

వర్గసమాసాలు

అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. క్రింది సమీకరణాల మూలాలు కనుక్కోండి.

i) $x^2 - 7x + 12 = 0$

సాధన: $a = 1, \quad b = -7, \quad c = 12$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} = \frac{8}{2}, \frac{6}{2} = 4, 3$$

∴ మూలాలు 4, 3.

ii) $-x^2 + x + 2 = 0$

సాధన: $a = -1, \quad b = 1, \quad c = 2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2(-1)} = \frac{-1 \pm 3}{-2} = \frac{-4}{-2} \text{ (or)} \frac{2}{-2} = 2 \text{ (or)} -1$$

∴ మూలాలు 2, -1

iii) $2x^2 + 3x + 2 = 0$

సాధన: $a = 2, \quad b = 3, \quad c = 2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 16}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{7}i}{4}$$

∴ మూలాలు $\frac{-3 \pm i\sqrt{7}}{4}$

2. క్రింది ఇచ్చిన మూలాలు గల వర్గ సమీకరణాలను రూపొందించండి.

iii) $\frac{p-q}{p+q}, \frac{-(p+q)}{p-q}, (p \neq \pm q)$

సాధన: $\alpha + \beta = \frac{p-q}{p+q} - \frac{p+q}{p-q} = \frac{p^2 + q^2 - 2pq - p^2 - q^2 - 2pq}{p^2 - q^2} = \frac{-4pq}{p^2 - q^2}$

$$\alpha\beta = \left(\frac{p-q}{p+q}\right)\left(-\frac{p+q}{p-q}\right) = -1$$

కావలసిన వర్గ సమీకరణం

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

$$x^2 - \left(\frac{-4pq}{p^2 - q^2}\right)x - 1 = 0$$

$$(p^2 - q^2)x^2 + 4pqx - (p^2 - q^2) = 0$$

iv) $7 \pm 2\sqrt{5}$

సాధన: $\alpha + \beta = 7 + 2\sqrt{5} + 7 - 2\sqrt{5} = 14$

$$\alpha\beta = (7 + 2\sqrt{5})(7 - 2\sqrt{5}) = 49 - 20 = 29$$

కావలసిన వర్గ సమీకరణం

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

$$x^2 - 14x + 29 = 0$$

v) $-3 \pm 5i$

సాధన: $\alpha + \beta = -3 + 5i - 3 - 5i = -6$

$$\alpha\beta = (-3 + 5i)(-3 - 5i)$$

$$= 9 + 25$$

$$= 34$$

కావలసిన వర్గ సమీకరణం

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

$$x^2 + 6x + 34 = 0$$

3. క్రింది సమీకరణాలకు మూలాలను కనుక్కోకుండా, మూలాల స్వభావాన్ని కనుక్కోండి.

i) $2x^2 - 8x + 3 = 0$

సాధన: $a = 2, \quad b = -8, \quad c = 3$

$$b^2 - 4ac = 64 - 24$$

$$= 40 > 0$$

\therefore మూలాలు విభిన్న వాస్తవ సంఖ్యలు

ii) $9x^2 - 30x + 25 = 0$

సాధన: $a = 9, \quad b = -30, \quad c = 25$

$$b^2 - 4ac = 900 - 900$$

$$= 0$$

\therefore మూలాలు సమాన అకరణీయ సంఖ్యలు

ii)

$$2x^2 - 7x + 10 = 0$$

జ: $b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 2 \times 10 < 0$

\therefore మూలాలు వాస్తవేతర సంఖ్యలు

4. $ax^2 + bx + c = 0$ సమీకరణం మూలాలు α, β అయితే, కింది సమాసాల విలువలను a, b, c లలో కనుక్కోండి

i) $\left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2, c \neq 0$ అయితే

ii) $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^{-2} + \beta^{-2}}, c \neq 0$ అయినపుడు

జ: i) $\left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2}{\alpha^2 \beta^2}$

$$= \frac{(\alpha + \beta)^2 (\alpha - \beta)^2}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2}{\alpha^2 \beta^2} [(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta]$$

$$= \frac{b^2}{a^2} \left[\frac{b^2 - 4ca}{a^2} \right] = \frac{b^2 (b^2 - 4ac)}{c^2 a^2}$$

ii) $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^{-2} + \beta^{-2}} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}} = \alpha^2 \beta^2 = \frac{c^2}{a^2}$

5. m యొక్క ఏ విలువలకు, ఈ కింది సమీకరణాలకు, సమాన మూలాలు ఉంటాయి?

జ: i) $(2m+1)x^2 + 2(m+3)x + (m+5) = 0$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$4(m+3)^2 - 4(2m+1)(m+5) = 0$$

$$m^2 + 6m + 9 - 2m^2 - 11m - 5 = 0$$

$$-m^2 - 5m + 4 = 0$$

$$m^2 + 5m - 4 = 0$$

$$m = \frac{-5 \pm \sqrt{25+16}}{2}$$

$$m = \frac{-5 \pm \sqrt{41}}{2}$$

6. $x^2 + px + q = 0$ సమీకరణం మూలాలు α, β అయితే, $(\alpha - \beta)^2, (\alpha + \beta)^2$ మూలాలుగా గల సమీకరణాన్ని రూపొందించండి.

జ: $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}; \alpha\beta = \frac{c}{a}$

$$x^2 - [(\alpha - \beta)^2 + (\alpha + \beta)^2]x + [(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)]^2 = 0$$

$$x^2 - [2(\alpha^2 + \beta^2)]x + [\alpha + \beta]^2 [(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta] = 0$$

$$x^2 - 2[(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta]x + (\alpha + \beta)^2 [(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta] = 0$$

$$x^2 - 2\left[\frac{b^2 - 2ac}{a^2}\right]x + \frac{b^2}{a^2}\left[\frac{b^2 - 4ac}{a^2}\right] = 0$$

ఇక్కడ $b = p, c = q, a = 1$

$$x^2 - 2(p^2 - 2q)x + p^2(q^2 - 4q) = 0$$

7. $ax^2 + bx + c = 0$ సమీకరణం మూలాలు α, β అయితే, క్రింది సమాసాల విలువలను a, b, c లలో కనుక్కోండి.

సాధన: α, β సమీకరణ మూలాలు

$$ax^2 + bx + c = 0$$

కనుక $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$

i) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{\left(\frac{-b}{a}\right)}{\left(\frac{c}{a}\right)} = -\frac{b}{c}$

ii) $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$

సాధన: $= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} = \frac{\left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right)}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}$

iii) $\alpha^4\beta^7 + \alpha^7\beta^4$

సాధన: $= \alpha^4\beta^4(\alpha^3 + \beta^3)$

$$= \alpha^4\beta^4[(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)]$$

$$= (\alpha\beta)^4[(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)]$$

$$= \left(\frac{c}{a}\right)^4 \left[\left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{c}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right) \right] = \frac{c^4}{a^4} \left[\frac{-b^3 + 3abc}{a^3} \right] = \frac{bc^4(3ac + b^2)}{a^7}$$

8. $x^2 - 15 - m(2x - 8) = 0$ సమీకరణానికి సమాన మూలాలు ఉంటే, m విలువలను కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త సమీకరణం $x^2 - 15 - m(2x - 8) = 0$

$$x^2 - 2mx + 8m - 15 = 0$$

$$a = 1, b = -2m, c = 8m - 15$$

$$b^2 - 4ac = (-2m)^2 - 4(1)(8m - 15)$$

$$= 4m^2 - 32m + 60$$

$$= 4(m^2 - 8m + 15)$$

$$= 4(m - 3)(m - 5)$$

సూచన : $ax^2 + bx + c = 0$ కు సమాన మూలాలు ఉంటే, దాని విచక్షణి = 0

$$\therefore \text{మూలాల సమానం} \Rightarrow b^2 - 4ac = 0$$

$$\Rightarrow 4(m - 3)(m - 5) = 0$$

$$\Rightarrow m - 3 = 0 \text{ or } m - 5 = 0$$

$$\therefore m = 3 \text{ లేక } 5.$$

9. m యొక్క ఏ విలువలకు $(m+1)x^2 + 2(m+3)x + (m+8) = 0$ సమీకరణానికి సమాన మూలాలు ఉంటాయి ?

సాధన: $(m+1)x^2 + 2(m+3)x + (m+8) = 0$

$$a = m+1, b = 2(m+3), c = m+8$$

$$b^2 - 4ac = [2(m+3)]^2 - 4(m+1)(m+8)$$

$$= 4(m^2 + 6m + 9) - 4(m+1)(m+8)$$

$$= 4m^2 + 24m + 36 - 4m^2 - 36m - 32 = -12m + 4 = -4(3m - 1)$$

$$\therefore \text{మూలాలు సమానం} \Rightarrow b^2 - 4ac = 0$$

$$\Rightarrow -4(3m - 1) = 0 \Rightarrow 3m - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 3m = 1 \quad \therefore m = \frac{1}{3}$$

10. $(x-a)(x-b) = h^2$ సమీకరణం మూలాలు ఎల్లప్పుడూ వాస్తవ సంఖ్యలని నిరూపించండి.

సాధన: దత్త సమీకరణం $(x-a)(x-b) = h^2$

$$x^2 - (a+b)x + (ab+h^2) = 0$$

$$\text{విచక్షణి} = (a+b)^2 - 4(ab+h^2)$$

$$= (a+b)^2 - 4ab + 4h^2$$

$$= (a - b)^2 + (2h)^2 > 0$$

∴ మూలాలు వాస్తవాలు.

11. మూలాల మొత్తం 7గా, మూలాల వర్గాల మొత్తం 25 గా ఉండే వర్గ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన. α, β లు వర్గ సమీకరణానికి మూలాలు అయిన

$$\alpha + \beta = 7, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 25$$

$$\Rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 25$$

$$\Rightarrow 49 - 25 = 2\alpha\beta$$

$$\Rightarrow \alpha\beta = \frac{24}{2} = 12$$

∴ కావలసిన సమీకరణం

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

12. $x^2 + bx + c = 0$, $x^2 + cx + b = 0$ ($b \neq c$) లకు ఉమ్మడి మూలం ఉంటే, $b + c + 1 = 0$ అని చూపండి.

జ: $x^2 + bx + c = 0$

$$x^2 + cx + b = 0$$

' α ' ఉమ్మడి మూలము అనుకొందాము

$$\alpha^2 + b\alpha + c = 0$$

$$\alpha^2 + c\alpha + b = 0$$

$$\alpha(b - c) + c - b = 0$$

$$\alpha(b - c) = b - c$$

$$\alpha = 1$$

$$\therefore 1 + b + c = 0$$

13. $ax^2 + bx + c = 0$ వర్గసమీకరణం ఒక మూలం, మరో మూలానికి n రెట్లు (n ధన పూర్ణసంఖ్య) కావడానికి నియమం కనుక్కోండి.

జ: $\alpha + n\alpha = -b/a$

$$\alpha.n\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\alpha = \frac{-b}{a(n+1)}$$

$$\frac{nb^2}{a^2(n+1)^2} = \frac{c}{a}$$

$$nb^2 = ac(n+1)^2$$

14. వరసగా రెండు ధనాత్మక సరి పూర్ణసంఖ్యల వర్గా మొత్తం 340 అయ్యేటట్లు, రెండు వరస సరి సంఖ్యను కనుక్కోండి.

జ: $2n, 2n+2$

$$(2n)^2 + (2n+2)^2 = 340$$

$$4n^2 + 4n^2 + 8n + 4 = 340$$

$$8n^2 + 8n + 4 = 340$$

$$2n^2 + 2n + 1 = 85$$

$$2n^2 + 2n - 84 = 0$$

$$n^2 + n - 42 = 0$$

$$(n+7)(n-6) = 0$$

$$n = 6$$

∴ కావలసిన రెండు సరి సంఖ్యలు = 12, 14

15. మూలాల మొత్తం 7గా, మూలాల వర్గాల మొత్తం 25గా ఉండే వర్గసమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

జ: $\alpha + \beta = 7, \alpha^2 + \beta^2 = 25$

$$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 25$$

$$49 - 2\alpha\beta = 25$$

$$24 = 2\alpha\beta$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

16. ఏయే x విలువలకు క్రింది సమాసాలు ధనాత్మకం

i) $x^2 - 5x + 6$

సాధన: $x^2 - 5x + 6 = 0$ మూలాలు 2, 3 లు అవి వాస్తవాలు

$x < 2$ లేదా $x > 3$ అయిన $x^2 - 5x + 6$ ధనాత్మకం

$$\therefore a = 1 > 0$$

17. R మీద x మారుతున్నప్పుడు క్రింది సమాసాల గరిష్ట లేదా కనిష్ట విలువలను కనుక్కోండి.

i) $x^2 - x + 7$

సాధన: $a = 1 > 0$, కనిష్ట విలువ = $\frac{4ac - b^2}{4a}$

$$= \frac{28 - 1}{4} = \frac{27}{4}$$

ii) $12x - x^2 - 32$

సాధన: $a = -1 < 0$, గరిష్ట విలువ = $\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{128 - 144}{-4} = \frac{16}{4} = 4$

18. x వాస్తవ సంఖ్య అయినప్పుడు కింది వర్గ సమాసాల గుర్తులను చర్చించండి

జ: $x^2 - x + 3$

$$x^2 - x + 3$$

$$f(x) = x^2 - x + 3$$

$$y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 3 - \frac{1}{4}$$

$$y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$$

$$y - \frac{11}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \text{ విచక్షణి} = 1 - 12 < 0$$

$$f(x) > 0 \forall x \in R$$

19. ఏయే x విలువలకు, కింది సమాసాలు ధనాత్మకం?

i) $3x^2 + 4x + 4$ ii) $4x - 5x^2 + 2$

జ: $f(x) = 3x^2 + 4x + 4$

$$f(x) > 0$$

$$3x^2 + 4x + 4 > 0$$

$$x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} > 0$$

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{3} - \frac{4}{9} > 0$$

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{8}{9} > 0 \forall x \in R$$

ii) $f(x) = 4x - 5x^2 + 2$

$$= -[5x^2 - 4x - 2]$$

$$= -5 \left[\left(x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{2}{5}\right) \right]$$

$$= -5 \left[\left(\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{4}{25} - \frac{2}{5} \right) \right]$$

$$= -5 \left[\left(\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{14}{25} \right) \right]$$

$$4x - 5x^2 + 2 > 0$$

$$5x^2 - 4x - 2 < 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+40}}{10}$$

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{14}}{10}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{14}}{5}$$

$$\frac{2 - \sqrt{14}}{5} < x < \frac{2 + \sqrt{14}}{5}$$

20. ఏయే x విలువలకు, కింది సమాసాలు రుణాత్మకం?

i) $15 + 4x - 3x^2$ ii) $2x^2 + 5x - 3$

జ: i) $f(x) = 15 + 4x - 3x^2$

$$f(x) < 0$$

$$15 + 4x - 3x^2 < 0$$

$$3x^2 - 4x - 15 > 0$$

$$3x^2 - 9x + 5x - 15 > 0$$

$$3x(x-3) + 5(x-3) > 0$$

$$(x-3)(3x+5) > 0$$

$$x > 3x < \frac{-5}{3}$$

$$\left(-\infty < x < \frac{-5}{3}\right) \cup (3 < x < \infty)$$

ii) $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$

$$f(x) < 0$$

$$2x^2 + 5x - 3 < 0$$

$$2x^2 + 6x - x - 3 < 0$$

$$2x(x+3) - 1(x+3) < 0$$

$$(2x-1)(x+3) < 0$$

$$-3 < x < \frac{1}{2}$$

21. కింది అసమీకరణాలను బీజీయ పద్ధతిలో సాధించండి.

i) $15x^2 + 4x - 4 \leq 0$ ii) $x^2 - 2x + 1 < 0$

జ: i) $15x^2 + 4x - 4 \leq 0$

$$15x^2 + 10x - 6x - 4 \leq 0$$

$$5x(3x+2) - 2(3x+2) \leq 0$$

$$(3x+2)(5x-2) \leq 0$$

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{2}{5}\right) \leq 0$$

$$-\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{5}$$

$$ii) x^2 - 2x + 1 < 0$$

$$(x-1)^2 < 0$$

$$(x-1)^2 \geq 0 \text{ కావున ఇది అసాధ్యము}$$

∴ సాధన వ్యవస్థితం కాదు

22. $x^2 - 2ax + 8a - 15 = 0$ సమీకరణం మూలాలు సమానమైన, 'a' విలువను కనుగొనుము
(Mar 04)

సాధన: ఇచ్చట $a = 1$, $b = -2a$, $c = 8a - 15$

$$\text{మూలాలు సమానం కనుక } \Delta = 0$$

$$\text{(i.e.,) } b^2 - 4ac = 0$$

$$\Rightarrow (-2a)^2 - 4(1)(8a - 15) = 0$$

$$\Rightarrow 4a^2 - 32a + 60 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 8a + 15 = 0$$

$$\Rightarrow (a-3)(a-5) = 0$$

$$\Rightarrow a = 3 \text{ లేదా } 5$$

19. ఏయే k విలువలకు $x^2 + 2(k+2)x + 9k = 0$ సమీకరణం మూలాలు సమానమవుతాయి ?

సాధన: ∴ $x^2 + 2(k+2)x + 9k = 0$ సమీకరణం మూలాలు సమానం

$$\Rightarrow \text{విచక్షణి } \Delta = 0$$

$$\text{(i.e.,) } b^2 - 4ac = 0$$

$$\text{ఇచ్చట } a = 1, b = 2(k+2), c = 9k$$

$$\therefore [2(k+2)]^2 - 4(1)(9k) = 0$$

$$\Rightarrow 4(k+2)^2 - 4(9k) = 0$$

$$\Rightarrow (k+2)^2 - 9k = 0$$

$$\Rightarrow k^2 - 5k + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (k-1)(k-4) = 0$$

$$\Rightarrow k = 1, 4$$

$$\therefore k \text{ విలువలు } = \{1, 4\}$$

23. మూలాల మొత్తం 1, వాటి వర్గాల మొత్తం 13 గా గల వర్గ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: వర్గ సమీకరణానికి మూలాలు, α, β లు అనుకుంటే, అప్పుడు $\alpha + \beta = 1$, $\alpha^2 + \beta^2 = 13$

$$\therefore \alpha\beta = \frac{1}{2}[(\alpha + \beta)^2 - (\alpha^2 + \beta^2)]$$

$$= \frac{1}{2}[(1)^2 - (13)]$$

$$= -6$$

\therefore కావలసిన వర్గ సమీకరణం

$$x^2 = (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - (1)x + (-6) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

23. m యొక్క ఏయే విలువలకు $x^2 - 2(1+3m)x + 7(3+2m) = 0$ సమీకరణం మూలాలు సమానమౌతాయి?

జ: దత్త సమీకరణం విచక్షణి సున్న అయితేనే ఆ సమీకరణం మూలాలు సమానమౌతాయి.

$$\text{ఇక్కడ } \Delta = \{-2(1+3m)\}^2 - 4(1)7(3+2m)$$

$$= 4(1+3m)^2 - 28(3+2m)$$

$$= 4(9m^2 - 8m - 20)$$

$$= 4(m-2)(9m+10)$$

$$= 36(m-2)\left(m + \frac{10}{9}\right)$$

$$\text{కాబట్టి } \Delta = 0 \Leftrightarrow m = 2 \text{ లేదా } m = -\frac{10}{9}$$

$\therefore m \in \left\{-\frac{10}{9}, 2\right\}$ అయినప్పుడు మాత్రమే దత్త సమీకరణం మూలాలు సమానమవుతాయి.

స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. $ax^2 + bx + c = 0$ వర్ణసమీకరణం మూలాలు x_1, x_2 లు $c \neq 0$ అయితే $(ax_1 + b)^{-2} + (ax_2 + b)^{-2}$ సమాసం విలువను a, b, c లలో కనుక్కోండి

జ: $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$

$$x_1(ax_2 + b) + c = 0$$

$$(ax_1 + b) = \frac{-c}{x_1}$$

అలాగే $(ax_2 + b) = \frac{-c}{x_2}$

$$\therefore (ax_1 + b)^{-2} + (ax_2 + b)^{-2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2]$$

$$= \frac{1}{c^2} \left[\frac{b^2 - 2ac}{a^2} \right] = \frac{b^2 - 2ac}{a^2 c^2}$$

2. $3^{1+x} + 3^{1-x} = 10$

జ: $3^x = t$ అనుకొనుము

$$3t + \frac{3}{t} = 10$$

$$3t^2 + 3 - 10t = 0$$

$$3t^2 - 10t + 3 = 0$$

$$3t^2 - 9t - t + 3 = 0$$

$$3t(t-3) - 1(t-3) = 0$$

$$(3t-1)(t-3) = 0$$

$$t = \frac{1}{3}, t = 3$$

$$3^x = 3^{-1}, 3^x = 3^1$$

$$\therefore x = -1, 1$$

3. $x \neq 0, x \neq -1$ అయినప్పుడు $\sqrt{\frac{3x}{x+1}} + \sqrt{\frac{x+1}{3x}} = 2$

జ: $\sqrt{\frac{3x}{x+1}} = t$ అనుకొనుము

$$t + \frac{1}{t} = 2$$

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$(t-1)^2 = 0$$

$$t = 1$$

$$\frac{3x}{x+1} = 1$$

$$3x = x+1$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}$$

4. $x \neq 0$ అయినప్పుడు

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0.$$

జ: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$

$x + \frac{1}{x} = t$ అనుకొనుము

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$(t-4)(t-1) = 0$$

$$t = 4, 1$$

$$x + \frac{1}{x} = 4 \quad x + \frac{1}{x} = 1$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \quad x^2 - x + 1 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$x = 2 \pm \sqrt{3} \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

5. $ax^2 + 2bx + c = 0$, $ax^2 + 2cx + b = 0$, ($b \neq c$) వర్గ సమీకరణాలకు ఉమ్మడి మూలం ఉంటే, అప్పుడు $a + 4b + 4c = 0$ అని చూపండి

సాధన: $ax^2 + 2bx + c = 0$

$ax^2 + 2cx + b = 0$ లకు ఉమ్మడి మూలం అనుకుంటే

$$a\alpha^2 + 2b\alpha + c = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$a\alpha^2 + 2c\alpha + b = 0 \dots\dots\dots(2)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 2\alpha(b-c) + c - b = 0$$

$$2\alpha(b-c) = b-c$$

$$2\alpha = \frac{b-c}{b-c} = 1, \because b \neq c$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$\alpha = \frac{1}{2}$ ను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

$$a\left(\frac{1}{4}\right) + 2b\frac{1}{2} + c = 0$$

$$\Rightarrow a + 4b + 4c = 0$$

$$\therefore a + 4b + 4c = 0$$

ఇదియే కావలసిన నియమం

6. $x^2 - 6x + 5 = 0$, $x^2 - 12x + p = 0$ లకు ఉమ్మడి మూలం ఉంటే, p కనుక్కోండి.

సాధన: $x^2 - 6x + 5 = 0$

$x^2 - 12x + p = 0$ లకు ఉమ్మడి మూలం α అనుకుంటే అప్పుడు

$$\alpha^2 - 6\alpha + 5 = 0, \alpha^2 - 12\alpha + p = 0$$

$$\alpha^2 - 6\alpha + 5 = 0 \Rightarrow (\alpha - 1)(\alpha - 5) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 1 \text{ లేదా } 5$$

$$\alpha = 1 \text{ అయిన } \alpha^2 - 12\alpha + p = 0$$

$$\Rightarrow 1 - 12 + p = 0 \Rightarrow p = 11$$

$$\alpha = 5 \text{ అయిన } \alpha^2 - 12\alpha + p = 0$$

$$\Rightarrow 25 - 60 + p = 0 \Rightarrow p = 35$$

$$\therefore p = 11 \text{ లేదా } 35$$

7. $x^2 + ax + b = 0$, $x^2 + cx + d = 0$ లకు ఉమ్మడి మూలము ఉండి, మొదటి సమీకరణానికి సమాన మూలాలుంటే, అప్పుడు $2(b+d) = ac$ అని నిరూపించండి.

సాధన: ఉమ్మడి మూలం α అనుకుంటే

$x^2 + ax + b = 0$ కు మూలాలు సమానం కనుక α, α లు దీని మూలాలు

$$\alpha + \alpha = -a \Rightarrow \alpha = -\frac{a}{2}$$

$$\alpha \cdot \alpha = b \Rightarrow \alpha^2 = b$$

$\therefore x^2 + cx + d = 0$ కు α మూలం కనుక

$$\Rightarrow \alpha^2 + \alpha + d = 0$$

$$\Rightarrow b + c\left(-\frac{a}{2}\right) + d = 0$$

$$\Rightarrow 2(b+d) = ac$$

8. క్రింది సమాసాల వ్యాప్తిని నిర్ణయించండి.

i) $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$

సాధన $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$ అనుకోండి.

$$\Rightarrow x^2y - xy + y = x^2 + x + 1$$

$$\Rightarrow x^2y - xy + y - x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2(y-1) - x(y+1) + (y-1) = 0$$

$$x \text{ వాస్తవం} \Rightarrow b^2 - 4ac \geq 0$$

$$\Rightarrow (y+1)^2 - 4(y-1)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (y+1)^2 - (2y-2)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (y+1+2y-2)(y+1-2y+2) \geq 0$$

$$\Rightarrow (3y-1)(y+3) \geq 0$$

$$\Rightarrow -(3y-1)(y-3) \geq 0$$

$$a = y^2 \text{ గుణకం} = -3 < 0$$

$$\text{కాని సమాసం} \geq 0$$

$$\Rightarrow y \text{ విలువ } \frac{1}{3}, 3 \text{ ల మధ్య ఉంటుంది.}$$

$$\therefore \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} \text{ వ్యాప్తి } \left[\frac{1}{3}, 3 \right]$$

ii) $\frac{x+2}{2x^2+3x+6}$

సాధన: $y = \frac{x+2}{2x^2+3x+6}$ అనుకోండి.

$$\text{అప్పుడు } 2yx^2 + 3yx + 6y = x + 2$$

$$\Rightarrow 2yx^2 + (3y-1)x + (6y-2) = 0$$

$$x \text{ వాస్తవం} \Rightarrow \text{విచక్షణ} \geq 0$$

$$\Rightarrow (3y-1)^2 - 4(2y)(6y-2) \geq 0$$

$$\Rightarrow 9y+1-6y-48y^2+16y \geq 0$$

$$\Rightarrow -39y^2+10y+1 \geq 0$$

$$\Rightarrow 39y^2-10y-1 < 0$$

$$\Rightarrow 39y^2-13y+3y-1 < 0$$

$$\Rightarrow 13y(3y-1)+1(3y-1) \leq 0$$

$$\Rightarrow (3y-1)(13y+1) \leq 0$$

$$\therefore a = y^2 \text{ గుణకం} = 39 > 0 \text{ సమాసము} \leq 0$$

$$\Rightarrow y \text{ విలువ } \frac{-1}{13}, \frac{1}{3} \text{ లచే మధ్య ఉంటుంది.}$$

$$\therefore \text{ కనుక } \frac{x+2}{2x^2+3x+6} \text{ వ్యాప్తి } \left[-\frac{1}{13}, \frac{1}{3} \right]$$

$$\text{iv) } \frac{2x^2-6x+5}{x^2-3x+2}$$

$$y = \frac{2x^2-6x+5}{x^2-3x+2}$$

$$\Rightarrow yx^2 - 3yx + 2y = 2x^2 - 6x + 5$$

$$\Rightarrow (y-2)x^2 + (6-3y)x + (2y-5) = 0$$

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow (6-3y)^2 - 4(y-2)(2y-5) \geq 0$$

$$\Rightarrow 36 + 9y^2 - 36y - 4(2y^2 - 9y + 10) \geq 0$$

$$\Rightarrow 36 + 9y^2 - 36y - 8y^2 + 36y - 40 \geq 0$$

$$9. \quad x \text{ వాస్తవ సంఖ్య అయితే } \frac{1}{3x+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{(3x+1)(x+1)} \text{ విలువ } 1, 4 \text{ ల మధ్య ఉండదని}$$

నిరూపించండి.

$$\text{సాధన: } y = \frac{1}{3x+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{(3x+1)(x+1)} \text{ అనుకోండి.}$$

$$= \frac{x+1+3x+1-1}{(3x+1)(x+1)} = \frac{4x+1}{3x^2+4x+1}$$

$$\Rightarrow 3yx^2 + 4yx + y = 4x + 1$$

$$\Rightarrow 3yx^2 + (4y-4)x + (y-1) = 0$$

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow (4y-4)^2 - 4(3y)(y-1) \geq 0$$

$$\Rightarrow 16y^2 + 16 - 32y - 12y^2 + 12y \geq 0$$

$$\Rightarrow 4y^2 - 20y + 16 \geq 0$$

$$4y^2 - 20y + 16 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 - 5y + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (y-1)(y-4) = 0 \Rightarrow y = 1, 4$$

$$4y^2 - 20y + 16 \geq 0 \Rightarrow y \leq 1 \text{ లేదా } y \geq 4$$

$$\therefore y^2 \text{ గుణకం, సమాసం} \geq 0$$

$$\Rightarrow y \text{ విలువ } 1, 4 \text{ ల మధ్య ఉండదు.}$$

10. x వాస్తవ సంఖ్య అయితే, $\frac{x}{x^2 - 5x + 9}$ విలువ $1, \frac{-1}{11}$ ల మధ్య ఉంటుందని నిరూపించండి.

సాధన: $y = \frac{x}{x^2 - 5x + 9} \Rightarrow yx^2 - 5yx + 9y = x$

$\Rightarrow yx^2 + (-5y - 1)x + 9y = 0$

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow (-5y - 1)^2 - 4y(9y) \geq 0$

$\Rightarrow 25y^2 + 1 + 10y - 36y^2 \geq 0$

$\Rightarrow -11y^2 + 10y + 1 \geq 0 \dots\dots\dots(1)$

$-11y^2 + 10y + 1 = 0 \Rightarrow -11y^2 + 11y - y + 1 = 0$

$\Rightarrow 11y(-y + 1) + 1(-y + 1) = 0$

$\Rightarrow (-y + 1)(11y + 1) = 0 \Rightarrow y = 1, \frac{-1}{11}$

$-11y^2 + 10y + 1 \geq 0$

$\therefore y^2$ గుణకం $-ve$, సమాసం ≥ 0

(1) నుండి $\frac{-1}{11} \leq y \leq 1$

$\Rightarrow y$ విలువ, $1, \frac{-1}{11}$ ల మధ్య ఉంటుంది.

11. \mathbb{R} లోని ప్రతి x కి $\frac{x - p}{x^2 - 3x + 2}$ సమాసం వాస్తవ మైతే, అప్పుడు p అవధులను కనుక్కోండి.

సాధన: $y = \frac{x - p}{x^2 - 3x + 2}$ (y వాస్తవం)

అప్పుడు $yx^2 - 3yx + 2y = x - p$

$\Rightarrow yx^2 + (-3y - 1)x + (2y + p) = 0$

$\therefore x \in \mathbb{R} \Rightarrow (-3y - 1)^2 - 4y(2y + p) \geq 0$

$\Rightarrow 9y^2 + 6y + 1 - 8y^2 - 4py \geq 0$

$\Rightarrow y^2 + (6 - 4p)y + 1 \geq 0$

$\therefore y \in \mathbb{R}, y^2 + (6 - 4p)y + 1 \geq 0$

\Rightarrow మూలాలు సంకీర్ణ సంఖ్యలు లేదా సమాన వాస్తవాలు

$\Rightarrow \Delta \leq 0$

$\Rightarrow (6 - 4p)^2 - 4 \leq 0$

$\Rightarrow 4(3 - 2p)^2 - 4 \leq 0$

$\Rightarrow (3 - 2p)^2 - 1 \leq 0$

$\Rightarrow 4p^2 - 12p + 8 \leq 0$

$$\Rightarrow p^2 - 3p + 2 \leq 0$$

$$\Rightarrow (p-1)(p-2) \leq 0$$

$p=1$ లేదా $p=2$ అయిన $\frac{x-p}{x^2-3x+2}$ నిర్వచితం కాదు.

$$\therefore 1 < p < 2.$$

12. కింది సమాసాల గుర్తులలో మార్పులను కనుక్కోండి. వాటి అంత్య విలువలను కనుక్కోండి.

i) $x^2 - 5x + 6$ ii) $15 + 4x - 3x^2$

జ: i) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

$$= (x-3)(x-2)$$

$$f(x) < 0$$

$$2 < x < 3$$

మరియు $f(x) > 0$

$$(-\infty < x < 2) \cup (3 < x < \infty)$$

$$y = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + 6 - \frac{25}{4}$$

$$y_{\text{క్రమ}} = \frac{-1}{4}$$

ii) $f(x) = 15 + 4x - 3x^2$

$$f(x) < 0$$

$$15 + 4x - 3x^2 < 0$$

$$3x^2 - 4x - 15 < 0$$

$$3x^2 - 9x + 5x - 15 < 0$$

$$3x(x-3) + 5(x-3) < 0$$

$$(x-3)(3x+5) < 0$$

$$\frac{-3}{5} < x < 3$$

$$f(x) > 0$$

$$\left(-\infty < x < \frac{-3}{5}\right) \cup (3 < x < \infty)$$

$$y = 15 + 4x - 3x^2$$

$$y = -3 \left[x^2 - \frac{4}{3}x - 5 \right]$$

$$y = -3 \left[\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} - 5 \right]$$

$$y = -3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{49}{9} \cdot 3$$

$$y = -3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{49}{9}$$

$$y_{\text{స్వస్థం}} = \frac{49}{3}$$

13. $c^2 \neq ab$ అయి, $(c^2 - ab)x^2 - 2(a^2 - bc)x + (b^2 - ac) = 0$

సమీకరణం మూలాలు సమానమైతే, అప్పుడు $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ లేదా $a=0$ అని చూపండి.

జ: మూలాల సమానం \Rightarrow విచక్షణి = 0

$$4(a^2 - bc)^2 - 4(c^2 - ab)(b^2 - ac) = 0$$

$$a^4 + b^2c^2 - 2a^2bc - b^2c^2 +$$

$$c^3a + b^3a - a^2bc = 0$$

$$a^4 - 2a^2bc + c^3a + b^3a - a^2bc = 0$$

$$a[a^3 + b^3 + c^3 - 3abc] = 0$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0 \text{ లేదా } a = 0$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \text{ లేదా } a = 0$$

14. కింది అసమీకరణాలను సాధించండి.

i) $\sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x$

జ: $-x^2 + 6x - 5 \geq 0$ అయినప్పుడే ఇది సాధ్యము

$$x^2 - 6x + 5 \leq 0$$

$$(x-5)(x-1) \leq 0$$

$$1 \leq x \leq 5 \dots\dots\dots(1)$$

$$-x^2 + 6x - 5 > 64 + 4x^2 - 32x$$

$$0 > 5x^2 - 38x + 64 + 5$$

$$\text{లేదా } 5x^2 - 38x + 69 < 0$$

$$5x^2 - 23x - 15x + 69 < 0$$

$$5x(x-3) - 23(x-3) < 0$$

$$(x-3)(5x-23) < 0$$

$$3 < x < \frac{23}{5} \dots\dots\dots(2)$$

(1), (2) ల నుండి,

$$3 < x \leq 5$$

15. $ax^2 + bx + c = 0$ వర్గ సమాకరణానికి మూలాలు $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ అని చూపండి. (Mar 02)

సాధన: వర్గ సమీకరణం $ax^2 + bx + c = 0$

$$\Rightarrow 4a(ax^2 + bx + c) = 0$$

$$\Rightarrow 4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0$$

$$\Rightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

$$\Rightarrow 2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\Rightarrow 2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$\therefore ax^2 + bx + c = 0$ కు మూలాలు

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

16. $ax^2 + bx + c = 0$ కు మూలాలు సంకారణ సంఖ్యలు అయిన x యొక్క అన్ని వాస్తవ విలువలకు, $ax^2 + bx + c$, a లకు ఒకే గుర్తులు ఉంటాయని చూపండి.

సాధన: $ax^2 + bx + c = 0$ కు మూలాల సంకీర్ణ సంఖ్యలు కనుక $\Delta < 0$

$$(i.e.,) b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow 4ac - b^2 > 0$$

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

$$= x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}$$

$$= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$\therefore \forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c, a$ లకు ఒకే గుర్తు ఉంటాయి.

17. α, β లు $ax^2 + bx + c = 0$ కు వాస్తవ మూలాలు మరియు $\alpha < \beta$ అయిన

i) $\alpha < x < \beta$ అయినపుడు $ax^2 + bx + c$, a లకు వ్యతిరేక గుర్తులు ఉంటాయి.

ii) $x < \alpha$ లేదా $x > \beta$ అయినపుడు $ax^2 + bx + c$, a లకు ఒకే గుర్తు ఉంటుంది.

సాధన: α, β లు $ax^2 + bx + c = 0$ కు మూలాలు కనుక

$$ax^2 + bx + c = a(-\alpha)(x - \beta)$$

$$\Rightarrow \frac{ax^2 + bx + c}{a} = (x - \alpha)(x - \beta)$$

i) $\alpha < x < \beta \Rightarrow x - \alpha > 0, x - \beta < 0$

$$\Rightarrow \frac{ax^2 + bx + c}{a} < 0$$

$\Rightarrow ax^2 + bx + c$, a లకు వ్యతిరేక గుర్తులు ఉంటాయి.

ii) $x < \alpha$

$$\therefore \alpha < \beta \Rightarrow x < \alpha < \beta$$

$$\Rightarrow x - \alpha < 0, x - \beta < 0$$

$$\Rightarrow (x - \alpha)(x - \beta) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{ax^2 + bx + c}{a} > 0$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c, a$$

$$x > \beta, \therefore \alpha < \beta, x > \beta \Rightarrow x > \beta > \alpha$$

$$\Rightarrow (x - \beta) > 0, x - \alpha > 0$$

$$\Rightarrow (x - \alpha)(x - \beta) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{ax^2 + bx + c}{a} > 0$$

$\Rightarrow ax^2 + bx + c$, a లకు ఒకే గుర్తు ఉంటాయి.

$\therefore x < \alpha$ లేదా $x > \beta$ అయిన $ax^2 + bx + c$, a లకు ఒకే గుర్తు ఉంటుంది.

18. x, R మీద $\frac{x^2 + 34x - 71}{x^2 + 2x - 7}$ మొక్క ఏ విలవలూ 5, 9 ల మధ్య ఉండవని చూపండి. (Mar 05)

సాధన: $y = \frac{x^2 + 34x - 71}{x^2 + 2x - 7}$ అనుకుందాం.

$$\Rightarrow x^2y + 2xy - 7y = x^2 + 34x - 71$$

$$\Rightarrow (y-1)x^2 + 2(y-17)x + (71-7y) = 0$$

$$\therefore x \in R \Rightarrow \Delta \geq 0$$

$$(i.e.,) b^2 - 4ac \geq 0$$

$$\Rightarrow [2(y-17)]^2 - 4(y-1)(71-7y) \geq 0$$

$$\Rightarrow (y-17)^2 - (y-1)(71-7y) \geq 0$$

$$\Rightarrow y^2 - 34y + 289 - (-7y^2 + 78y - 71) \geq 0$$

$$\Rightarrow 9y^2 - 112y + 360 \geq 0$$

$$\Rightarrow y^2 - 14y + 45 \geq 0$$

$$\Rightarrow (y-5)(y-9) \geq 0$$

$$y^2 \text{ గుణకం} = 1 > 0, \quad y^2 - 14y + 45 \geq 0$$

$$y \geq 5 \text{ లేదా } y \geq 9$$

$$\Rightarrow y \text{ విలువ } 5, 9 \text{ ల మధ్య వుండదు.}$$

19. α, β లు $2x^2 + x + 3 = 0$ కు మూలాలు, అయిన $\frac{1-\alpha}{1+\alpha}, \frac{1-\beta}{1+\beta}$ లు మూలాలుగా గల వర్గ

సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి. (Mar 03)

సాధన: α, β లు $2x^2 + x + 3 = 0$ కు మూలాలు కనుక

$$\alpha + \beta = -\frac{1}{2}, \quad \alpha\beta = \frac{3}{2}$$

$$\text{మూలాల మొత్తం} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} + \frac{1-\beta}{1+\beta}$$

$$= \frac{(1-\alpha)(1+\beta) + (1-\beta)(1+\alpha)}{(1+\alpha)(1+\beta)}$$

$$= \frac{1-\alpha+\beta-\alpha\beta+1-\beta+\alpha-\alpha\beta}{1+\alpha+\beta+\alpha\beta}$$

$$= \frac{2-2\alpha\beta}{1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta} = \frac{2-2\left(\frac{3}{2}\right)}{1\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{-1}{2}$$

$$\text{మూలాల లబ్ధం} = \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right) \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right)$$

$$= \frac{1-\alpha-\beta+\alpha\beta}{1+\alpha+\beta+\alpha\beta} = \frac{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta}{1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$$

$$= \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

∴ కావలసిన వర్గ సమీకరణం

$$x^2 - (\text{మూలాల మొత్తం}) x + \text{మూలాల లబ్ధం} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \left(-\frac{1}{2} \right) x + \frac{3}{2} = 0$$

$$\therefore 2x^2 + x + 3 = 0$$

20. x వాస్తవం అయిన $6x^2 + x - 2$ సమానపు గుర్తులలో మార్పులను కనుక్కోండి.

సాధన: వర్గ సమీకరణం $6x^2 + x - 2 = 0$

$$\Rightarrow 6x^2 + 4x - 3x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x(3x+2) - 1(3x+2) = 0$$

$$\Rightarrow (2x-1)(3x+2) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}$$

$$\therefore a = 6 > 0$$

$$-\frac{2}{3} < x < \frac{1}{2} \text{ అయినపుడు}$$

$$6x^2 + x - 2 \text{ ఋణాత్మకం}$$

$$x < -\frac{2}{3} \text{ లేదా } x > \frac{1}{2} \text{ అయినపుడు } 6x^2 + x - 2 \text{ ధనాత్మకం}$$

21. $ax^2 + bx + c = 0$ సమీకరణం మూలాలు α, β అయితే, $\alpha^2 + \beta^2, \alpha^3 + \beta^3$ విలువలను a, b, c లలో కనుక్కోండి

జ: దత్తాంశం నుంచి

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2(\alpha\beta)$$

$$= \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2ac}{a^2} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)$$

$$= (\alpha + \beta)\left[(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta - \alpha\beta\right]$$

$$= (\alpha + \beta)\left[(\alpha + \beta)^2 - 3(\alpha\beta)\right]$$

$$= \left(-\frac{b}{a}\right)\left[\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 3\left(\frac{c}{a}\right)\right]$$

$$= -\frac{b}{a}\left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{3c}{a}\right) = \frac{3abc - b^3}{a^3}$$

22. $ax^2 + bx + c = 0$ వర్గ సమీకరణం మూలాలు α, β అనుకొందాం. $c \neq 0$ అయితే అప్పుడు

$\frac{1-\alpha}{\alpha}, \frac{1-\beta}{\beta}$ లను మూలాలుగా గల సమీకరణాన్ని రూపొందించండి.

జ: దత్తాంశం నుంచి $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$

$c \neq 0, \alpha \neq 0, \beta \neq 0$ అయినందువల్ల

$$\frac{1-\alpha}{\alpha} + \frac{1-\beta}{\beta} = \frac{\beta(1-\alpha) + \alpha(1-\beta)}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{\alpha + \beta - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} - 2 = \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)}{\left(\frac{c}{a}\right)} - 2$$

$$= -\frac{b}{c} - 2 = -\left(2 + \frac{b}{c}\right)$$

$$\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right) = \frac{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{1-\left(-\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{c}{a}\right)}{\left(\frac{c}{a}\right)} = \frac{a+b+c}{c}$$

23. $ax^2+bx+c=0$, $bx^2+cx+a=0$ వర్గ సమీకరణాలకు ఉమ్మడి మూలం ఉందని అనుకోండి.
అప్పుడు $a^3+b^3+c^3=3abc$ అని చూపండి.

జ: $a_1x^2+b_1x+c_1=0$, $a_2x^2+b_2x+c_2=0$

వర్గ సమీకరణాలకు ఉమ్మడి మూలం ఉండటానికి నియమం

$$(c_1a_2-c_2a_1)^2 = (a_1b_2-a_2b_1)(b_1c_2-b_2c_1)$$

ఇక్కడ $a_1=a$, $b_1=b$, $c_1=c$, $a_2=b$, $b_2=c$, $c_2=a$

$$\text{అందువల్ల } (cb-a^2)^2 = (ac-b^2)(ba-c^2)$$

$$\Rightarrow b^2c^2 - 2a^2bc + a^4$$

$$= a^2bc - ac^3 - b^3a + b^2c^2$$

$$\Rightarrow a^4 + ab^3 + ac^3 = 3a^2bc$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \quad (a \neq 0 \text{ కనుక})$$

www.sakshieducation.com