మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతములు

1. క్రింది ప్రమేయాలకు రోల్ సిద్ధాంతం సరిచూడండి.

i) $x^2 - 1; [-1, 1]$

జ: $f(x) = x^2 - 1$

f ప్రమేయం $[-1,1]$ పై అవిచ్ఛిన్నం, కనుక

$f(-1) = f(1) = 0$ మరియు

$[-1,1]$ లో f అవలకనీయం

$\therefore$ రోల్ సిద్ధాంతం ప్రకారం $c \in (-1,1)$ అయ్యేటట్లు

$f'(c) = 0$

$f'(x) = 2x = 0$

$\therefore = f'(c) = 0$

$2c = 0$

$c = 0$

$c = 0 \in (-1,1)$

కాబట్టి రోల్ సిద్ధాంతం సరిచూసినట్లే

ii) $\sin x - \sin 2x; [0, \pi]$

జ: $f(x) = \sin x - \sin x$

f ప్రమేయం $[0, \pi]$ పై అవిచ్ఛిన్నం,

కనుక $f(0) = f(\pi) = 0$ మరియు

లో f అవలకనీయం $[0, \pi]$

రోల్ సిద్ధాంతం ప్రకారం $c \in (0, \pi)$

$f'(c) = 0$

$f'(x) = \cos x - 2\cos 2x$

$f'(c) = 0 \Rightarrow \cos c - 2\cos 2c = 0$

$\Rightarrow \cos c - 2(2\cos^2 c - 1) = 0$

$\cos - 4\cos^2 c + 2 = 0$

$4\cos^2 c - \cos c - 2 = 0$

$$\cos c = \frac{1 \pm \sqrt{1+32}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

$$\therefore c \cos^{-1} = \left(\frac{1 \pm \sqrt{33}}{8} \right)$$

www.sakshieducation.com

iii) $\log(x^2+2)-\log 3,\ [-1,1]$

జ: $f(x)=\log(x^2+2)-\log 3$

f ప్రమేయం $[-1,1]$ పై అవిచ్ఛిన్నం,

కనుక $f(-1)=f(1)=0$ మరియు f

$[-1,1]$ లో f అవకలనీయం

రోల్ సిద్ధాంతం ప్రకారం $c\in(-1,1)$

$\therefore f'(c)=0$

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+2}(2x)$$

$$f'(c)=\frac{2c}{c^2+2}=0$$

$2c=0$

$c=0$

$c=0\in(-1,1)$

2. $f(x)=x^3+bx^2+ax$ **ప్రమేయానికి** $[1,3]$ **పై రోల్ సిద్ధాంతం ధ్రువపడుతుంది.** $c=2t+\frac{1}{\sqrt{3}}$ **అయితే** a,b **ల విలువలు కనుక్కోండి.**

www.sakshieducation.com

జ: ఇచ్చినవి $f(x)=x^3+bx^2+ax$

$f'(x)=3x^2+2bx+a$

$\therefore f'(x)=0\Leftrightarrow 3c^2+2bc+a=0$

$$\Leftrightarrow c=\frac{-2b\pm\sqrt{b^2-3a}}{3}$$

$$c=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-3a}}{3}$$

$$2+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-3a}}{3}$$

$$\frac{-b}{3}=2\qquad \frac{\sqrt{b^2-3a}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\Leftrightarrow b=6\ and\ b^2-3a=3$

$36-3=3a$

$33=3a$

$a=11$

కనుక $a=11\ and\ b=-6$

3. $x^2 - 3x + k = 0$ **సమీకరణానికి** $[0,1]$ **లో రెండు విభిన్న మూలాలు ఉండేటట్లుగా,** k **అనే వాస్తవ సంఖ్య ఉండదని చూపండి.**

జ: $f(0) = f(c)$

$0 - 0 + k = 1 - 3 + k$

$0 = -2$

ఇది సాధ్యపడదు. కనుక x అనే వాస్తవ సంఖ్య

4. $y = (x-3)^2$ **వక్రం పై** $(3,0)$**,** $(4,1)$ **లు రెండు బిందువులు. ఈ బిందువులను కలిపే జ్యాకు, వక్రం పై ఏ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ సమాంతరంగా ఉంటుందో కనుక్కోండి.**

జ: ఇచ్చిన బిందువులు $(3,0)$ $(4,1)$

జ్యావాలు $= \dfrac{1-0}{4-3} = 1$

$y = (x-3)^2$

$\dfrac{dy}{dx} = 2(x-3)$

$\Rightarrow$ వాలు $= 2(x-3)$

$1 = 2(x-3)$

$\dfrac{1}{2} = x - 3$

$x = \dfrac{1}{2} + 3 = \dfrac{7}{2}$

$y = (x-3)^2 = \left(\dfrac{7}{2} - 3\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

వక్రం పై బిందువు $\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$

5. $y = x^3$ **వక్రం పై** $(1,1), (3,27)$ **లు రెండు బిందువులు. ఈ బిందువులను కలిపే జ్యా, వక్రం పై ఏ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖకు సమాంతరంగా ఉంటుందో కనుక్కోండి.**

జ: ఇచ్చిన బిందువులు $(1,1)$ & $(3,27)$

జ్యావాలు $= \dfrac{27-1}{3-1} = 13$

$y = x^3$

$\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$

$\Rightarrow$ వాలు $= 3x^2$

www.sakshieducation.com

$13 = 3x^2$

$\frac{13}{3} = x^2$

$x = \sqrt{\frac{13}{3}} = \frac{\sqrt{39}}{3}$

$y = x^3 = \left(\frac{\sqrt{39}}{3}\right)^2 = \frac{39\sqrt{39}}{27} = \frac{13\sqrt{39}}{9}$

వక్రం పై బిందువు $\left(\frac{\sqrt{39}}{3}, \frac{13\sqrt{39}}{9}\right)$

6. క్రింది సందర్భాలలో $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ అయ్యేటట్లు ఉండే 'c' ని కనుక్కోండి

i) $f(x) = x^2 - 3x - 1, \quad a = \frac{-11}{7}, b = \frac{13}{7}$

జ: $f(b) = f\left(\frac{13}{7}\right) = \frac{169}{49} - \frac{3(13)}{7} - 1$

$= \frac{169 - 273 - 49}{49} = \frac{-153}{49}$

$f(a) = f\left(\frac{-11}{7}\right) = \frac{121}{9} - \frac{3(-11)}{7} - 1$

$= \frac{121 + 231 - 49}{49} = \frac{303}{49}$

$f'(x) = 2x - 3$

$f'(c) = 2c - 3$

$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$2c - 3 = \frac{\frac{-153}{49} - \frac{303}{49}}{\frac{13}{7} + \frac{11}{7}} = \frac{\frac{0456}{49}}{\frac{24}{7}}$

$2c - 3 = \frac{-456}{49} \times \frac{7}{24} = \frac{-19}{7}$

$2c = \frac{-19}{7} + 3$

$2c = \frac{2}{7}$

$c = \frac{1}{7}$

www.sakshieducation.com

ii) $f(x)=e^x;\ a=0,\ b=1$

$f(b)=f(1)=e'=e$

$f(a)=f(0)=e^0=1$

$f(x)=e^x$

$f'(x)=e^x$

$f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$e^c=\dfrac{e-1}{1-0}$ $\qquad a^x=N$

$e^c=e-1$ $\qquad \Leftrightarrow \log_a^N=x$

$\Rightarrow \log_e^{(e-1)}=c$

7. క్రింది ప్రమేయాలకు వాటి పక్క సూచించిన సంవృతాంతరాల పై లెగ్రాంజ్ మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం సరిచూడండి. ప్రతి సందర్భంలో, సిద్ధాంతంలో ఉన్న విధంగా బిందువు 'c' ని కనుక్కోండి.

i) x^2-1 *on* $[2,3]$

$f(x)=x^2-1$

f ప్రమేయం $[2,3]$ లో

అవిచ్ఛిన్నం మరియు f అవకలనీయం

కనుక $f(x)=x^2-1$

$f'(x)=2x$

లెగ్రాంజ్ మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం ప్రకారం

$c\in(2,3)$

$f'(c)=\dfrac{f(3)-f(2)}{3-2}$

$2c=\dfrac{8-3}{1}$

$2c=5,\quad c=\dfrac{5}{2}$

$\therefore c=\dfrac{5}{2}\in(2,3)$

ii) $\sin x-\sin 2x,\ [0,\pi]$

జ: $f(x)=\sin x-\sin 2x$

f ప్రమేయం $[0,\pi]$ లో అవిచ్ఛిన్నం మరియు f అవకలనీయం

$f(x)=\sin x-\sin 2x$

$f'(x)=\cos x-2\cos 2x$

www.sakshieducation.com

లెగ్రాంజ్ మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం ప్రకారం $c \in (0, \pi)$

$$f'(c) = \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi - 0}$$

$$\cos c - 2\cos 2c = 0$$

$$\cos c - 2(2\cos^2 c - 1) = 0$$

$$\cos c - 4\cos^2 c + 2 = 0$$

$$4\cos^2 c - \cos c - 2 = 0$$

$$\cos c = \frac{1 \pm \sqrt{1+32}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

$$c = \cos^{-1}\left(\frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}\right)$$

8. $f(x) = x(x+3)e^{-x/2}$ **ప్రమేయానికి** $[-3, 0]$ **అంతరంలో రోల్ సిద్ధాంతం సరిచూడండి.**

జ: ఇక్కడ $f(-3) = 0$, $f(0) = 0$ దత్త ప్రమేయం పై అవిచ్ఛిన్నమనీ, (-3, 0) పై అవకలనాయమని గమనించండి ఇంకా

$$f'(x) = \frac{(-x^2 + x + 6)}{2} e^{\frac{-x}{2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ లేదా } x = 3$$

ఈ రెండు విలువలలో $x = -2$ బిందువు వివృతాంతరం $(-3, 0)$లో ఉంది. కాబట్టి రోల్ సిద్ధాంతం సరిచేసినట్లే

9. $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ **అంతరం (1, 3)లో** $f(c) = 0$ **అయ్యేటట్లుగా ఒకటి కంటే ఎక్కువలు ఉన్నాయని చూపండి**

జ: $[1, 3]$ పై f అవిచ్ఛిన్నమనీ (1, 3) పై f అవకలనీయమని

$f(1) = f(3) = 0$ అని గమనించండి

$$f'(x) = (x-1)(x-2) + (x-1)$$

$$(x-3) + (x-2)(x-3)$$

$$= 3x^2 - 12x + 11$$

$f'(x) = 0$ కు మూలాలు $\dfrac{12 \pm \sqrt{144 - 132}}{6}$

$= 2 \pm \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ అవుతాయి

ఈ రెండు విలువలూ వివృతాంతరం (1, 3) లో అవకలజపు విలువల సున్న అయ్యేటట్లుగా ఉన్నాయి.

www.sakshieducation.com