సమీకరణ వాదం

అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. **క్రింద ఇచ్చిన మూలలు గల కనిష్ఠతరగతి బహుపదీయ సమీకరణాలను రూపొందించండి.**

$1, -1, 3$

సాధన. కావలసిన బహుపది సమీకరణం

$$(x-1)(x+1)(x-3)=0$$

$$\Rightarrow (x^2-1)(x-3)=0$$

$$\Rightarrow x^3-3x^2-x+3=0$$

సూచన:

1) α,β,γ లు మూలాలుగా గల సమీకరణం

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$$

2) $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ లు మూలాలుగా గల సమీకరణం

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)=0$$

3) సమీకరణానికి గుణకాలు అకరణీయసంఖ్యలైన, సంకీర్ణ మూలాలు సంయుగ్మంగా ఉంటాయి.

$2\pm\sqrt{3}, 1\pm 2i$

సాధన. కావలసిన బహుపది సమీకరణం

$$\left[x-\left(2+\sqrt{3}\right)\right]\left[x-\left(2-\sqrt{3}\right)\right]\left[x-(1+2i)\right]\left[x-(1-2i)\right]=0$$

$$\Rightarrow\left[(x-2)-\sqrt{3}\right]\left[(x-2)+\sqrt{3}\right]\quad\left[(x-1)-2i\right]\left[(x-1)+2i\right]=0$$

$$\Rightarrow\left[(x-2)^2-3\right]\left[(x-1)^2-(2i)^2\right]=0$$

$$\Rightarrow\left(x^2-4x+4-3\right)\left(x^2-2x+1-4i^2\right)=0$$

$$\Rightarrow\left(x^2-4x+1\right)\left(x^2-2x+5\right)=0$$

$$\Rightarrow x^4-4x^3+x^2-2x^3+8x^2-2x+5x^2-20x+5=0$$

$$\Rightarrow x^4-6x^3+14x^2-22x+5=0$$

www.sakshieducation.com

2. $x^3-6x^2+9x-4=0$ కు $1,1,\alpha$ లు మూలాలైన α విలువను కనుగొనుము

సాదన. $1,1,\alpha$ లు $x^3-6x^2+9x-4=0$ కు మూలాలు కనుక మూలాల మొత్తం

$$=1+1+\alpha=-\left(-\frac{6}{1}\right)=6$$

$$\Rightarrow 2+\alpha=6\Rightarrow\alpha=6-2=4$$

3. $x^2-2x^2+ax+6=0$ **కు మూలాలు** $1,-2,3$ **అయితే** a **ను కనుక్కోండి.**

సాధన. $x^2-2x^2+ax+6=0$ కు 1 మూలం కనుక

$$(1)^3-2(1)^2+a(1)+6=0$$

$$a+5=0$$

$$\Rightarrow a=-5$$

4. $x^4-16x^3+86x^2-176x+105=0$ **కు** s_1,s_2,s_3,s_4 **లను కనుగొనుము.**

సాధన. ఇచ్చుట

$$p_0=1,p_1=-16,p_2=86,p_3=-176,\qquad p_4=105$$

$$s_1=\sum_{i=1}^{4}\alpha_i=\frac{-p_1}{p_0}=\frac{-(-16)}{1}=16$$

$$s_2=\Sigma\alpha_i\alpha_j=\frac{p_2}{p_0}=\frac{86}{1}=86$$

$$1\le i\le j\le 4$$

$$s_3=\Sigma_i\alpha_i\alpha_j\alpha_k=\frac{-p_3}{p_0}=\frac{-(-176)}{1}=176$$

$$1\le i\le j\le k\le 4$$

$$s_4=\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4=\frac{p_4}{p_0}=\frac{105}{1}=105$$

5. $x^2-2x^2-5x+6=0$, **కు మూలాలు** $\alpha,\beta,1$ **అయితే** α,β **లను కనుక్కోండి**

సాధన. $x^2-2x^2-5x+6=0$ కు $\alpha,\beta,1$ లు మూలాలు $\alpha+\beta+1=2\Rightarrow\alpha+\beta=1$

లబ్ధం $=\alpha\beta=-6$

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1+24=25$$

$$\alpha-\beta=25$$

$$\alpha+\beta=1$$

కలుపగా $2\alpha=6\Rightarrow\alpha=3$

www.sakshieducation.com

$\alpha+\beta=1 \Rightarrow \beta=1-\alpha=1-3=-2$

$\alpha=3, \beta=-2$

6. $x^3-2x^2+3x-4=0$ **మూలాలు** α,β,γ **అయితే,** $i)\Sigma\alpha^2\beta^2$ $ii)\Sigma\alpha^2\beta+\Sigma\alpha\beta^2$ **లను కనుక్కోండి.**

సాధన. $x^3-2x^2+3x-4=0$ మూలాలు α,β,γ కనుక

$\alpha+\beta+\gamma=2$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$

$\alpha\beta\gamma=4$

$i)\ \Sigma\alpha^2\beta^2=\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2$

$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$

$=9-2.2.4=9-16=-7$

$ii)\ \Sigma\alpha^2\beta+\Sigma\alpha\beta^2=\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\alpha\beta^2+\beta\gamma^2+\gamma\alpha^2$

$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)-3\alpha\beta\gamma$

$=2.3-3.4=6-12=-6$

7. $x^3-3x^2-16x+48=0$ **సమీకరణం రెండు మూలాల మొత్తం సున్నాఅయితే, సమీకరణాన్ని సాధించండి.**

సాధన.

$x^3-3x^2-16x+48=0$ **కు మూలాలు** α,β,γ లు $\alpha+\beta+\gamma=3$

(రెండు మూలాల మొత్తం సున్న) $\gamma=3$

i.e., $x-3$ అనేది

$x^3-3x^2-16x+48$ కు కారణాంకం

$x=3$	1	−3	−16	48
	−	3	0	−48
	1	0	−16	0

$x^2-16=0 \Rightarrow x^2=16$

$\Rightarrow x=\pm 4$

మూలాలు $-4,4,3$

www.sakshieducation.com

8. $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ **సమీకరణం యొక్క రెండు మూలాల మొత్తం సున్న కావటానికి నియమాన్ని కనుక్కోండి.**

సాధన. మూలాలు α, β, γ లు అనుకుందాం

అప్పుడు $\alpha + \beta + \gamma = p$ .... (1)

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$ .... (2)

$\alpha\beta\gamma = r$ .... (3)

రెండు మూలాల మొత్తం సున్న కనుక

$\alpha + \beta = 0$

అనుకోండి (1) నుండి $\gamma = p$

γ దత్త సమీకరణానికి మూలం కనుక

$\gamma^3 - p\gamma^2 + q\gamma - r = 0$

$\Rightarrow p^3 - p(p^2) + q(p) - r = 0$

$\Rightarrow r = pq$

ఇదియే కావలసిన నియమం.

9. $x^3 + 3px^2 + 3qx + r = 0$ **సమీకరణపు మూలాల**

$i)$ **అంకశ్రేఢిలో ఉంటే** $2p^3 - 3pq + r = 0$

$ii)$ **గుణశ్రేఢిలో ఉంటే** $p^3 r = q^3$

$iii)$ **హరాత్మక శ్రేఢిలో ఉంటే** $2q^3 = r(3pq - r)$ **అని చూపండి.**

సాధన. దత్త సమీకరణం $x^3 + 3px^2 + 3qx + r = 0$

$i)$ మూలాలు అంకశ్రేఢిలో ఉన్నవి కనుక అవి $a-d, a, a+d$ అనుకుందాం. అపుడు

$(a-d) + a + (a+d) = -3p$

$\Rightarrow 3a = -3p \Rightarrow a = -p$

a దత్త సమీకరణానికి మూలం, కనుక $a^3 + 3pa^2 + 3qa + r = 0$

$\Rightarrow (-p)^2 + 3p(-p)^2 + 3q(-p) + r = 0$

$\Rightarrow -p^3 + 3p^3 - 3pq + r = 0$

$\Rightarrow 2p^3 - 3pq + r = 0$

ఇదియే కావలసిన నియమం

www.sakshieducation.com

$ii)$ మూలాలు గుణశ్రేఢిలో ఉన్నవి కనుక అవి $\frac{a}{R}, a, aR$ అనుకుందాం.

అపుడు మూలాల లబ్ధం $=\left(\frac{a}{R}\right)(a)(aR)=-r$

$\Rightarrow a^3=-r$

$\Rightarrow a=(-r)^{1/3}$

a దత్త సమీకరణానికి మూలం కనుక

$a^3+3pa^2+3qa+r=0$

$\Rightarrow\left[(-r)^{1/3}\right]^3+3p\left(-r^{1/3}\right)^2+3q\left(-r^{1/3}\right)+r=0$

$\Rightarrow -r+3pr^{2/3}-3qr^{1/3}+r=0$

$\Rightarrow p.r^{2/3}=qr^{1/3}$

$\Rightarrow p.r^{1/3}=q$ ఘనం చేయగా

$\Rightarrow p^3.r=q^3$

ఇదియే కావలసిన నియమం

$iii)$ దత్త సమీకరణం

$x^3+3px^2+3qx+r=0$ .... (1)

$x=\frac{1}{y}$ వ్రాయగా

$$\left(\frac{1}{y}\right)^3+3p\left(\frac{1}{y}\right)^2+3q\left(\frac{1}{y}\right)+r=0$$

$\Rightarrow 1+3py+3qy^2+ry^3=0$

$\Rightarrow ry^3+3qy^2+3py+1=0$ .... (2)

(1) యొక్క మూలాలు హరాత్మాక శ్రేఢిలో ఉంటే, (2) యొక్క మూలాలు అంకశ్రేఢిలో ఉంటాయి.

కనుక అవి $a-d, a, a+d$ అనుకుందాం.

$$(a-d)+a+(a+d)=\frac{-3q}{r}$$

$$\Rightarrow 3a=\frac{-3q}{r}$$

$$\Rightarrow a=\frac{-q}{r}$$

a అనేది (2) కు ఒక మూలం కనుక

www.sakshieducation.com

$ra^3 + 3qa^2 + 3pa + 1 = 0$

$\Rightarrow r\left(\frac{-a}{r}\right)^3 + 3q\left(\frac{-q}{r}\right)^2 + 3p\left(\frac{-q}{r}\right) + 1 = 0$

$\Rightarrow \frac{-q^3}{r^2} + \frac{3q^3}{r^2} - \frac{3pq}{r} + 1 = 0$

$\Rightarrow -q^3 + 3q^3 - 3pqr + r^2 = 0$

$\Rightarrow r^2 - 3pqr + 2q^3 = 0$

$\Rightarrow 2q^2 = r(3pq - r)$

ఇదియే కావలసిన నియమం

10. $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ **సమీకరణ మూలాలు గుణ శ్రేఢిలో ఉండటానికి నియమాన్ని రాబట్టుము.**

సాధన. మూలాలు గుణశ్రేఢిలో ఉన్నవి. కనుక అవి

$\frac{a}{R}, a, aR$ అనుకోండి.

అపుడు మూలాల లబ్ధం $= \left(\frac{a}{R}\right)(a)(aR) = r$

$\Rightarrow a^3 = r$

$a = r^{1/3}$

a దత్త సమీకరణానికి ఒక మూలం కనుక $a^3 - pq^2 + qa - r = 0$

$\Rightarrow \left(r^{1/3}\right)^3 - p\left(r^{1/3}\right)^2 + q\left(r^{1/3}\right) - r = 0$

$\Rightarrow r - pr^{2/3} + qr^{1/3} - r = 0$

$\Rightarrow pr^{2/3} = qr^{1/3}$

ఘనం చేయగా $p^3r^2 = q^3r$

$\Rightarrow p^3r = q^3$

ఇదియే కావలసిన నియమం

www.sakshieducation.com

11. $9x^3-15x^2+7x-1=0$ **సమీకరణపు రెండు మూలాలు సమానమైతే, సమీకరణాన్ని సాధించండి.**

సాధన. మూలాలు α,β,γ లు అనుకుందాం.

అప్పుడు $\alpha+\beta+\gamma=-\left(\frac{-15}{9}\right)=\frac{5}{3}$ .... (1)

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{7}{9}$ .... (2)

$\alpha\beta\gamma=\frac{(-1)}{9}=\frac{1}{9}$ ....(3)

రెండు మూలాలు సమానం కనుక $\alpha=\beta$ అనుకుందాం.

అప్పుడు (1) నుండి $\alpha+\alpha+\gamma=\frac{5}{3}$

$\Rightarrow 2\alpha+\gamma=\frac{5}{3}\Rightarrow\gamma=\frac{5}{3}-2\alpha$

(2) నుండి $\alpha\alpha+\alpha\gamma+\gamma\alpha=\frac{7}{9}$

$\alpha^2+2\alpha\gamma=\frac{7}{9}$

$\Rightarrow\alpha^2+2\alpha\left(\frac{5}{3}-2\alpha\right)=\frac{7}{9}$

$\Rightarrow\alpha^2+\frac{10}{3}\alpha-4\alpha^2=\frac{7}{9}$

$\Rightarrow-3\alpha^2+\frac{10}{3}\alpha-\frac{7}{9}=0$

$\Rightarrow-27\alpha^2+30\alpha-7=0$

$\Rightarrow 27\alpha^2-30\alpha+7=0$

$\Rightarrow(3\alpha-1)(9\alpha-7)=0$

$\alpha=\frac{1}{3}\frac{7}{9}$

$case(i):\alpha=\frac{1}{3}$

$\gamma=\frac{5}{3}-2\alpha=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}=1$

మూలాలు $=\frac{1}{3},\frac{1}{3},1$

www.sakshieducation.com

$case\, ii): \alpha = \frac{7}{9}$

$\gamma = \frac{5}{3} - 2\alpha = \frac{5}{3} - \frac{14}{9}$

$= \frac{15-14}{9} = \frac{1}{9}$

$\alpha\beta\gamma = \frac{7}{9}.\frac{7}{9}.\frac{1}{9} \neq \frac{1}{9}$

కనుక $\alpha = \frac{7}{9}$ మూలం కాదు

మూలాలు $= \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1$

12. $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 = 0$ **సమీకరణపు ఒక మూలం, మరోదానికి రెట్టింపు అయిన, ఆ సమీకరణాన్ని సాధించండి.**

సాధన. α, β, γ లు $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 = 0$ కు మూలాలు అనుకుందాం

$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{3}{2}$ ...... (1)

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -\frac{8}{2} = -4$ .... (2)

$\alpha\beta\gamma = -\frac{3}{2}$ .... (3)

ఒక మూలం ఇంకొక దానికి రెట్టింపు కనుక $\alpha = 2\beta$ అనుకుందాం.

(1), (4) ల నుండి .... (4)

$3\beta + \gamma = -\frac{3}{2} \Rightarrow \gamma = -\frac{3}{2} - 3\beta$ ..... (5)

(2) నుండి $\alpha\beta + \gamma(\alpha + \beta) = -4$

$2\beta^2 + \left(-\frac{3}{2} - 3\beta\right)(2\beta + \beta) = -4$

$\Rightarrow 2\beta^2 - \left(\frac{3}{2} + 3\beta\right)(3\beta) = -4$

$\Rightarrow 2\beta^2 - \frac{9}{2}\beta - 9\beta^2 = -4$

www.sakshieducation.com

$$\Rightarrow -7\beta^2 - \frac{9}{2}\beta + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 7\beta^2 + \frac{9}{2}\beta - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 14\beta^2 + 9\beta - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (2\beta - 1)(7\beta + 8) = 0$$

$\beta = \frac{1}{2}$ లేదా $\beta = -\frac{8}{7}$

$$case(i): \beta = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 2\beta = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\gamma = -\frac{3}{2} - 3\beta = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2} = -3$$

మూలాలు $= 1, \frac{1}{2}, -3$

$$case(ii): \beta = \frac{-8}{7}$$

$$\alpha = 2\beta = 2\left(\frac{-8}{7}\right) = \frac{-16}{7}$$

$$\gamma = \frac{-3}{2} - 3\beta = \frac{-3}{2} + \frac{24}{7} = \frac{-21+48}{14} = \frac{27}{14}$$

$$\alpha\beta\gamma = \left(\frac{-16}{7}\right)\left(\frac{-8}{7}\right)\left(\frac{27}{14}\right) \neq \frac{-3}{2}$$

కనుక మూలాలు $= 1, \frac{1}{2}, -3$

www.sakshieducation.com

13. $x^3-9x^2+14x+24=0$ **సమీకరణపు రెండు మూలాలు** $3:2$ **నిష్పత్తిలో ఉంటే, ఆ సమీకరణాన్ని సాధించండి.**

సాధన. మూలాలు α,β,γ లు అనుకుందాం

$\alpha+\beta+\gamma=9$.............(1)

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=14$ .... (2)

$\alpha\beta\gamma=-24$ .... (3)

$\alpha:\beta=3:2$ అనుకుందాం

$\Rightarrow 2\alpha=3\beta\Rightarrow\beta=\frac{2}{3}\alpha$

(1) నుండి $\alpha+\frac{2}{3}\alpha+\gamma=9$

$\gamma=9-\frac{5\alpha}{3}$ .... (4)

(2) నుండి $(\alpha)\left(\frac{2}{3}\alpha\right)+\gamma(\alpha+\beta)=14$

$\Rightarrow\frac{2}{3}\alpha^2+\left(9-\frac{5\alpha}{3}\right)\left(\alpha+\frac{2}{3}\alpha\right)=14$

$\Rightarrow\frac{2}{3}\alpha^2+\left(9-\frac{5\alpha}{3}\right)\left(\frac{5}{3}\alpha\right)=14$

$\Rightarrow 6\alpha^2+(27-5\alpha)(5\alpha)=126$

$\Rightarrow 6\alpha^2+135\alpha-25\alpha^2-126=0$

$\Rightarrow 19\alpha^2-135\alpha+126=0$

$\Rightarrow 19\alpha^2-114\alpha-21\alpha+126=0$

$\Rightarrow 19\alpha(\alpha-6)-21(\alpha-6)=0$

$\Rightarrow(\alpha-6)(19\alpha-21)=0$

$\Rightarrow\alpha=6$ (లేదా) $\alpha=\frac{21}{19}$

$case(i):\alpha=6$

$\beta=\frac{2}{3}\alpha=\frac{2}{3}\times 6=4$

$\gamma=9-\frac{5}{3}\alpha=9-\frac{5}{3}\times 6=9-10=-1$

www.sakshieducation.com

$\alpha = 6, \beta = 4, \gamma = -1$

$\Rightarrow \alpha\beta\gamma = -24$

$case(iii) : \alpha = \frac{21}{19}$

$\beta = \frac{2}{3}\alpha = \frac{2}{3} \times \frac{21}{19} = \frac{42}{57} = \frac{14}{19}$

$\gamma = 9 - \frac{5}{3}\alpha = 9 - \frac{5}{3} \times \frac{21}{19} = 9 - \frac{35}{19}$

$= \frac{171 - 35}{19} = \frac{136}{19}$

కాని $\alpha\beta\gamma \neq -24$

మూలాలు $= 6, 4, -1$

14. మూలాలు అంకశ్రేఢిలో ఉన్న క్రింది సమీకరణాలను సాధించండి.

$i) 8x^3 - 36x^2 - 18x + 81 = 0$

సాధన. మూలాలు అంకశ్రేఢిలో ఉన్నవి కనుక అవి $a - d, a, a + d$ అనుకొనుము

అప్పుడు $(a - d) + a + (a + d) = -\left(\frac{-36}{8}\right)$

$\Rightarrow 3a = \frac{36}{8} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$

ఇట్లే $(a - d)(a)(a + d) = -\frac{81}{8}$

$\Rightarrow a(a^2 - d^2) = -\frac{81}{8}$

$\Rightarrow \frac{3}{2}\left(\frac{9}{4} - d^2\right) = \frac{-81}{8}$

$\Rightarrow \frac{9}{4} - d^2 = \frac{-81}{8} \times \frac{2}{3}$

$\Rightarrow d^2 = \frac{9}{4} + \frac{27}{4} = 9$

$\Rightarrow d = 3$

మూలాలు $= a - d, a, a + d$

$= \frac{3}{2} - 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} + 3$

www.sakshieducation.com

$=-\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{9}{2}$

$ii)\ x^3-3x^2-6x+8=0$

సాధన.

మూలాలు అంకశ్రేఢిలో ఉన్నవి కనుక మూలాలు $a-d, a, a+d$ అనుకుందాం.

$(a-d)+a+(a+d)=-(-3)=3$

$\Rightarrow 3a=3\Rightarrow \boxed{a=1}$

$(a-d)(a)(a+d)=-8$

$\Rightarrow a(a^2-d^2)=-8$

$\Rightarrow 1(1-d^2)=-8$

$\Rightarrow d^2=1+8=9$

$d=3$

మూలాలు $=a-d,a,a+d$

$=1-3,1,1+3$

$=-2,1,4$

15. మూలాలు గుణశ్రేఢిలో ఉన్న క్రింది సమీకరణాలను సాధించండి.

$i)\ 3x^3-26x^2+52x-24=0$

సాధన. మూలాలు గుణశ్రేఢిలో ఉన్నవి కనుక అవి

$\frac{a}{r},a,ar$ అనుకుందాం.

అప్పుడు $\frac{a}{r}+a+ar=-\frac{(-26)}{3}=\frac{26}{3}$

$\Rightarrow a\left(\frac{1}{r}+1+r\right)=\frac{26}{3}$ .... (1)

$\left(\frac{a}{r}\right)(a)(ar)=\frac{(-24)}{3}=8$

$\Rightarrow a^3=8\Rightarrow \boxed{a=2}$

(1) లో వ్రాయగా $2\left(\frac{1}{r}+1+r\right)=\frac{26}{3}$

www.sakshieducation.com

$$\Rightarrow\left(\frac{1+r+r^2}{r}\right)=\frac{13}{3}$$

$$\Rightarrow 3r^2+3r+3=13r$$

$$\Rightarrow 3r^2-10r+3=0$$

$$\Rightarrow (3r-1)(r-3)=0$$

$r=\frac{1}{3}$ లేదా 3

$case(i): a=2, r=\frac{1}{3}$

మూలాలు $=\frac{a}{r}, a, ar=\frac{2}{\left(\frac{1}{3}\right)}, 2, 2\times\frac{1}{3}=6, 2, \frac{2}{3}$

$case(iii): a=2, r=3$

మూలాలు $=\frac{a}{r}, a, ar=\frac{2}{3}, 2, 2\times 3=\frac{2}{3}, 2, 6$

మూలాలు $=\frac{2}{3}, 2, 6$

16. క్రింది పునరావృత మూలాలున్న సమీకరణాలను సాధించండి.

$i)\ x^4-6x^3+13x^2-24x+36=0$

సాధన. $f(x)=x^4-6x^3+13x^2-24x+36$

$f^1(x)=4x^3-18x^2+26x-24$

ఇపుడు $f^1(3)=4(3)^3-18(3)^2+26(3)-24$

$=108-162+78-24=0$

ఇట్లే $f(3)=3^4-6(3)^3+13(3)^2-24(3)+36$

$=81-162+117-72+36=0$

కనుక $x-3; f(x), f^1(x)$ లకు కారణాంకం

$f(x)=0$ కు 3 ఆవృతమూలం

కనుక $x^2+4=0\Rightarrow x^2=-4\Rightarrow x=\pm 2i$

మూలాలు $=3, 3, 2i, -2i$

www.sakshieducation.com

17. $x^4+x^3-16x^2-4x+48=0$ **సమీకరణపు రెండు మూలాల లబ్ధం 6 అయితే ఆ సమీకరణాన్ని సాధించండి.**

సాధన. మూలాలు $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ లు అనుకుందాం

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=-1$ .... (1)

$\alpha\beta+\alpha\delta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=-16$ ..(2)

$\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\beta\gamma\delta+\alpha\gamma\delta=-(-4)=4$ ..(3)

$\alpha\beta\gamma\delta=48$ .... (4)

రెండు మూలాల లబ్ధం $=6$ కనుక $\alpha\beta=6$ అనుకుందాం

(4) నుండి $6\gamma\delta=48$

$\Rightarrow\gamma\delta=8$

(3) నుండి $6\gamma+6\delta+8\beta+8\alpha=4$

$\Rightarrow 6(\gamma+\delta)+8(\alpha+\beta)=4$

$6(\gamma+\delta)+6(\alpha+\beta)=-6\rightarrow(1)\times 6$

$2(\alpha+\beta)=10$

$\alpha+\beta=5$

(1) నుండి $\gamma+\delta=-1-5=-6$

$\alpha+\beta=5,\alpha\beta=6$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(5)^2-4(6)=1$

$\alpha-\beta=1$

$\alpha+\beta=5$

$2\alpha=6$

$\Rightarrow\alpha=3,\beta=2$

ఇట్లే $\gamma+\delta=-6,\gamma\delta=8$

$(\gamma-\delta)^2=(\gamma+\delta)^2-4\gamma\delta$

$=(-6)^2-4(8)=36-32=4$

$\gamma-\delta=2$

$\gamma+\delta=-6$

$2\gamma=-4$

$\Rightarrow\gamma=-2,\delta=-4$

www.sakshieducation.com

మూలాలు $= 3, 2, -2, -4$

17. $18x^3 + 81x^2 + 121x + 60 = 0$ **సమీకరణపు ఒక మూలం తక్కిన రెండు మూలాల మొత్తంలో సగమైతే, సమీకరణాన్ని సాధించండి.**

సాధన. మూలాలు α, β, γ అనుకుంటే

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-81}{18} = \frac{-9}{2} \quad .... (1)$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{121}{18} \quad ..... (2)$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-60}{18} = \frac{-10}{3} \quad ..... (3)$$

ఒక మూలం తక్కిన రెండు మూలాల మొత్తం సగం కనుక

$\alpha = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$ అనుకుందాం

దీనిని (1) లో వ్రాయగా

$$\alpha + 2\alpha = -\frac{9}{2} \Rightarrow \alpha = -\frac{3}{2}$$

$$\beta + \gamma = 2\alpha = 2\left(-\frac{3}{2}\right) = -3$$

(3) నుండి

$$\left(-\frac{3}{2}\right)(\beta\gamma) = \frac{-10}{3}$$

$$\Rightarrow \beta\gamma = \frac{20}{9}$$

$$(\beta - \gamma)^2 = (\beta + \gamma)^2 - 4\beta\gamma = (-3)^2 - 4\left(\frac{20}{9}\right) \qquad = 9 - \frac{80}{9} = \frac{81 - 80}{9} = \frac{1}{9}$$

$$\beta - \gamma = \frac{1}{3}$$

$$\beta + \gamma = -3$$

కలుపగా $2\beta = \frac{1}{3} + (-3) = \frac{-8}{3} \Rightarrow \beta = \frac{-4}{3}$

$$\gamma = -3 - \beta = -3 + \frac{4}{3} = -\frac{5}{3}$$

దత్త సమీకరణానికి మూలాలు

www.sakshieducation.com

$\frac{-3}{2}, \frac{-4}{3}, \frac{-5}{3}$

18. కింది మూలాలు గల అకరణీయ గునకాలు గల బహుపది సమీకరణాన్ని రూపొందించండి.

$i) 4\sqrt{3}, 5+2i$

సాధన. బహుపది సమీకరణ గుణకాలు అకరణీయ సంఖ్యలైన, దాని మూలాలు సంయుగ్మ కరణులు మరియు సంయుగ్మసంకీర్ణ సంఖ్యలు

$\alpha = 4\sqrt{3}$ అయిన $\beta = -4\sqrt{3}$ మరియు

$\gamma = 5+2i$ అయిన $\delta = 5-2i$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ లు మూలాలు

$\alpha + \beta = 0$ $\quad\quad$ $\alpha\beta = -48$

$\beta + \delta = 10,$ $\quad\quad$ $\gamma\delta = 25 + 4 = 29$

కావలసిన సమీకరణం

$$\left[x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta\right]\left[x^2 - (\gamma+\delta)x + \gamma\delta\right] = 0$$

$$\Rightarrow \left(x^2 - 48\right)\left(x^2 - 10x + 29\right) = 0$$

$$\Rightarrow x^4 - 10x^3 + 29x^2 - 48x^2 + 480x - 1932 = 0$$

$$x^4 - 10x^3 - 19x^2 + 480x - 1932 = 0$$

$ii)\ 1+5i, 5-i$

సాధన. బహుపది సమీకరణ గుణకాలు అకరణీయ సంఖ్యలైన దాని మూలాలు సంయుగ్మ కరణులు మరియు సంయుగ్మసంకీర్ణ సంఖ్యలు $\alpha = 1+5i$ అయిన $\beta = 1-5i$

మరియు $\gamma = 5+i$ అయిన $\delta = 5-i$ లు మూలాలు

కావలసిన సమీకరణం

$$\left[x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta\right]\left[x^2 - (\gamma+\delta)x + \gamma\delta\right] = 0$$

$$\Rightarrow \left(x^2 - 2x + 26\right)\left(x^2 - 10x + 26\right) = 0$$

$$\Rightarrow x^4 - 12x^3 + 72x^2 - 312x + 676 = 0$$

www.sakshieducation.com

iii) $i-\sqrt{5}$

సాధన. బహుపది సమీకరణ గుణకాలు అకరణీయసంఖ్యలైన, దాని మూలాలు సంయుగ్మ కరణులు మరియు సంయుగ్మసంకీర్ణ సంఖ్యలు $\alpha = i-\sqrt{5}, \beta = i+\sqrt{5}$

$\gamma = -i-\sqrt{5}, \delta = -i+\sqrt{5}$ లు మూలాలు

$\alpha+\beta = 2i, \alpha\beta = -6$

$\gamma+\delta = -2i, \gamma\delta = -6$

కావలసిన సమీకరణం

$\left[x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\right]\left[x^2-(\gamma+\delta)x+\gamma\delta\right]=0$

$\Rightarrow \left(x^2-2ix-6\right)\left(x^2+2ix-6=0\right)$

$\Rightarrow \left(x^2-6\right)^2+4x^2=0$

$\Rightarrow x^4-8x^2+36=0$

19. $x^4+2x^3-5x^2+6x+2=0$ **సమీకరణపు ఒక మూలం** $1+i$ **అయిన, సమీకరణాన్ని సాధించండి.**

సాధన. $1+i$ ఒక మూలం $\Rightarrow 1-i$ ఇంకొక మూలం అవుతుంది.

$1\pm i$ మూలాలుగా గల సమీకరణం

$x^2-2x+2=0$

$x^2-2x+2=0$ ఒక కారణాంకము

$x^4+2x^3-5x^2+6x+2=0$

$x^2+4x+1=0 \Rightarrow$

$x = \dfrac{-4\pm\sqrt{16-4}}{2} = \dfrac{-4\pm 2\sqrt{3}}{2}$

$x = -2\pm\sqrt{3}$

మూలాలు $1\pm i, -2\pm\sqrt{3}$

www.sakshieducation.com

20. $x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 29x + 6 = 0$ **సమీకరణపు ఒక మూలం** $2-\sqrt{3}$ **అయితే,సమీకరణాన్ని సాధించండి.**

సాధన. $2-\sqrt{3}$ ఒక మూలం $\Rightarrow 2+\sqrt{3}$ ఇంకొక మూలం

$2\pm\sqrt{3}$ లు మూలాలుగా గల సమీకరణం

$x^2 - 4x + 1 = 0$

$x^2 - 4x + 1 = 0$ ఒక కారణాంకము

$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) = 0$

$x = 2, 3$

మూలాలు $2\pm\sqrt{3}, 2, 3$

21. $x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0$ **సమీకరణపు మూలాలకు 3 రెట్లున్న మూలాలు గల బీజీయ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి**

సాధన. దత్త సమీకరణం

$f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0$

$f\left(\frac{x}{3}\right) = 0$ సమీకరణం కావలసిన లక్షణాలలో ఉంటుంది.

కావలసిన సమీకరణం $f\left(\frac{x}{3}\right) = 0$

$\left(\frac{x}{3}\right)^3 + 2\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \frac{4x}{3} + 1 = 0$

$\frac{x^3}{27} + \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3} + 1 = 0$

27 చే గుణించగా కావలసిన సమీకరణం

$x^3 + 6x^2 - 36x + 27 = 0$

www.sakshieducation.com

22. $x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 4x + 3 = 0$ **సమీకరణపు మూలాలకు 2 రెట్లున్న మూలాలు గల బీజీయ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.**

సాధన. దత్త సమీకరణం

$$f(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 4x + 3 = 0$$

$f\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ సమీకరణం కావలసిన లక్షణాలలో ఉంటుంది కావలసిన సమీకరణం $f\left(\frac{x}{2}\right) = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^5 - 2\left(\frac{x}{2}\right)^4 + 3\left(\frac{x}{2}\right)^3 - 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{2}\right) + 3 = 0$$

32 చే గుణించగా

$$\Rightarrow x^5 - 4x^3 + 12x^3 - 16x^2 + 64x + 96 = 0$$

23. -3 **తో మార్పు చెందిన** $x^5 - 4x^4 + 3x^2 - 4x + 6 = 0$ **సమీకరణ మూలాల విలువలు మూలాలుగా గల బహుపది సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.**

సాధన: దత్త సమీకరణం

$$f(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^2 - 4x + 6 = 0$$

కావలసిన సమీకరణం $f(x+3) = 0$

$$(x+3)^5 - 4(x+3)^4 + 3(x+3)^2 - 4(x+3) + 6 = 0$$

3	1	-4	0	3	-4	6
	0	3	-3	-9	-18	-66
	1	-1	-3	-6	-22	-60
	0	3	6	9	9	A_5
	1	2	3	3	-13	
	0	3	15	54	A_4	
	1	5	18	57		
	0	3	24	A_2		
	1	8	42			
	0	3	A_3			
	1	11				
	A_0	A_1				

www.sakshieducation.com

$\therefore$ కావలసిన సమీకరణం

$x^5 + 11x^4 + 42x^3 + 57x^2 - 13x - 60 = 0$

24. 4 తో మార్పు చెందిన $3x^5 - 5x^3 + 7 = 0$ సమీకరణ మూలాల విలువలు మూలాలుగా గల బహుపది సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త సమీకరణం $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 7 = 0$

కావలసిన సమీకరణం $f(x-4) = 0$

$3(x-4)^5 - 5(x-4)^3 + 7 = 0$

-4	3	0	-5	0	0	7
	0	-12	48	-172	688	-2752
	3	-12	43	-172	688	-2745
	0	-12	96	-556	2912	A_5
	0	-24	139	-728	3600	
	0	-12	144	-1132	A_4	
	3	-36	283	-1860		
	0	-12	192	A_3		
	3	-48	475			
	0	-12	A_2			
	3	-60				
	A_0	A_1				

$\therefore$ కావలసిన సమీకరణం

$3x^5 - 60x^4 + 475x^3$

$-1860x^2 + 3600x - 2745 = 0$

20. x యొక్క రెండో అత్యధిక ఘాత గుణకం లుప్తం అయ్యే విధంగా కింది సమీకరణాలను పరివర్తన చేసి రూపాంతర సమీకరణాలను కనుక్కోండి.

i) $x^3 - 6x^2 + 10x - 3 = 0$

సాధన: x యొక్క రెండో అత్యధిక ఘాత గుణకం లుప్తం అయ్యే విధంగా సమీకరణ మూలాలను $\frac{-a_1}{n.a_0} = \frac{-(-6)}{(3)(1)} = 2$ తో మూలాల విలువలను పరివర్తనము చేయాలి. అంటే $f(x+2) = 0$ ను కనుక్కోవాలి.

www.sakshieducation.com

2	1	-6	10	-3
	0	2	-8	+4
	1	-4	2	+1
	0	2	-4	A_3
	1	-2	-2	
	0	+2	A_2	
	1	0		
	A_0	A_1		

∴ కావలసిన సమీకరణము $x^3 - 2x + 1 = 0$

(*ii*) $x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x - 2 = 0$

దత్త సమీకరణం $x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x - 2 = 0$

మూలాలను $h = -\frac{a_1}{na_0} = \frac{-4}{4} = -1$ తో మార్పు చెందించాలి

-1	1	4	2	-4	-2
	0	-1	-3	1	3
	1	3	-1	-3	1
	0	-1	-2	3	A_4
	1	2	-3	0	
	0	-1	-1	A_3	
	1	1	-4		
	0	-1	A_2		
	1	0			
	A_0	A_1			

∴ కావలసిన సమీకరణం $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$

iii) $x^3 - 6x^2 + 4x - 7 = 0$

దత్త సమీకరణం $x^3 - 6x^2 + 4x - 7 = 0$

మూలాలను $h = -\frac{a_1}{na_0} = \frac{6}{3} = 2$ తో మార్పు చెందించాలి.

www.sakshieducation.com

2	1	-6	4	-7
	0	2	-8	-8
	1	-4	-4	-15
	0	2	-4	A_3
	1	-2	-8	
	0	2	A_2	
	1	0		
	A_0	A_1		

$\therefore$ కావలసిన సమీకరణం $x^3 - 8x + 12 = 0$

iv) $x^3 + 6x^2 + 4x + 4 = 0$

దత్త సమీకరణం $x^3 + 6x^2 + 4x + 4 = 0$ రెండవ పదాన్ని లోపించేయుటానికి మూలాలను

$h = -\frac{a_1}{na_0} = -\frac{6}{3} = -2$ కు మార్పు చెందించాలి.

-2	1	6	4	4
	0	-2	-8	8
	1	4	-4	12
	0	-2	-4	A_3
	1	-2	-8	
	0	-2	A_2	
	1	0		
	A_0	A_1		

$\therefore$ కావలసిన సమీకరణం $x^3 - 8x + 12 = 0$

www.sakshieducation.com

25. కింది సమీకరణాలను సాధించండి.

$i)\ x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0$

సాధన: దత్త సమీకరణం ఒకటో కోవకు చెందిన సరిఘాత వ్యుత్క్రమ సమీకరణం

x^2 చే భాగించగా $x^2 - 10x + 26 - \frac{10}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 10\left(x + \frac{1}{x}\right) + 26 = 0 \rightarrow (1)$$

$a = x + \frac{1}{x}$ అనుకుంటే

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = a^2 - 2$$

(1) లో వ్రాయగా $a^2 - 2 - 10a + 26 = 0$

$\Rightarrow a^2 - 10a + 24 = 0$

$\Rightarrow (a-4)(a-6) = 0$

$a = 4$ (లేదా) 6

$case(i): a = 4$

$x + \frac{1}{x} = 4$

$\Rightarrow x^2 + 1 = 4x$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$= 2 \pm \sqrt{3}$

$case(ii): a = 6$

$x + \frac{1}{x} = 6$

$x^2 + 1 = 6x$

$x^2 - 6x + 1 = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-4}}{2} = \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{2(3 \pm 2\sqrt{2})}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

$\therefore$ మూలాలు $3 \pm 2\sqrt{2},\ 2 \pm \sqrt{3}$

www.sakshieducation.com

ii) $2x^5+x^4-12x^3+x+2=0$

$f(x)=2x^5+x^4-12x^3-12x^2+x+2=0$

ఒకటవ కోవకు చెందిన బేసి తరగతి వ్యుత్క్రమ సమీకరణం

$\therefore -1$ మూలం

x = -1	2	1	-12	-12	1	2
	0	-2	1	11	1	-2
	2	-1	-11	-1	2	0

$f(x)$ ను $(x+1)$ చే భాగించగా

$2x^4-x^3-11x^2-x+2=0$

x^2 చే భాగించగా

$2x^2-x-11-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}=0$

$2x^2-x-11-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2=0}$

$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)-11=0 \rightarrow (1)$

$a=x+\frac{1}{x}$ అయిన $x^2+\frac{1}{x^2}=a^2-2$

(1) లో వ్రాయగా

$2(a^2-2)-a-11=0$

$2a^2-4-a-11=0$

$2a^2-a-15=0$

$(a-3)(2a+5)=0$

$a=3$ లేదా $-\frac{5}{2}$

case(i) $a=3$

$\Rightarrow x+\frac{1}{x}=3$

$\Rightarrow x^2+1=3x$

$\Rightarrow x^2-3x+1=0$

$\Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

www.sakshieducation.com

$case(ii): \ a = -\frac{5}{2}$

$x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$

$\Rightarrow \frac{x^2+1}{x} = -\frac{5}{2}$

$\Rightarrow 2x^2 + 2 = -5x$

$\Rightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0$

$\Rightarrow (2x+1)(x+2) = 0$

$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}, -2$

$\therefore$ మూలాలు $-1, -\frac{1}{2}, -2, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

26. 2, 3, 6 లు మూలాలుగా గల 3 వ తరగతి ఏక బహుపది సమీకరణాన్ని రూపొందించండి.

$(Mar\ 02)$

సాధన: కావలసిన బహుపది సమీకరణం

$(x-2)(x-3)(x-6) = 0$

$\Rightarrow x^3 - 11x^2 + 36x - 36 = 0$

27. $3x^3 - 10x^2 + 7x + 10 = 0$ **ఘన సమీకరణం యొక్క మూలాలు, గుణకాల మధ్య సంబంధాలను కనుక్కోండి.**

సాధన: $3x^3 - 10x^2 + 7x + 10 = 0$..................(1)

(1) ను $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ తో పోల్చగా

$\Sigma\alpha = \frac{-b}{a} = \frac{-(-10)}{3} = \frac{10}{3}$

$\Sigma\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{7}{3}$

మరియు $\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a} = \frac{-10}{3}$

www.sakshieducation.com

28. $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ **సమీకరణం యొక్క మూలాలు 1, 2, 3, 4 అయితే** a,b,c,d **ల విలువలను కనుక్కోండి.**

సాధన: దత్త సమీకరణ మూలాలు 1, 2, 3, 4

కనుక $x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

$=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=0$

$\equiv x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$

ఇరువైపుల పదాల గుణకాలను పోల్చగా

$a=-10$, $b=35$, $c=-50$, $d=24$

29. $x^3-10x^2+6x+8=0$ **మూలాలు** α,β,γ **లు అయితే** $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ **విలువను కనుక్కోండి.**

సాధన: α,β,γ లు

$x^3-10x^2+6x-8=0$ కు మూలాలు

$\alpha+\beta+\gamma=10$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=6$, $\alpha\beta\gamma=8$ అయిన

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=100-12$

$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=88$

30. $x^4-16x^3+86x^2-176x+105=0$ **యొక్క మూలాలను కనుక్కోండి.**

సాధన: $f(x)=x^4-16x^3+86x^2-176x+105$ అనుకొనుము

$f(1)=1-16+86-176+105=0$

$\therefore f(x)=0$ నకు '1' మూలం

$\Rightarrow f(x)$ కు $(x-1)$ కారణాంకం

1	1	-16	86	-176	105
	0	1	-15	71	-105
	1	-15	71	-105	0

$\therefore f(x)=(x-1)(x^3-15x^2+71x-105)$

$=(x-1)g(x)$

ఇచ్చట $g(x)=x^3-15x^2+71x-105$

$g(1)=1-15+71-105=-48\neq 0$

$g(2)=-15\neq 0$

$g(3)=27-135+123-105=0$

$\therefore g(x)=0$ నకు '3' మూలం

www.sakshieducation.com

$\Rightarrow x-3,\ g(x)$ కు కారణాంకం

3	1	-15	71	-105
	0	3	-36	105
	1	-12	35	0

$\therefore g(x)=(x-3)(x^2-12x+35)$

$=(x-3)(x-5)(x-7)$

$\therefore f(x)=(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$

$\therefore 1,3,5,7$ లు $f(x)=0$ కు మూలాలు.

31. $x^3-6x^2+3x+10=0$ **సమీకరణానికి ఒక మూలం 2 అయితే, మిగిలిన మూలాలను కనుక్కోండి.**

సాధన: $f(x)=x^3-6x^2+3x+10$ అనుకొనుము

$f(x)=0$ కు 2 మూలం కనుక $f(x)$ ను $(x-2)$ చే భాగించగా

2	1	-6	3	10
	0	2	-8	-10
	1	-4	-5	0

$\therefore x^3-6x^2+3x+10=(x-2)(x^2-4x-5)$

$=(x-2)(x+1)(x-5)$

$\therefore -1,2,5$ $f(x)=0$ కు మూలాలు

32. $4x^3-24x^2+23x+18=0$ **సమీకరణం యొక్క మూలాలు అంకశ్రేఢిలో ఉంటే, సమీకరణాన్ని సాధించండి.**

సాధన: $a-d$, a, $a+d$ లు దత్త సమీకరణ మూలాలు అనుకోండి. మూలాల మొత్తం

$a-d+a+a+d=\dfrac{24}{4}$

$3a=6$

$a=2$

మూలాల లబ్ధం $(a-d)a(a+d)=\dfrac{-18}{4}$

www.sakshieducation.com

$a(a^2 - d^2) = -\frac{9}{2}$

$2(4 - d^2) = -\frac{9}{2}$

$4(4 - d^2) = -9$

$16 - 4d^2 = -9$

$4d^2 = 25$

$d = \pm\frac{5}{2}$

$\therefore$ మూలాలు $-\frac{1}{2}, 2, \frac{9}{2}$

33. $x^3 + 3px^2 + 3qx + r = 0$ **యొక్క మూలాలు గుణశ్రేఢిలో ఉంటే, నియమాన్ని రాబట్టండి.**

సాధన: మూలాలు గుణశ్రేఢిలో ఉన్నవి.

అవి $\frac{a}{R}, a, aR$ అనుకోండి.

$\left(\frac{a}{R}\right)(a)(aR) = -r$

$\Rightarrow a^3 = -r$

$\Rightarrow a = (-r)^{1/3}$

$\because x^3 + 3px^2 + 3qx + r = 0$ కు 'a' మూలం కనుక

$\Rightarrow (-r^{1/3})^3 + 3p(-r^{1/3})^2 + 3q(-r)^{1/3} + r = 0$

$\Rightarrow -r + 3pr^{2/3} - 3qr^{1/3} + r = 0$

$pr^{2/3} = qr^{1/3}$

$\Rightarrow pr^{2/3} = q$

$\Rightarrow p^3 r = q^3$ ఇదియే కావలసిన నియమం.

www.sakshieducation.com

34. $x^3+\frac{x^2}{4}-\frac{x}{16}+\frac{1}{72}=0$ సమీకరణ మూలాలకు m రెట్లున్న మూలాలు గల మూడో తరగతి సమీకరణాన్ని రూపోందించి, $m=12$ సందర్భానికి సమీకరణాన్ని రాబట్టండి.

సాధన: $f(x)=x^3+\frac{x^2}{4}-\frac{x}{16}+\frac{1}{72}$

కావలసిన సమీకరణం $f\left(\frac{x}{m}\right)=0$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{m}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{x}{m}\right)^2-\frac{1}{16}\left(\frac{x}{m}\right)+\frac{1}{72}=0$$

$$i.e., \frac{x^3}{m^3}+\frac{x^2}{4m^2}-\frac{x}{16m}+\frac{1}{72}=0$$

$$\therefore x^3+\frac{m}{4}x^2-\frac{m^2}{16}x+\frac{m^3}{72}=0$$

$m=12$ అయిన $x^3+\frac{12}{4}x^2-\frac{144}{16}x+\frac{144\times 12}{72}=0$

$$\therefore x^3+3x^2-9x+24=0$$

35. $x^4+3x^3-6x^2+2x-4=0$ సమీకరణ మూలాల వ్యుత్క్రమాల మూలాలుగా గల బహుపది సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి

సాధన: $f(x)\equiv x^4+3x^3-6x^2+2x-4=0$

కావలసిన సమీకరణం $f\left(\frac{1}{x}\right)=0$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^4+3\left(\frac{1}{x}\right)^3-6\left(\frac{1}{x}\right)^2+2\left(\frac{1}{x}\right)-4=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^4}+3\frac{1}{x^3}-6\frac{1}{x^2}+2\frac{1}{x}-4=0$$

$$\Rightarrow 1+3x-6x^2+2x^3-4x^4=0$$

$$\therefore 4x^4-2x^3+6x^2-3x-1=0$$

www.sakshieducation.com

36. $2x^3+5x^2+5x+2=0$ **ఒకటో కోవకు చెందిన వ్యుత్క్రమ సమీకరణమని చూపండి.**

సాధన: దత్త సమీకరణం $2x^3+5x^2+5x+2=0$

$P_0=2,\ P_1=5,\ P_2=5,\ P_3=2$

ఇచ్చుట $P_0=P_3,\ P_1=P_2$

$\therefore 2x^3+5x^2+5x+2=0$ సమీకరణం ఒకటో కోవకు చెందిన వ్యుత్క్రమ సమీకరణం.

37. **సాధించండి** $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$

సాధన: దత్త సమీకరణం $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$

ఇది ఒకటో కోవకు చెందిన సరి పరిమాణ వ్యుత్క్రమ సమీకరణం దత్త సమీకరణంను x^2 చే భాగించగా

$$x^2+x-4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\Rightarrow\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0\rightarrow(1)$$

$$x+\frac{1}{x}=y\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$$

$\therefore(1)$ నుండి $(y^2-2)+(y)-4=0$

$\Rightarrow y^2+y-6=0$

$\Rightarrow(y+3)(y-2)=0$

$\Rightarrow y=-3,2$

$$Case\,(i)\quad y=-3\Rightarrow x+\frac{1}{x}=-3$$

$$\Rightarrow\frac{x^2+1}{x}=-3$$

$\Rightarrow x^2+1=-3x$

$\Rightarrow x^2+3x+1=0$

$$\therefore x=\frac{-3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$Case\,(ii)\quad y=2\Rightarrow x+\frac{1}{x}=2$$

$$\Rightarrow\frac{x^2+1}{x}=2$$

$\Rightarrow x^2+1=2x$

$\Rightarrow x^2-2x+1=0\Rightarrow(x-1)^2=0$

www.sakshieducation.com

$\therefore x = 1, 1$

$\therefore$ మూలాలు $1, 1, \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$

www.sakshieducation.com