

## సమతలం

1. మూల బిందువు నుంచి తలానికి గీసిన లంబపాదం  $(1, 3, -5)$  అయితే, ఆ తలం సమీకరణం రాయండి.

సాధన. OP రేఖ గమన తలానికి లంబంగా ఉంది. OP యొక్క

D.R లు  $1, 3, -5$

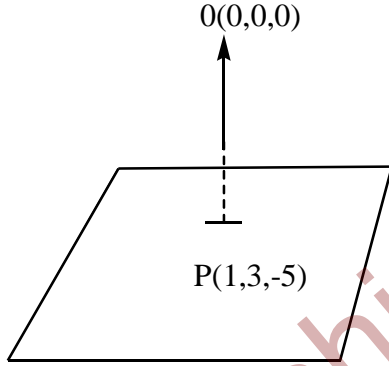
సమతలము  $P(1, 3, -5)$  గుండా పోతుంది.

సమతల సమీకరణము

$$1(x-1)+3(y-3)+5(z+5)=0$$

$$x-1+3y-9-5z-25=0$$

$$x+3y-5z-35=0$$



2. తలం సమీకరణం  $x+2y-3z-6=0$  అభిలంబ రూపానికి కుదించండి.

సాధన. సమతల సమీకరణము  $x+2y-3z-6=0$

i.e.,  $x+2y-3z=6$

$$\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2} = \sqrt{1+4+9}$$

$=\sqrt{14}$  తో భాగించగా

అభిలంబ రూపంలో సమతల సమీకరణము

$$\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)x + \left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right)y + \left(\frac{-3}{\sqrt{14}}\right)z = \frac{6}{14}$$

3. X,Y,Z -అంతర ఖండాలు 1,2,4 గా కలిగిన సమతలం సమీకరణం రాయండి. అంతరఖండ రూపంలో సమతల సమీకరణము

సాధన.  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

దత్తాంశం  $a=1, b=2, c=4$  అంతరఖండ రూపంలో సమతల సమీకరణము  $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$

4 తో గుణించగా,  $4x + 2y + z = 4$

4.  $x + 2y + 2z - 4 = 0$  తలానికి అభిలంబ రేఖ దిక్ కొసైన్లు కనుక్కోండి.

సాధన. సమతల సమీకరణము  $x + 2y + 2z - 4 = 0$

అభిలంబరేఖ DR లు  $(1, 2, 2)$

$\sqrt{1+4+4} = 3$  తో భాగించగా,

అభిలంబరేఖ D.c  $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

5.  $4x - 4y + 2z + 5 = 0$  సమీకరణాన్ని అంతరఖండ రూపంలోకి మార్చండి.

సాధన. సమతల సమీకరణము  $4x - 4y + 2z + 5 = 0$

$$-4x + 4y - 2z = 5$$

$$-\frac{4x}{5} + \frac{4y}{5} - \frac{2z}{5} = 1$$

అంతరఖండ రూపము  $\left(\frac{-5}{4}\right) + \left(\frac{5}{4}\right) + \left(\frac{-5}{2}\right) = 1$

X- అంతరఖండము  $= -\frac{5}{4}$

Y- అంతరఖండము  $= \frac{5}{4}$

Z- అంతరఖండము  $= -\frac{5}{2}$

6.  $x+2y+2z-5=0, 3x+3y+2z-8=0$  తలల మధ్యకోణం కనక్కోండి.

సాధన. సమతల సమీకరణము  $x+2y+2z-5=0$   
 $3x+3y+2z-8=0$

$$\cos \theta = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$
$$= \frac{|1(-3) + 2(-3) + 2(-2)|}{\sqrt{1+4+4} \sqrt{9+9+4}} = \frac{13}{3\sqrt{22}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{13}{3\sqrt{22}} \right)$$

7.  $(1,1,1)$  గుండా పోతూ,  $x+2y+3z-7=0$  తలాలికి సమాంతరంగా ఉండే తలం సమీకరణం రాయండి.

సాధన. దత్త సమతల సమీకరణము  $x+2y+3z-7=0$

సమాంతర తలం సమీకరణము  $x+2y+3z=k$

ఈ తలం  $P(1,1,1)$  గుండా పోతూ

$$1+2+3=k \Rightarrow k=6$$

కావలసిన సమతల సమీకరణము  $x+2y+3z=6$

8.  $(2,3,4)$  బిందువు గుండా పోతూ X-అక్షానికి లంబంగా ఉండే తలం సమీకరణం కనుక్కోండి

సాధన. సమతలం X- అక్షానికి లంబంగా ఉంటుంది

$\therefore$  X- అక్షం సమతలానికి అభిలంబరేఖ

X- అక్షం d.c.లు 1,0,0

కావలసిన సమతల సమీకరణము  $x=k$

ఈ తలము  $P(2,3,4)$  గుండా పోతుంది.

$$\therefore 22=k$$

కావలసిన సమతల సమీకరణము  $x=22$

9.  $2x+3y+7=0, XY$  - తలానికి లంబంగా ఉండే తలాన్ని సూచిస్తుందని చూపండి.

సాధన. దత్త సమతల సమీకరణము  $2x+3y+7=0$

xy తలం సమీకరణము  $z=0$

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 2.0 + 3.0 + 0.1$$

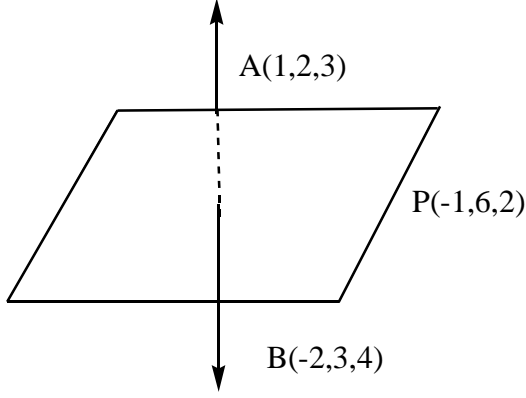
$$= 0+0+0=0$$

$2x+3y+7=0$  తలము XY - తలానికి లంబంగా ఉంది.

10.  $(-1,6,2)$  గుండాపోతూ  $(1,2,3), (-2,3,4)$  బిందువులను కలిపే రేఖకు లంబంగా ఉండే తలం సమీకరణం రాయండి.

సాధన.  $A(1,2,3), B(-2,3,4)$  బిందువులను కలిపే రేఖాఖండానికి లంబంగా ఉంది.

$$AB \text{ యొక్క d.r లు } 1+2, 2-3, 3-4 \\ \text{i.e, } 3, -1, -1$$



$AB$  రేఖ అభిలంబరేఖ సమతలము  $P(-1,6,2)$  గుండా పోతుంది.

కావలసిన సమతల సమీకరణము

$$3(x+1) - (y-6) - 1(z-2) = 0$$

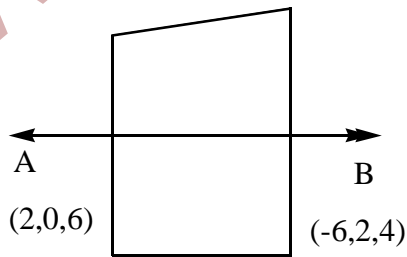
$$3x + 3 - y + 6 - z + 2 = 0$$

$$3x - y - z + 11 = 0$$

11.  $(2,0,6), (-6,2,4)$  బిందువులను కలిపే రేఖకు లంబంగా ఉంటూ, దానిని సమద్విఖండన చేసే తలం సమీకరణం రాయండి.

సాధన.  $A(2,0,6), B(-6,2,4)$  లు దత్త బిందువులు

$AB$  కి మధ్యబిందువు 'O'



$$O \text{ నిరూపకాలు } \left( \frac{2-6}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{6+4}{2} \right) = (-2, 1, 5)$$

సమతలము  $AB$  లంబంగా ఉంది.

సమతల అభిలంబ రేఖ d.r లు

$$2+6, 0-2, 6-4$$

$$8, -2, 2$$

సమతల సమీకరణము

$$+8(x+2) - 2(y-1) + 2(z-5) = 0$$

$$8x + 16 - 2y + 2 + 2z - 10 = 0$$

$$8x - 2y + 2z + 8 = 0$$

12.  $(0, 0, -4)$  బిందువు గుండాపోతూ  $(1, -2, 2), (-3, 1, -2)$  బిందువులను కలిపే రేఖకు లంబంగా ఉండే తలం సమీకరణం రాయండి.

సాధన.  $A(1, -2, 2), B(-3, 1, -2)$  లు దత్త బిందువులు

$$AB \text{ యొక్క d.r లు } 1+3, -2-1, 2+2 \text{ i.e., } 4, -3, 4$$

$$AB \text{ సమతలానికి లంబంగా ఉంటే } P(0, 0, -4) \text{ సమతల సమీకరణము}$$

$$4(x-0) - 3(y-0) + 4(z+4) = 0$$

$$4x - 3y + 4z + 16 = 0$$

13.  $(4, 4, 0)$  గుండాపోతూ,  $2x + y + 2z + 3 = 0$ ,  $3x + 3y + 2z - 8 = 0$  తలాలకు లంబంగా ఉండే తలం సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన.  $P(4, 4, 0)$  గుండాపోయే సమతల సమీకరణం

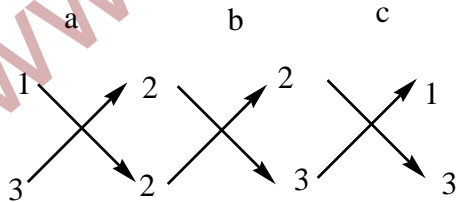
$$a(x-4) + b(y-4) + c(z-0) = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{ఈ తలం } 2x + y + 2z - 3 = 0$$

$$3x + 3y + 2z - 8 = 0 \text{ లకు లంబంగా ఉంది.}$$

$$\therefore 2a + b + 2c = 0 \dots\dots\dots(2)$$

$$3a + 3b + 2c = 0 \dots\dots\dots(3)$$



$$\frac{a}{2-6} = \frac{b}{6-4} = \frac{c}{6-3} \Rightarrow \frac{a}{-4} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}$$

(1) లో ప్రతిక్షేపిస్తే, సమతల సమీకరణము

$$-4(x-4) + 2(y-4) + 3(z-0) = 0$$

$$-4x + 16 + 2y - 8 + 3z = 0$$

$$-4x + 2y + 3z + 8 = 0$$

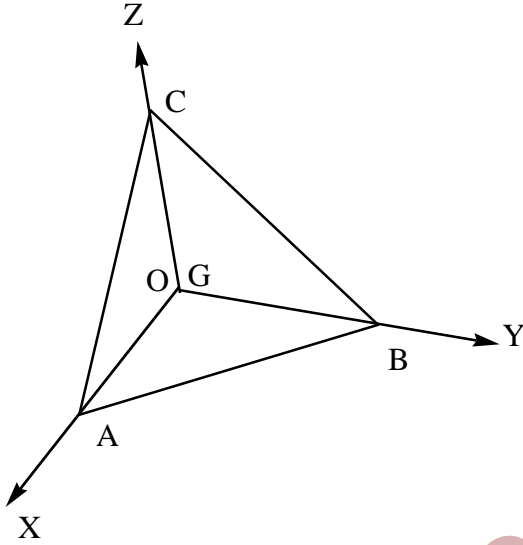
14. ఒక తలం నిరూపకాలను  $A, B, C$  బిందువులలో ఖండిస్తుంది.  $\Delta ABC$  కేంద్రభాసం

$(a, b, c)$  అయితే, తలం సమీకరణం  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 3$  అని చూపండి.

సాధన.  $\alpha, \beta, \gamma$  లు  $ABC$  ల సమతల నిరూపకాలను చేసే, అంతరఖండాలు అనుకుందాం.

అంతరఖండ సమతల సమీకరణము

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1 \quad \dots\dots\dots(1)$$



$A, B, C$  ల నిరూపకాలు

$$A(\alpha, 0, 0), B(0, \beta, 0), C(0, 0, \gamma)$$

$\Delta ABC$  యొక్క కేంద్రభాసము  $G$

$$G \text{ నిరూపకాలు } \left( \frac{\alpha}{3}, \frac{\beta}{3}, \frac{\gamma}{3} \right) = (a, b, c)$$

$$\frac{\alpha}{3} = a, \frac{\beta}{3} = b, \frac{\gamma}{3} = c$$

(1) లో ప్రతిక్షేపిస్తే,  $ABC$  తల సమీకరణము

$$\frac{x}{3a} + \frac{y}{3b} + \frac{z}{3c} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 3$$

15. ZX- తలానికి సమాంతరంగా ఉండి (0,4,4) బిందువు గుండాపోయే తలం సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన. ZX తల సమీకరణము  $y = 0$

సమాంతర సమతల సమీకరణము  $y = k$

ఈ తలం  $P(0,4,4) = 4 = k$  గుండా పోతుంది.

కావలసిన సమతల సమీకరణము  $y = 4$

16.  $(\alpha, \beta, \gamma)$  బిందువు గుండాపోతూ  $ax + by + cz = 0$  తలానికి సమాంతరంగా ఉండే తలం సమీకరణం రాబట్టండి.

సాధన. దత్త సమతల సమీకరణము  $ax + by + cz = 0$

సమాంతర సమతల సమీకరణము  $ax + by + cz = k$

ఈ తలం  $P(\alpha, \beta, \gamma)$  గుండా పోతుంది.

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = K$$

$\therefore$  కావలసిన సమతల సమీకరణము

$$ax + by + cz = a\alpha + b\beta + c\gamma ]$$

$$\text{i.e., } a(x - \alpha) + b(y - \beta) + c(z - \gamma) = 0$$

17.  $2x - y + 2 = 6, x + 3y + 2z = 7$  సమీకరణాలు నూచించే తలాల మధ్యకోణము  $2x - y + 6$   
 $x + y + 2z = 7$  సమతలాల మధ్యకోణము  $\theta$  అయితే

$$\cos \theta = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

$$= \frac{|2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2|}{\sqrt{4 + 1 + 1} \sqrt{1 + 1 + 4}}$$

$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$$

18 సమతల సమీకరణం  $x+2y-2z-9=0$  అని అభిలంబ రూపానికి కుదించి అభిలంబ రేఖ దిక్ కొసైన్లను మూలబిందువు నుంచి సమతలానికి దూరాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన. దత్త సమీకరణం  $x+2y-2z-9=0$

స్థిర రాశిని కుడువైపు రాస్తే,

$$x+2y-2z=9 \quad \dots\dots\dots(1)$$

(1) లో  $x,y,z$  ల గుణకాల వర్గాల మొత్తానికి వర్గమూలం

$$\sqrt{1^2+2^2+2^2}=\pm 3$$

$$p=\mp\left(\frac{-9}{\pm 3}\right)=3$$

(1)  $\pm 3$

$$\pm\frac{1}{3}x\pm\frac{2}{3}y\mp\frac{2}{3}z=\pm 3$$

కుడువైపు స్థిరరాశి గుర్తు ధనాత్మకం అయ్యేలా సమీకరణం గుర్తు విండుకృతే, అభిలంబ రూపంలో తలం సమీకరణం

$$\frac{x}{3}+\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z=3 \quad \dots\dots\dots(2)$$

(2) అభిలంబ రేఖ దిక్ కొసైన్లు  $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

మూలబిందువు నుంచి తలానికి లంబదూరం = 3 యూనిట్లు

19 ఒక సమతలం  $X,Y,Z$  - అక్షాలపై చేసే అంతర ఖండాలు వరుసగా 2,3,4 అయితే  $a,b,c$

లు వరుసగా  $X,Y,Z$ - అంతర ఖండాలగా గల సమతల సమీకరణం  $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$  అని చూపండి.

సాధన. సమతల సమీకరణం

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1 \quad \text{నుంచి}$$

$$\text{లేదా } 6x+4y+3z=12$$



20.  $(0, -1, 0), (2, 1, -1), (1, 1, 1), (3, 3, 0)$  బిందువులు సతలీయాలు అని చూపుము

Sol.  $A(0,-1,0) B(2,1,-1) C(1,1,1), D(3,3,0)$

$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$  బిందువు ల గుండా పోయే తలం

$$\text{¶ } \text{À} \text{0} \text{¶} \text{g } 0 \quad \begin{vmatrix} x-0 & y+1 & z-0 \\ 2-0 & 1+1 & -1-0 \\ 1-0 & 1+1 & 1-0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y+1 & z \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x(2+2) - (y+1)(2+1) + z(4-2) = 0$$

$$\Rightarrow 4x - 3y + 2z - 3 = 0$$

$D(3,3,0)$ , ని ప్రతిక్షేపించగా  $4.3 - 3.3 + 2.0 - 3 = 0 \Rightarrow 12 - 9 - 3 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ .

$D, ABC$ . తలంపై న ఉంటుంది. బిందువులు సతలీయాలు

www.sakshieducation.com