ్చిన 5 అంఎల = 0, 2, 4, 6, 8

6 అంకెల అనులోమ విలోమాల సంఖ్యలోని మొదటి అంకె మరియు చివరి అంకె (లక్షల స్థానం మరియు ఒకట్ల స్థానం) లో ఒకే అంకె కలిగి ఉంటుంది. ఈ అంకెను 4 విధాలుగా (సున్నా కాని అంకెలతో) నింపవచ్చు. పదివేల స్థానం మరియు పదుల స్థానాలలో ఒకే అంకె కలిగి ఉంటుంది. పునరావృతం అనుమతించుట వలన ఈ అంకెను 5 విధాలుగా నింపవచ్చు.

వేల స్థానం మరియు వందల స్థానాలలో ఒకే అంకె కలిగి ఉంటుంది. పునరావృతం అనుమితించుట వలన ఈ అంకెను 5 విధాలుగా నింపవచ్చు.

$\therefore$ 6 అంకెల అనులోమ విలోమాల సంఖ్యలు

$4\times 5\times 5=100$

$ii)$ ఇచ్చిన 5 అంకెలు = 1, 3, 5, 7, 9

6 అంకెల అనులోమ విలోమాల సంఖ్యలోని మొదటి అంకె మరియు చివరి అంకె (లక్షల స్థానం మరియు ఒకట్ల స్థానం) లో ఒకే అంకె కలిగి ఉంటుంది. ఈ అంకెను 5 విధాలుగా నింపవచ్చు.

అలాగే, పదివేల స్థానం మరియు పదుల స్థానాలలో ఒకే అంకె కలిగి ఉంటుంది. పునరావృతం అనుమతించుట వలన ఈ అంకెను 5 విధాలుగా నింపవచ్చు. వేల స్థానం మరియు వందల స్థానాలలో ఒకే అంకె కలిగి ఉంటుంది.

పునరావృతం అనుమతించుట వలన ఈ అంకెను 5 విధాలుగా నింపవచ్చు.

$\therefore$ 6 అంకెల అనులోమ విలోమాల సంఖ్యలు

$5 \times 5 \times 5 = 125$

16. పునరావృతాన్ని అనుమతించినప్పుడు 0, 2, 5, 7, 8 అంకెలను ఉపయోగించి *i)* 2 *ii)* 4 తో భాగించబడే 4 అంకెల సంఖ్యలు ఎన్ని ఏర్పరచవచ్చు.

జ: ఇచ్చిన అంకెలు = 0, 2, 5, 7, 8

4 అంకెల సంఖ్యలో వేల స్థానాన్ని 4 విధాలుగా నింపవచ్చు. *i)* 2 చే భాగింపబడాలంటే ఒకట్ల స్థానంలో సరి అంకె ఉండాలి. పునరావృతం అనుమతించుట వలన దీనిని 3 విధాలుగా నింపవచ్చు.

మిగిలిన రెండు స్థానాలను ఇచ్చిన 5 అంకెలతో ఒక్కొక్క దానిని 5 విధాలుగా నింపవచ్చు. అనగా వీటిని 25 విధాలుగా నింపవచ్చు.

ప్రాథమిక గణన సూత్రం నుండి ఇచ్చిన 5 అంకెలతో 2 చే భాగింపబడే 4 అంకెల సంఖ్యలు

$= 4 \times 3 \times 25 = 300$

ii) 4 చే భాగించబడే 4 అంకెల సంఖ్యలు:

ఒక సంఖ్య 4 చే భాగించబడాలంటే చివరి రెండు స్థానాలలోని (పదుల మరియు ఒకట్ల) సంఖ్య 4తో భాగించబడాలి. పునరావృతం అనుమతించుట వలన ఈ రెండు స్థానాలను, ఇచ్చిన అంకెలతో 8 విధాలుగా నింపవచ్చు (00, 08, 20, 28, 72, 80, 88)

వేల స్థానాన్ని 4 విధాలుగా నింపవచ్చు.

వందల స్థానాన్ని 4 విధాలుగా నింపవచ్చు.

$\therefore$ ఇచ్చిన అంకెలతో ఏర్పడే 4 అంకెల సంఖ్యలు

$= 8 \times 4 \times 5 = 160$

17. RAMANA **పదంలోని అక్షరాలనుపయోగించి ఎన్ని 4 అక్షరాల పదాలు తయారు చేయవచ్చు ?**

సాధన: RAMANA పదంలోని 3A లు , 3 విభిన్న (R, M, N) అక్షరాలున్నవి. 6అక్షరాలనుండి 4 అక్షరాలున్న పదాలను ఈ క్రింది విధంగా తయారు చేయవచ్చు.

Case (i): అన్ని విభిన్న అక్షరాలు

(i.e.,)R, A, M, N

4 అక్షరాల పదాలు సంఖ్య $= 4! = 24$

Case (ii): $2A$ లు, మిగిలిన రెండు R, M, N ల నుండి ఏవైనా రెండు అక్షరాలు అంటే 3 విభిన్న అక్షరాల నుండి రెండింటిని ఎన్నుకోనే విధాల సంఖ్య $= {}^3C_2$

4 అక్షరాల పదాల సంఖ్య $= {}^3C_2 \times \frac{4!}{2!}$

$=3\times\frac{24}{2}=36$

Case (iii): $3A$ లు, మిగిలిన ఒక అక్షరం R, M, N లలో ఏదో ఒకటి అంటే 3 విభిన్న అక్షరాల నుండి ఒక అక్షరాన్ని ఎన్నుకొనే విధుల సంఖ్య $^{3}C_{1}=3$

4 అక్షరాలతో ఏర్పడే పదాల సంఖ్య $=3\times\frac{4!}{3!}$

$=3\times\frac{24}{6}=12$

$\therefore$ RAMANA అనే పదంలోఅక్షరాల నుపయోగించిన ఏర్పడే 4 అక్షరాలున్న పదాల సంఖ్య = 24 + 36 + 12 = 72

18. ASSOCIATIONS **పదంలోని అక్షరాలను ఎన్ని రకాలుగా అమర్చవచ్చు ?**

i) **అన్ని** 'S' **లు కలిసి వుంటాయి ?**

ii) **రెండు** 'A' **లు విడివిడిగా ఉంటాయి ?**

సాధన: ASSOCIATIONS అనే పదంలో 12 అక్షరాలున్నాయి. వీటిలో రెండు A లు , మూడు S లు, రెండు Oలు, రెండు I లు, మిగిలినవి విభిన్న అక్షరాలున్నాయి.

ఈ 12 అక్షరాలను అమర్చడం ద్వారా వచ్చే ప్రస్తారాల సంఖ్య $=\frac{(12)!}{2!3!2!2!}$

సూచన: n వస్తువులలో p ఒక రకానికి చెందినవి q. రెండవ రకానికి చెందిన, r వేరోక రకానికి చెందిన వస్తువులై మిగిలినవి విభిన్నాలు అయిన n వస్తువులలో ఏర్పడే ప్రస్తారాల సంఖ్య $=\frac{(n)!}{p!q!r!}$

i) మూడు S లను యూనిట్‌గా భావిస్తే, మొత్తం అక్షరాల సంఖ్యలో 10 అవుతుంది. వాటిలో రెండు A లు రెండు 'O'లు, రెండు I లు వున్నాయి. కనుక ఈ అక్షరాలను అమరిస్తే వచ్చే ప్రస్తారాల సంఖ్య.

$=\frac{(10)!}{2!\,2!\,2!}$

ఇపుడు మూడు S లను వాటిలో వాటిని అమర్చే విధానాలు

$=\frac{3!}{3!}=1$

$\therefore$ కావలసిన ప్రస్తారాల సంఖ్య $\frac{(10)!}{(2!)^{3}}$

ii)రెండు 'A' లను విడిగా ఉంచితే, మిగిలిన 10 అక్షరాలలో 3'S' లు, 2'O' లు 2'I'లు ఉన్నాయి. కనుక

ఈ 10 అక్షరాలను అమర్చే విధానాలు $=\frac{(10)!}{3!2!2!}$

ఈ పది అక్షరాల మధ్య మధ్యలో, మొదట, చివర కలిపి 11 ఖాళీలున్నాయి. ఈ 11 ఖాళీలలో రెండు A లను అమర్చే విధానాలు సంఖ్య

$\frac{{}^{11}P_2}{2!}$ (రెండు A లే కనుక)

$\therefore$ కావలసిన ప్రస్తారాల సంఖ్య

$=\frac{(10)!}{3!2!2!}\times\frac{{}^{11}P_2}{2!}$

19. ENGINEERING **పదంలోని అక్షరాలన్నింటిని ఉపయోగించి, మూడు N లు కలిసి ఉండేటట్లు, మూడు E లు కలిసి లేకుండా ఎన్ని రకాల ప్రస్తారాలు వస్తాయి ?**

సాధన: ENGINEERING పదంలో 11 అక్షరాలున్నవి. అందు 3E లను 3N లు, 2G లు, 2I లు, ఒక R. 3N లను ఒక యూనిట్ అనుకుందా. మిగిలిన 8 అక్షరాలు, ఈ యూనిట్ మొత్తం 9, తొమ్మిదింటిలో 3E లు 2G లు, 2I లు ఒక R ఉన్నవి. వాటిని అమరిస్తే వచ్చే ప్రస్తారాల సంఖ్య

$=\frac{9!}{3!2!2!}\times\frac{3!}{3!}=\frac{9!}{3!2!\,2!}$

3N లను ఒక యూనిట్ , 3E లను వేరొక యూనిట్ అనుకుంటే మిగిలిన 5 అక్షరాలు.

ఈ రెండు యూనిట్లు మొత్తం 5 + 2 = 7

ఈ ఏడింటిని ఒక వరసలో అమర్చే విధాల సంఖ్య $=\frac{7!}{2!2!}$

($\because$2G లు, 2I లు ఉన్నవి కనుక)

20. 6 విభిన్నమైన ఎర్ర గులాబీలు, 3 విభిన్నమైన పసుపు పచ్చ గులాబీలను ఉపయోగించి ఎన్ని దండలు తయారుచేయవచ్చు? వీటిలో ఎన్నింటిలో

$i)$ పసుపు గులాబీలన్నీ ఒకే చోట ఉంటాయి.

$ii)$ ఏ రెండు గులాబీలన్నీ ఒకే చోట ఉంటాయి?

జ: విబిన్న ఎర్ర గులాబీల సంఖ్య = 6

విభిన్న పసుపు గులాబీల సంఖ్య = 3

మొత్తం 9 గులాబీలతో ఏర్పరచగల పూల దండలు వేలాడే వృత్తాకార ప్రస్తారాల కోవలోకి వస్తాయి కనుక

వీటిని $\frac{(9-1)!}{2}=\frac{8!}{2}=20160$ దండలు చేయవచ్చు

$i)$ ఏ రెండు పసుపు గులాబీల పక్కపక్కన లేకుండా ఉంటాయి

పసుపు గులాబీలన్నింటిని ఒక యూనిట్ అనుకుందాము. ఈ యూనిట్ మిగిలిన 6 ఎర్ర గులాబీలతో ఏర్పడే వృత్తాకార ప్రస్తారాలు $=(7-1)!=6!$

యూనిట్‌లోని 3 పసుపు గులాబీలు వాటిలో వాటిని $3!$ విధాలుగా అమర్చవచ్చు

కనుక మొత్తం వృత్తాకార ప్రస్తారాల సంఖ్య $=6!\times 3!$

కాని పువ్వుల దండలు వేలాడే వృత్తాకార ప్రస్తారాల కోవలోకి వస్తాయి. కనుక కావలసిన ప్రస్తారాల సంఖ్య

$=\frac{1}{2}\times 6!\times 3!=2160$

$ii)$ ఏ రెండు పసుపు గులాబీల పక్కపక్కన లేకుండా ఉంటాయి.

ఏ రెండు పసుపు గులాబీలు పక్కపక్కన లేకుండా ఉండాలంటే ముందుగా 6 ఎర్ర గులాబీలను అమర్చుదాం

6 విభిన్నమైన ఎర్ర గులాబీలతో ఏర్పరచగల వృత్తాకార ప్రస్తారాల సంఖ్య $=(6-1)!=5!$

ఈ 6 ఎర్ర రంగు గులాబీల మధ్యలో ఉన్న 6 ఖాళీలలో 3 పసుపు రంగు గులాబీలను ${}^{6}P_{3}$ విధాలుగా అమర్చవచ్చు. కనుక మొత్తం వృత్తాకార ప్రస్తారాల సంఖ్య $=5!\times {}^{6}P_{3}$

కాని పువ్వుల దండలు వేలాడే వృత్తాకార ప్రస్తారాల కోవలోకి వస్తాయి.

$\therefore$ కావలసిన ప్రస్తారాల సంఖ్య $\frac{1}{2}\times 5!\times {}^{6}P_{3}$

$=7200$

21. ఒక కుటుంబంలో ఒక తండ్రి, ఒక తల్లి, ఇద్దరు కుమార్తెలు, ఇద్దరు కుమారులు ఉన్నారు. ఇద్దరు కుమార్తెలు తండ్రికి ఇరుపక్కలా ఉండేటట్లుగా వీరందరినీ ఒక గుండ్రని బల్ల చుట్టూ ఎన్ని రకాలుగా అమర్చవచ్చు?

జ: కుటుంబంలో ఒక తండ్రి, ఒక తల్లి , ఇద్దరు కుమార్తెలు, ఇద్దరు కుమారులు ఉన్నారు కనుక కుటుంబ సభ్యుల సంఖ్య = 6

ఇరువురు కుమార్తెలను, తండ్రిని ఒక యేనిట్ అనుకుందాన. ఈ యేనిట్, తల్లి, ఇరువురు కుమారులు (మొత్తం 4), అందిరిని ఒక గుండ్రని బల్ల చుట్టూ అమర్చే విధాల సంఖ్య

$=(4-1)!=3!$

తండ్రికి ఇరువైపులా ఉన్న కుమార్తెలను వారిలో వారిని $2!$ విధాలుగా అమర్చవచ్చు.

$\therefore$ కావలసిన వృత్తాకార ప్రస్తారాల సంఖ్య

$=3!\times 2!=12$

22. $MISSING$ పదంలోని అక్షరాలలో రెండు $'S'$ లు కలిసి, రెండు $'I'$ లు కలిసి ఉండేలా ఎన్ని రకాలుగా అమర్చవచ్చు.

జ: ఇచ్చిన పదం $= MISSING$

$MISSING$ పదంలోని రెండు $'I'$ లను ఒక యూనిట్ అనుకుందాము. రెండు $'S'$ అను వేరొక యూనిట్ అనుకుందాము. ఈ రెండు యూనిట్‌లు,మిగిలిన మూడు అక్షరాలతో (మొత్తం 5) కలిసి $5!$ విధాలుగా అమర్చవచ్చు.

$2'S'$ లను మరియు $2'I'$ లను వాటిలో వాటిని ఒకే విధంగా అమర్చగలము.

$\therefore$ కావలసిన ప్రస్తారాల సంఖ్య $=5!\times 1=120$

23. $AJANTA$ లనే పదంలోని అక్షరాలను ప్రస్తారించడం ద్వారా వచ్చే పదాలన్నిటినీ నిఘంటువులోని క్రమంలో అమరిస్తే, ఆక్రమంలో కింది పదాల కోటిని కనుక్కోండి

$i)$ $AJANTA$ $ii)$ $JANATA$

జ: ఇచ్చిన పదం $= AJANTA$

నిఘంటవు క్రమం $= AAAJNT$

$i)$ $AJANTA$ పదం కోటి:

నిఘంటువు క్రమంలో ముందుగా A తో మొదలయ్యే పదాలు వస్తాయి. రెండవ స్థానం కూడా A తో నిండితే మిగిలిన 4 అక్షరాలను $4!$ విధాలుగా అమర్చవచ్చు.

ఇదే విధంగా కొనసాగించగా,

AA తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య $=4!=24$

$AJAA$ తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య $= 2! = 2$

$AJANA$ తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య $= 1! = 1$

తరువాత పదం $AJANTA = 0! = 1$

$\therefore AJANTA$ పదం కోటి = 24 + 2 + 1 + 1 = 28

$ii)$ $JANATA$ పదం కోటి:

నిఘంటువు క్రమంలో ముందుగా A తో మొదలయ్యే పదాలు వస్తాయి. కనుక మొదటి స్థానాన్ని A తో నింపితే మిగిలిన అక్షరాలను $\frac{5!}{2!}$ విధాలుగా నింపవచ్చు.

ఇదే విధంగా కొనసాగించగా,

A తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య $= \frac{5!}{2!} = 60$

JAA తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య $= 3! = 6$

$JANAA$ తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య $= 1! = 1$

తరువాతి పదం $JANATA = 0! = 1$

$\therefore JANATA$ పదం కోటి = 6= + 6 + 1 + 1 = 68

24. $3 \le r \le n$ **కు**

$^{(n-3)}C_r + 3\,^{(n-3)}C_{r-1} + 3\,^{(n-3)}C_{r-2} + \,^{(n+3)}C_{r-3} = {}^nC_r$ **అని నిరూపించండి.**

సాధన: LHS

$= \left[{}^{(n-3)}C_r + {}^{(n-3)}C_{r-1}\right] + 2\left[{}^{(n-3)}C_{r-1} + {}^{(n-3)}C_{r-2}\right] + \left[{}^{(n-3)}C_{r-2} + {}^{(n-3)}C_{r-3}\right]$

$= {}^{(n-3+1)}C_r + 2\,{}^{(n-3+1)}C_{r-1} + {}^{(n-3+1)}C_{r-2}$

$= {}^{(n-2)}C_r + 2\,{}^{(n-2)}C_{r-1} + {}^{(n-2)}C_{r-2}$

$= \left[{}^{(n-2)}C_r + {}^{(n-2)}C_{r-1}\right] + \left[{}^{(n-2)}C_{r-1} + {}^{(n-2)}C_{r-3}\right]$

$= {}^{(n-2+1)}C_r + {}^{(n-2+1)}C_{r-1}$

$= {}^{(n-1)}C_r + {}^{(n-1)}C_{r-1}$

$= {}^{(n-1+1)}C_r + {}^nC_r$

$\therefore \text{LHS} = \text{RHS}$

25. **సూక్ష్మీకరించండి.** $^{34}C_5 + \sum_{r=0}^{4} {}^{(38-r)}C_4$.

(May11)

సాధన: సూచన: $^{n}C_r + {}^{n}C_{r-1} = {}^{(n+1)}C_r$

$^{34}C_5 + \sum_{r=0}^{4} {}^{(38-r)}C_4 = {}^{34}C_5 + {}^{38}C_4 + {}^{37}C_4 +$

$^{36}C_4 + {}^{35}C_4 + {}^{34}C_4$

$= ({}^{35}C_5 + {}^{34}C_4) + {}^{34}C_4 + {}^{36}C_4 + {}^{37}C_4 + {}^{38}C_4$

$= ({}^{35}C_5 + {}^{35}C_4) + {}^{36}C_4 + {}^{37}C_4 + {}^{38}C_4$

$= ({}^{36}C_5 + {}^{36}C_4) + {}^{37}C_4 + {}^{38}C_4$

$= ({}^{37}C_5 + {}^{37}C_4) + {}^{38}C_4$

$= {}^{38}C_5 + {}^{38}C_4$

$= {}^{39}C_5$

26. **4 సరూప నాణేలను 5 గురు బాలురకు ఎవరికైనా ఎన్నైనా ఇచ్చే పద్ధతిలో ఎన్ని రకాలుగా పంచవచ్చు ?**

సాధన: 4 సరూప నాణేలను ఈ క్రింది విభిన్న సముహాలుగా విభజించవచ్చు.

i) ఒక సముహంలో 4 నాణేలు.

ii) రెండు సముహలలో వరుసగా 1, 3 నాణేలు

iii) రెండు సముహలలో వరుసగా 2, 2 నాణేలు

iv) రెండు సముహలలో వరుసగా 3, 1 నాణేలు

v) మూడు సముహలలో వరుసగా 1, 1, 2 నాణేలు

vi) మూడు సముహలలో వరుసగా 1, 2, 1 నాణేలు

vii) మూడు సముహలలో వరుసగా 2, 1, 1 నాణేలు

viii) నాలుగు సముహలలో వరుసగా 1, 1, 1, 1 నాణేలు

ఈ సముహలను 5 గురు బాలురకు పంచే విధాల సంఖ్య

$= {}^{5}C_1 + 2 \times {}^{5}C_2 + {}^{5}C_2 + {}^{5}C_3 \times \frac{3!}{2!} + {}^{5}C_4$

$= 5 + 20 + 10 + 30 + 5 = 70$

27. $\dfrac{{}^{4n}C_{2n}}{{}^{2n}C_n} = \dfrac{1.3.5.......(4n-1)}{\{1.3.5........(2n-1)\}^2}$ **అని నిరూపించండి.**

సాధన: $\dfrac{{}^{4n}C_{2n}}{{}^{2n}C_n} = \dfrac{\dfrac{(4n)!}{(2n)!(2n)!}}{\dfrac{(2n)!}{n!n!}}$

సూచన : ${}^{n}C_r = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$

$$= \frac{(4n)!}{(2n)!^2} \times \frac{n!n!}{(2n)!}$$

$$= \frac{(4n)(4n-1)(4n-2)(4n-3)(4n-4)...5.4.3.2.1}{[(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)...5.4.3.2.1]^2} \times \frac{n!n!}{(2n)!}$$

$$= \frac{[(4n-1)(4n-3)....5.3.1](2n)(2n-1)...2.1.2^{2n}]}{[\{(2n-1)(2n-3)....5.3.1\}\{n(n-1)(n-2)....2.1.2^n\}]^2} \times \frac{n!n!}{(2n)!}$$

$$= \frac{[(4n-1)(4n-3)..........5.3.1](2n)!2^{2n}}{[(2n-1)(2n-3).....5.3.1]^2[n!]^2(2^n)^2} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$= \frac{1.3.5.....(4n-1)}{[1.3.5....(2n-1)]^2}$$

$$\therefore \frac{{}^{4n}C_{2n}}{{}^{2n}C_n} = \frac{1.3.5.....(4n-1)}{[1.3.5........(2n-1)]^2}$$

28. ఒక సమితి A లో 12 మూలకాలున్నాయి. ఆ సమితిలో

i) 4 మూలకాలున్న ఉపసమితులెన్ని ?

ii) కనీసం 3 మూలకాలున్న ఉపసమితులెన్ని

iii) 3 లేదా అంతకంటే తక్కువ మూలకాలున్న ఉపసమితులెన్ని

సాధన: సమితి A లో వున్న మూలకాలు సంఖ్య = 12

i) 4 మూలకాలున్న ఉపసమితుల సంఖ్య

$$= {}^{12}C_4 = \frac{2\times 11\times 10\times 9}{1\times 2\times 3\times 4} = 495$$

ii) కనీసం 3 మూలకాలున్న ఉపసమితులు

పై లెక్క ప్రకారం కనీసం రెండు మూలకాలున్న ఉపసమితులు

$$= {}^{12}C_0 + {}^{12}C_1 + {}^{12}C_2 = 1 + 12 + 66 = 79$$

A సమితిలున్న మొత్తం ఉపసమితుల సంఖ్య $= 2^{12}$

$\therefore$ కనీసం 3 మూలకాలున్న ఉపసమితులు

$$= 2^{12} - (79) = 4096 - 79 = 4017$$

iii) 3 లేదా అంతకంటే తక్కువ మూలకాలున్న ఉపసమితులు సున్నా మూలకాలు (i.e.,) మూలకాలు లేని ఉపసమితి ల సంఖ్య $= {}^{12}C_0 = 1$

ఒకే ఒక మూలకము వున్న ఉపసమితులు

$$= {}^{12}C_1 = 12$$

మూడు మూలకములు వున్న ఉపసమితులు

$$= {}^{12}C_2 = \frac{12\times 11}{1\times 2} = 66$$

$$= {}^{12}C_3 = \frac{12\times 11\times 10}{1\times 2\times 3} = 220$$

$\therefore$ కనీసం 3 మూలకాలున్న ఉపసమితులు

$$= 1 + 12 + 66 + 220 = 299$$

29. ఏడుగురు బాట్స్‌మెన్, ఆరుగురు బౌలర్లు నుంచి కనీసం అయిదుగురు బౌలర్లు ఉన్న పదకొండు మంది క్రికెట్ టీమును ఎన్ని రకాలుగా ఏర్పరచవచ్చు.

సాధన: కనీసం 5గురు బౌలర్లు ఉన్న పదకొండు క్రికెట్ టీమును క్రింద చూపి విధాలుగా ఎంచుకోవచ్చు

వ. నెం	బౌలర్లు	బాట్స్‌మెన్	ఎంచుకునే విధానం
1	5	6	${}^6C_5 \times {}^7C_6 = 6 \times 7 = 42$
2	6	5	${}^6C_6 \times {}^7C_5 = 1 \times \frac{7 \times 6}{1 \times 2} = 21$

$\therefore$ కోరిన విధంగా క్రికెట్ టీముని ఎంచుకొనే విధానాలు

$= 42 + 21 = 63$

30. ఒక రెండతస్తుల బస్సు క్రింద అంతస్తులో 13 సీట్లు పై అంతస్తులో 12 సీట్లు ఉన్నాయి. ఈ బస్సులో నలుగురు వృద్ధులు పై అంతస్తులోకి వెళ్ళలేరు. ముగ్గురు పిల్లలు పై అంతస్తులో మాత్రమే ప్రయాణం చేయాలంటే మొత్తం 25 మందిని ఎన్ని రకాలుగా అమర్చవచ్చు ?

సాధన: ముగ్గురు పిల్లలు పై అంతస్తులోనూ, నలుగురు వృద్ధులు క్రింది అంతస్తులోనూ ప్రయాణిస్తారనుకొంటే మిగిలిన 25 – 7 = 18 మంది ప్రయాణీకులలో 9 మంది క్రింది అంతస్థులో, 9 మంది క్రింది అంతస్థులో, 9 మంది పై అంతస్తులో ప్రయాణించాలి. కనుక 18 మంది నుంచి 9 మందిని ఎంచుకొనే విధానాలు $= {}^{18}C_9$ మిగిలిన 9 మందిని $= {}^9C_9 = 1$ విధంగా ఎంచుకోవచ్చు.

వ. నెం.	భారతీయులు (6)	అమెరికా దేశస్థులు(5)	కమిటీని ఎంచుకొనే విధాల సంఖ్య
1.	3	2	${}^6C_3 \times {}^5C_2$ $= 20 \times 10 = 200$
2.	4	1	${}^6C_4 \times {}^5C_1$ $= 15 \times 5 = 75$
3.	5	-	${}^6C_5 \times {}^5C_0$ $= 6 \times 1 = 6$

ఇపుడు క్రింది అంతస్తులో ఉన్న 13 మంది వారిలో వారు $(13)!$ విధాలుగా పై అంతస్తులో ఉన్న 12 మంది వారిలో వారు $(12)!$ విధాలుగా కూర్చోవచ్చు. కనుక 25 మందిని కోరిన విధంగా అమర్చే విధాల సంఖ్య

$= ({}^{18}C_9)(13!)(12!)$

31. ఒక తరగతిలో నలుగురు బాలురు, g బాలికలున్నారు. ప్రతీ ఆదివారం వారిలో కనీసం ముగ్గురు బాలురు ఉండేలా 5 గురు ఉన్న సమూహం విహారయాత్రకు వెళ్తారు. ప్రతీ ఆదివారం వేర్వేరు సమూహాలు విహారయాత్రకు వేళ్లాయి. వారి తరగతి ఉపాధ్యాయిని విహారయాత్రకు వచ్చిన, ప్రతీ అమ్మాయికి (ప్రతిసారి) ఒక్కో బొమ్మ ఇవ్వగా వచ్చే మొత్తం బొమ్మల సంఖ్య 85 అయితే g విలువ కనుక్కోండి.

జ: ఒక తరగతిలో నలుగురు బాలురు, 'g' బాలికలున్నారు. అయిదుగురు విద్యార్థుల సమూహములో కనీసం ముగ్గురు బాలురను ఈ క్రింది రెండు విధాలుగా ఎన్నుకోవచ్చు

సందర్భం i: (ముగ్గురు బాలురు, ఇద్దరు బాలికలను ఎన్నుకొనుట)

ముగ్గురు బాలురు, ఇద్దరు బాలికలను ఎన్నుకొనే విధానాల సంఖ్య $= {}^4C_3 \times {}^gC_2 = 4({}^gC_2)$

ఎన్నుకొన్న ప్రతీసారి ఇద్దరు బాలికలను ఉంటారు కనుక, కావలసిన బొమ్మలు $= {}^4C_3 \times {}^gC_2 = 4({}^gC_2)$

సందర్భం ii): (నలుగురు బాలరు, ఒక్క బాలికలను ఎన్నుకొనుట)

నలుగరు బాలురు, ఒక్క బాలికను ఎన్నుకొనే విధానాల సంఖ్య $= {}^4C_4 \times {}^gC_1 = g$

$\therefore$ ఎన్నుకొన్న ప్రతిసారీ ఒక బాలిక ఉంటుంది కనుక, కావలసిన బొమ్మలు $= g$

$\therefore$ మొత్తం బొమ్మలు $= 8({}^gC_2) + g$

ఇచ్చిన నియమము నుండి, మొత్తం బాలికలకు ఇచ్చిన బొమ్మల సంఖ్య = 85

$$\therefore 85 = 8\frac{g(g-1)}{2} + g$$

$$\Rightarrow 85 = 4g^2 - 3g$$

$$\Rightarrow 4g^2 - 3g - 85 = 0$$

$$\Rightarrow (4g+17)(g-5) = 0$$

$\Rightarrow g = 5$ ($\because$ 'g' పూర్ణాంకము) కనుక .

32. పునరావృత్తాన్ని అనుమతించినప్పుడు 1, 2, 3, 4, 5, 6 అంకెలతో ఏర్పరిచే 4 అంకెల సంఖ్యలలో ఎన్ని i) 2 ii) 3 తో భాగించబడతాయి.

జ: i) 2 తో భాగించబడే సంఖ్యలు:

4 ఖాళీ స్థానాలు తీసుకొందాం ఒక సంఖ్య 2తో భాగించబడాలంటే

			X

ఒకట్ల స్థానంలో సరి సంఖ్య ఉండాలి. కనుక ముందుగా ఒకట్ల స్థానాన్ని ఒక సరి సంఖ్య (2 లేదా 4 లేదా 6) తో '3' విధాలుగా నింపవచ్చు. మిగిలిన 3 స్థానాలలో ఒక్కోస్థానాన్ని ఇచ్చిన 6 అంకెలలో దేనితోనైనా 6 విధాలుగా నింపవచ్చు. కనుక 2 తో భాగించబడే 4 అంకెల సంఖ్యల సంఖ్య

$= 3 \times 6^3 = 3 \times 216 = 648$

ii) 3 తో భాగించబడే సంఖ్యలు:

" ౘ ^ Î ÷3 ª ËÖŒ ° XHËø ª ËÖŒß6 q ^ ¥ °Qê, J O> ë" ౘ ` ÉÞ 6^3 విధాలుగా నింపవచ్చు.

X	X	X	

ఈ విధంగా మొదటి మూడు స్థానాలు నింపాక, ఒకట్ల స్థానం నింపడానికి 6 వరుస పూర్ణాంకాలున్నాయి. వీటితో ఒకట్ల స్థానాన్ని నింపితే 6 వరుస ధన సంఖ్యలు వస్తాయి.

ప్రతీ 3 వరస ధనపూర్ణాంకాలలో కచ్చితంగా ఒకే ఒక సంఖ్య 3 తో భాగించబడుతుందని మనకు తెలుసు. కనుక పైన చెప్పిన 6 వరుస ధనపూర్ణాంకాలలో కచ్చితంగా రెండు మాత్రమే 3 తో భాగించబడతాయి. అంటే ఒకట్ల స్థానాన్ని 2 విధాలుగా మాత్రమే నింపవచ్చు. కనుక 3 తో భాగించబడే 4 అంకెల సంఖ్యల సంఖ్య $=2\times 216=432$

33. ***SINGING*** **పదంలోని అక్షరాలను**

i) *I* తో మొదలయి, *I* తో అంతమయ్యేలా

ii) రెండు *G* లు కలిసి ఉండేలా

iii) అచ్చులు, హల్లులు సాపేక్ష స్థానాలు మారకుండా ఎన్ని విధాలుగా అమర్చవచ్చు?

జ: *i*) ముందుగా మొదటి, చివరి స్థానాలను రెండు I లతో కింద చూపిన విధంగా ఒకే ఒక రకంగా $\left(\frac{2!}{2!}\right)$ నింపిన తరువాత

I						I

ఇంకా 5 స్థానాలు, 5 అక్షరాలు ఉంటాయి. ఈ మిగిలిన 5 అక్షరాలలో రెండు N లు, రెండు G లు ఉన్నాయి. కనుక వీటిని అమర్చే విధానాలు

$$=\frac{5!}{2!\,2!}=30$$

$\therefore$ కావలసిన ప్రస్తారాల సంఖ్య = 30

ii) రెండు G అను ఒక యూనిట్‌గా భావిస్తే, మొత్తం అక్షరాల సంఖ్య = 5 + 1 = 6. వీటిలో రెండు I లు, రెండు N లు ఉన్నాయి. కనుక ఈ 6 అక్షరాలను అమర్చే విధానాలు

$$=\frac{6!}{2!2!}=180$$

ఇప్పుడు రెండు G లు ఒకే రకంగా ఉండటం వల్ల, వాటిలో వాటిని ఒక రకంగా $\left(\frac{2!}{2!}\right)$ మాత్రమే అమర్చగలం.

$\therefore$ రెండు G లు కలిసి ఉండే పదాల సంఖ్య = 180

iii) *SINGING* పదంలో రెండు అచ్చులు (I, I), 5 హల్లులు, (రెండు N లు, రెండు G లు, ఒక S) ఉన్నాయి. రెండు అచ్చులను వాటిలో వాటిని అమర్చే విధానాలు $= \frac{2!}{2!} = 1$

5 హల్లులను వాటిలో అమర్చే విధానాలు $\frac{5!}{2!2!} = 30$

$\underline{C}\,\underline{V}\,\underline{C}\,\underline{C}\,\underline{V}\,\underline{C}\,\underline{C}$ (ఇక్కడ V ఒక అచ్చుని, C ఒక హల్లుని సూచిస్తాయి)

$\therefore$ కావలసిన ప్రస్తారాల సంఖ్య = 1 × 30 = 30

34. ***EAMCET* పదంలోని అక్షరాలతో ఏర్పడే 6 అక్షరాల పదాలన్నింటినీ నిఘంటువులోని క్రమంలో అమరిస్తే, ఆ క్రమంలో *EAMCET* పదం యొక్క కోటిని కనుక్కోండి.**

జ: దత్త పదంలోని అక్షరాల నిఘంటువు క్రమం

$A \quad C \quad E \quad E \quad M \quad T$

నిఘంటువులో ముందుగా A తో మొదలయ్యే పదాలన్నీ వస్తాయి. కనుక మొదటి స్థానాన్ని A తో నింపితే మిగిలిన 5 అక్షరాలను $\frac{5!}{2!}$ విధాలుగా (ఈ 5 అక్షరాలలో 2 E లు ఉన్నాయి కనుక) అమర్చవచ్చు. ఇదే విధంగా *EAMCET* పదం వచ్చే వరకూ కింది విధంగా గణిస్తాం

$A \quad \rightarrow \frac{5!}{2!}$ పదాలు

$C \quad \rightarrow \frac{5!}{2!}$ పదాలు

$E\ A\ C \quad \rightarrow 3!$ పదాలు

$E\ A\ E \quad \rightarrow 3!$ పదాలు

$E\ A\ M\ C\ E\ T \quad \rightarrow 1$ పదం

$\therefore$ *EAMCET* పదం యొక్క కోటి

$= 2 \times \frac{5!}{2!} + 2 \times 3! + 1 = 120 + 12 + 1 = 133$

35. **ఏడుగురు బాట్స్‌మెన్, ఆరుగురు బౌలర్లు, ఇద్దరు వికెట్ కీపర్ల నుంచి కనీసం నలుగురు బౌలర్లు, ఇద్దరు వికెట్ కీపర్లు ఉండేలా 11 మంది ఆటగాళ్లతో క్రికెట్ టీమును ఎన్ని రకాలుగా ఎంచుకోవచ్చు.**

జ: కనీసం నలుగురు బౌలర్లు, ఇద్దరు వికెట్ కీపర్లు ఉండాలంటే టీమును కింద చూపిన విధాలుగా ఎంచుకోవచ్చు.

బౌలర్లు	వికెట్ కీపర్లు	బాట్స్‌మెన్	ఎంచుకొనే విధానాలు
4	2	5	${}^6C_4 \times {}^2C_2 \times {}^7C_5$ $=15\times1\times21=315$
5	2	4	${}^6C_5 \times {}^2C_2 \times {}^7C_4$ $=6\times1\times35=210$
6	2	3	${}^6C_6 \times {}^2C_2 \times {}^7C_3$ $=1\times1\times35=35$

$\therefore$ కోరిన విధంగా క్రికెట్ ఎంచుకొనే విధానాలు

= 315 + 210 + 35 = 560

36. **$'m'$ సమాంతర రేఖలు మరొక n సమాంతర రేఖలను (మొదటి రేఖలకు సమాంతరంగా లేని) ఖండిస్తే ఎన్ని సమాంతర చతుర్భుజాలు ఏర్పడతాయి)**

జ: ఒక సమాంతర చతుర్భుజం ఏర్పడాలంటే మొదటి m సరళరేఖల నుంచి 2 సరళరేఖలు ఎంచుకోవాలి. ఈ విధానాలు ${}^mC_2$ రెండో సమితిలోని n సరళరేఖల నుంచి 2 సరళరేఖలు ఎంచుకోవాలి. ఈ విధానాల సంఖ్య ${}^nC_2$.

$\therefore$ దత్త సరళరేఖలు ఖండించుకోవడం వల్ల ఏర్పడే సమాంతర చతుర్భజాల సంఖ్య $={}^mC_2\times{}^nC_2$

37. **ఒక తలంలో $'m'$ బిందువులున్నాయి. వాటిలో $'p'$ బిందువులు సరేఖీయాలు. మిగిలిని బిందువులతో ఏ మూడు బిందువులు సరేఖీయాలు కాకపోతే, ఈ బిందువులను రేఖాఖండాల ద్వారా కలిపితే వచ్చే విభిన్న**

$i)$ **రేఖాఖండాలు ఎన్ని.**

$ii)$ **త్రిభుజాలు ఎన్ని.**

జ: $i)$ ఇచ్చిన $'m'$ బిందువుల నుంచి రెండు బిందువులను ఎంచుకొని కలిపితే ఒక రేఖాఖండం వస్తుంది. కనుక ${}^mC_2$ రేఖాఖండాలు రావాలి. కాని ఈ $'m'$ బిందువులలో $'p'$ బిందువులను వాటిలో వాటిని

రెండు బిందువుల చొప్పున కలిపితే ${}^{p}C_2$ రేఖాఖండాలు రావడానికి బదులుగా 1 రేఖాఖడం మాత్రమే వస్తుంది. కనుక దత్త 'm' బిందువులను కలపడం

ద్వారా వచ్చే విభిన్న రేఖాఖండాల సంఖ్య $= {}^{m}C_2 - {}^{p}C_2 + 1$

ii) ఇచ్చిన 'm' బిందువులను 3 బిందువుల చొప్పున కలిపితే త్రిభుజాలు ఏర్పడతాయి. కనుక ${}^{m}C_3$ త్రిభుజాలు రావాలి. కాని ఈ 'm' బిందువులలో p బిందువులు సరేఖీయాలు కనుక ఈ p బిందువుల నుంచి 3 బిందువుల చొప్పున ఎంచుకొని కలిపితే ${}^{p}C_3$ త్రిభుజాలు రావడానికి బదులుగా ఒక రేఖాఖండం వస్తుంది. (అంటే ఒక్క త్రిభుజం కూడా రాదు)

$\therefore$ ఇచ్చిన 'm' బిందువులను కలపడం ద్వారా ఏర్పడే త్రిభుజాల సంఖ్య $= {}^{m}C_3 - {}^{p}C_3$

గమనిక: n భుజాలున్న బహుభుజిలోని కర్ణాల సంఖ్య $= {}^{n}C_2 - n = \frac{n(n-3)}{2}$

38. ఒక ఉపాధ్యాయుడు పదిమంది విద్యార్థులను పార్కుకు తీసుకొని వెళ్ళాలి. ఒక్కొక్కసారి ముగ్గురు విద్యార్థులు చొప్పున తీసుకొని వెళ్ళగలడు. కాని ఏ ముగ్గురు విద్యార్థుల బృందాన్నైనా ఒక్కసారి మాత్రమే తీసుకొని వెళతాడు

***i*) ప్రతీ విద్యార్థికి ఎన్నిసార్లు పార్కుకు వెళ్ళే అవకాశం ఉంది**

***ii*) ఉపాధ్యాయుడు ఎన్నిసార్లు పార్కుకు వెళ్ళే అవకాశం ఉంది.**

జ: *i*) 10 మంది విద్యార్థులలో x ఒకరు అనుకొందాం. పార్కుకు x వెళ్ళే ప్రతీసారి ఇంకా ఇద్దరు విద్యార్థులను మిగిలిన 9 మంది విద్యార్థుల నుంచి ఎంచుకోవాలి. ఈ పనిని ${}^{9}C_2$ విధాలుగా చేయవచ్చు.

$\therefore x$ అనే విద్యార్థి పార్కుకు ${}^{9}C_2 = 36$ సార్లు వెళతాడు

ii) 10 మంది విద్యార్థుల నుంచి 3 విద్యార్థులను ఎంపిక చేసిన ప్రతీసారి ఉపాధ్యాయుడు పార్కుకు వెళతాడు.

$\therefore$ ఉపాధ్యాయుడు ${}^{10}C_3 = 120$ సార్లు పార్కుకు వెళతాడు.

39. *i*) ${}^{12}C_{(s+1)} = {}^{12}C_{(2s-5)}$ **అయితే** s **ను కనుక్కోండి.**

ii) ${}^{n}C_{21} = {}^{n}C_{27}$ **అయితే** ${}^{50}C_n$ **విలువ కనుక్కోండి.**

జ: *i*) ${}^{12}C_{(s+1)} = {}^{12}C_{(2s-5)}$

$\Rightarrow s+1 = 2s-5$

లేదా $(s+1)+(2s-5) = 12$

$\Rightarrow s = 6$ లేదా $s = \frac{16}{3}$

$\Rightarrow s = 6$ ($\because$ s పూర్ణాంకం)

$ii)\ \ {}^{n}C_{21} = {}^{n}C_{27} \Rightarrow n = 21 + 27 = 48$

$${}^{50}C_{n} = {}^{50}C_{48} = {}^{50}C_{2} = \frac{50 \times 49}{1 \times 2} = 1225$$

40. ఒక వృత్తాకార బల్ల చుట్టూ 14 మంది వ్యక్తులు కూర్చొని ఉన్నారు. వారిలో ఇద్దరు వ్యక్తులను పక్కపక్కన లేకుండా ఎన్ని రకాలుగా ఎంచుకోవచ్చు?

జ: మనకు ఇచ్చిన 14 మంది వ్యక్తులు వృత్తాకార బల్ల చుట్టూ పటంలో చూపిన విధంగా కూర్చొని ఉన్నారనుకొందాం

ఈ 14 మంది వ్యక్తుల నుంచి ఇద్దరిని ఎంచుకొనే విధానాలు

$= {}^{14}C_{2} = 91$

ఈ విధానాలలో ఎంచుకొన్న ఇద్దరు వ్యక్తులు పక్కపక్కనే ఉండే విధానాలు $a_1a_2, a_2a_3, \ldots\ldots, a_{13}a_{14}, a_{14}a_1$

అంటే 14 విధానాలు

$\therefore$ ఎంచుకొన్న 2 వ్యక్తులు పక్కపక్కన లేని విధానాలు

= 91 × 14 = 77 ।

41. ఆరుగురు బాలురు, ఆరుగురు బాలికలను ఒక వరసలో అమర్చ గలిగే విదానాలెన్ని ? వాటిలో ఎన్నిటిలో

i) బాలికలందరూ కలిసి ఉంటారు

ii) ఏ ఇద్దరు బాలికలు పక్క పక్కన రాకుండా ఉంటారు.

iii) బాలురు, బాలికలు ఒకరి తరువాత ఒకరుగా ఉంటారు.

సాధన: ఆరుగురు బాలురు, ఆరుగురు బాలికలు కలిపి మొత్తం 12 మంది వ్యక్తులున్నారు. కనుక వీరిని ఒక వరసలో అమర్చ గలిగే విధానాలు $12!$

i) ఆరుగురు బాలికలను ఒక యూనిట్‌గా భావిస్తే, అపుడు ఆరుగురు బాలురు + ఒక బాలికల యూనిట్ ఉంటాయి. వాటిని ఒక వరసలో $7!$ విధాలుగా అమర్చవచ్చు. ఇప్పుడు, ఆరుగురు బాలికలను వారిలో వారిని $6!$ విధాలుగా అమర్చవచ్చు. కనుక ఆరుగురు బాలికలు కలిసి ఉండేలా అమర్చ గలిగే విధానాలు $= 7! \times 6!$

$\times\ \boxed{B}\ \times\ \boxed{B}\ \times\ \boxed{B}\ \times\ \boxed{B}\ \times\ \boxed{B}\ \times\ \boxed{B}\ \times$

ii) ముందుగా ఆరుగురు బాలురను ఒక వరసలో $6!$ విధాలుగా అమర్చవచ్చు. అప్పుడు బాలుర మధ్యలో మొదట, చివర మొత్తం.

7 ఖాళీలుంటాయి. (పైనే ఖాళీలను × తో సూచించాం)

ఈ 7 ఖాళీలలో ఆరుగురు బాలికలను అమర్చే విధానాలు ${}^{7}P_{6}$ కనుక ఏ ఇద్దరు బాలికలు పక్క పక్కన

రాకుండా అమర్చే విధానాలు $6!\times {}^7P_6 = 7.6!.6!$

iii) వరస బాలుడు లేదా బాలికతో మొదలు కావచ్చు అంటే అవి 2 విధాలు ఉదాహరణకు బాలుడితో మొదలయిందనుకొందాం. అప్పుడు బాలురు, బాలికలు ఏకాంతంగా రావలంటే బాలురను బేసి సంఖ్య గల స్థానాల్లో బాలికలను సరిసంఖ్య గల స్థానాల్లో అమర్చాలి. కనుక

ఆరుగురు బాలురను సరి సంఖ్య గల 6 స్థానాలలో అమర్చే విధానాలు $= 6!$

ఆరుగురు బాలికలను బేసి సంఖ్య గల 6 స్థానాలలో అమర్చే విధానాలు $= 6!$

కనుక కావలసిన ప్రస్తారాల సంఖ్య $= 2\times 6!\times 6!$

42. MIRACLE **పదంలోని అక్షరాలను ఉపయోగించి 4 అక్షరాల పదాలు ఎన్ని తయారు చేయవచ్చు ? వాటిలో ఎన్ని పదాలుః**

i) **అచ్చుతో మొదలవుతాయి ?**

ii) **అచ్చుతో మొదలయి, అచ్చులో అంతమవుతాయి ?**

iii) **హల్లుతో అంతమవుతాయి.**

సాధన: MIRACLE పదంలో 7 అక్షరాలున్నాయి. కనుక వీటిని ఉపయోగించి ఏర్పరిచే 4 అక్షరాల పదాల సంఖ్య

$= {}^7P_4 = 7\times 6\times 5\times 4 = 840$

ఇపుడు నాలుగు ఖాళీ స్థానాలు తీసుకుందాం

□□□□

i) మొదటి స్థానాన్ని ఇచ్చిన పదంలోని 3 అచ్చులలో $\{I, A, E\}$. ఏదో ఒకదానితో 3 విధాలుగా నింపవచ్చు

మిగిలిన 3 స్థానాలను మిగిలిన 6 అక్షరాలతో నింపే విధానాలు

$= {}^6P_3 = 6\times 5\times 4 = 120$

కనుక అచ్చుతో మొదలయ్యే 4 అక్షరాల పదాల సంఖ్య

$= 3\times 120 = 360$

ii) ముందుగా మొదటి, చివరి స్థానాలను అచ్చులతో $\{I, A, E\}$ నింపే విధానాలు $= {}^3P_2 = 3\times 2 = 6$

మిగిలిన 2 స్థానాలను మిగిలిన 5 అక్షరాలలో నింపే విదానాలు $= {}^5P_2 = 5\times 4 = 20$

కనుక అచ్చులో మొదలయ్యి అచ్చుతో అంతమయ్యే 4 అక్షరాల పదాలు = 6 × 20 = 120

iii) చివరి స్థానాన్ని 4 హల్లులో ఒక దానితో నింపే విధానాలు $= {}^4P_1 = 4$

మిగిలిన 3 స్థానాలు మిగిలిన 6 అక్షరాలతో నింపే విధానాలు $= {}^6P_3 = 6\times 5\times 4 = 120$

కనుక హల్లుతో అంతమయ్యే 4 అక్షరాల పదాల సంఖ్య

$= 4 \times 120 = 480$

43. ఎనిమిది మంది పురుషులను, నలుగురు స్త్రీలను ఒక వృత్తాకార బల్ల చుట్టూ ఎన్ని రకాలుగా అమర్చవచ్చు ? వీటిలో ఎన్ని ప్రస్తారాలలో

i) స్త్రీలంతా ఒకేచోట ఉంటారు

ii) ఏ ఇద్దరూ స్త్రీలు పక్క పక్కన రాకుండా ఉంటారు.

సాధన: మొత్తం వ్యక్తుల సంఖ్య = 12 (ఎనిమిది మంది పురుషులు + నలుగురు స్త్రీలు)

కనుక వీరిని వృత్తాకార బల్ల చుట్టూ అమర్చే విధానాలు $= (11)!$

i) నలుగురు స్త్రీలను ఒక యూనిట్‌గా భావిస్తే. అప్పుడు మొత్తం వ్యక్తుల సంఖ్య

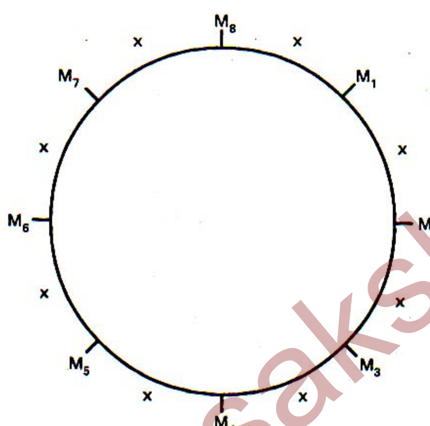
ఎనిమిది మంది పురుషులు + 1 యూనిట్ స్త్రీలు = 9

కనుక వీరిని ఒక వృత్తాకార బల్ల చుట్టూ అమర్చే విధానాలు $= 8!$

ఇప్పుడు, నలుగురు స్త్రీలు ఒకేచోట ఉండే వృతాకార ప్రస్తారాల సంఖ్య $= 8! \times 4!$

ii) ముందుగా ఎనిమిది మంది పురుషులను ఒక వృత్తాకార బల్ల చుట్టూ అమర్చే విధానాలు $= (8-1)! = 7!$

వీరిలో ప్రతీ ఇద్దరు పురుషుల మధ్య



ఒక్కో ఖాళీ చొప్పున మొత్తం 8 ఖాళీలు ఉంటాయి. (ఈ ఖాళీలను పైన పటంలో x అనే గుర్తుతో సూచించాం)

ఇప్పుడు ఈ 8 ఖాళీలలో నలుగురు స్త్రీలను అమర్చే విధానాలు $= {}^{8}P_{4}$

కనుక ఏ ఇద్దరు స్త్రీలు పక్క పక్కన లేని వృత్తాకార ప్రస్తారాల సంఖ్య $7! \times {}^{8}P_{4}$

44. 7 విభిన్నమైన ఎర్ర గులాబీలు, 4 విభిన్నమైన పసుపు రంగు గులాబీలతో ఏ రెండు పసుపు రంగు గులాబీలు పక్క పక్కన రాకుండా ఎన్ని రకాలుగా దండలు తయారు చేయవచ్చు?

సాధన: ముందుగా 7 విభిన్నమైన ఎర్రగులాబీలతో ఏర్పరచగల వృత్తాకార ప్రస్తారాల సంఖ్య $=(7-1)!=6!$

ఈ 7 ఎర్రగులాబీల మధ్యలో ఉన్న 7 ఖాళీలలో 4 పసుపు రంగు గులాబీల మధ్యలో ఉన్న 7 ఖాళీలలో 4 పసుపు రంగు గులాబీలను ${}^{7}P_{4}$ విధాలుగా అమర్చవచ్చు. కనుక మొత్తం వృత్తాకార ప్రస్తారాల సంఖ్య $=6!\times{}^{7}P_{4}$ కాని పువ్వుల దండలు వేలాడే వృత్తాకార ప్రస్తారాల కోవలోకి వస్తాయి. కనుక కావలసిన ప్రస్తారాల సంఖ్య

$$=\frac{1}{2}(6!\times{}^{7}P_{4})$$

45. ఒక తలంలో m బిందువులున్నాయి. వాటిలో p బిందువులు సరేఖీయాలు, మిగిలిన బిందువులలో ఏ మూడు బిందువులు సరేఖీయాలు కాకపోతే, ఈ బిందువులను రేఖా ఖండాల ద్వారా కలిపితే వచ్చే విభిన్న

i) రేఖా ఖండాలెన్ని

ii) త్రిభుజాలెన్ని

సాధన: i) ఇచ్చిన m బిందువుల నుంచి రెండు బిందువులను ఎంచుకొని కలిపితే ఒక రేఖా ఖండం వస్తుంది. కనుక ${}^{m}C_{2}$ రేఖా ఖండాలు రావలి. కాని ఈ m బిందువులలో p బిందువులు సరేఖీయాలు కనుక ఈ బిందువులను వాటిలో వాటిని రెండు బిందువులను వాటిలో వాటిని రెండు బిందువుల చొప్పున కలిపితే ${}^{p}C_{2}$ రేఖాఖండాలు రావడానికి బదులుగా 1 రేఖా ఖండం మాత్రమే వస్తుంది. కనుక దత్త m బిందువులను కలపడం ద్వారా వచ్చే విభిన్న రేఖా ఖండాల సంఖ్య

$$={}^{m}C_{2}-{}^{p}C_{2}+1$$

ii) ఇచ్చిన m బిందువులను 3 బిందువుల చొప్పున కలిపితే త్రిభుజాలు ఏర్పడతాయి. కనుక ${}^{m}C_{3}$ త్రిభుజాలు రావాలి. కాని ఈ m బిందువులలో p బిందువుల నుంచి 3 బిందువుల చొప్పున ఎంచుకొని కలిపితే ${}^{p}C_{3}$ త్రిభుజాలు రావడానికి బదులుగా ఒక రేఖాఖండం వస్తుంది. (అంటే ఒక్క త్రిభుజం కూడా రాదు). కనుక ఇచ్చిన m బిందువులను కలపడం ద్వారా ఏర్పడే త్రిభుజాల సంఖ్య

$$={}^{m}C_{3}-{}^{p}C_{3}$$

46. ఒక ఉపాధ్యాయుడు పదిమంది విద్యార్థులను పార్కుకు తీసుకు వెళ్ళాలి. ఒక్కొక్కసారి ముగ్గురు విద్యార్థుల చొప్పున తీసుకు వెళ్ళగలరు. కాని ఏ ముగ్గురు విద్యార్థుల బృందాన్నైనా ఒక్కసారి మాత్రమే తీసుకొని వెళ్ళాలి ?

i) ప్రతీ విద్యార్థికి ఎన్ని సార్లు పార్కుకు వెళ్ళే అవకాశం ఉంది.

ii) ఉపాధ్యాయుడు ఎన్నిసార్లు పార్కుకు వెళ్ళె అవకాశం ఉంది.

సాధన: i) పదిమంది విధ్యార్థులలో x ఒకరు అనుకొందాం. పార్కుకు x వెళ్ళే ప్రతీసారి ఇంకా ఇరువురు విద్యార్థులను మిగిలిన తొమ్మిది మంది విద్యార్థుల నుంచి ఎంచుకోవాలి. ఈ పనిని ${}^9C_2$ విధాలుగా చేయవచ్చు. అంటే

x పార్కుకు ${}^9C_2 = 36$ సార్లు వెళతాడు.

ii) పదిమంది విద్యార్థుల నుంచి ముగ్గురు విద్యార్థులను ఎంపిక చేసిన ప్రతీసారి ఉపాధ్యాఉడు పార్కుకు వెళతాడు. కనుక ఉపాధ్యాయుడు $= {}^{10}C_3 = 120$. సార్లు పార్కుకు వెళతాడు.