# MAXIMA AND MINIMA

## అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

**1. అవకలజాన్ని ఉపయోగించకుండా**

i) $f(x)=3x+7$ **ప్రమేయం** $R$ **పై శుద్ధ ఆరోహణం అని చూపండి.**

**జ:** $x_1, x_2 \in R$ అయితే, $x_1 < x_2$

$3x_1 < 3x_2$

ఇరువైపుల 7 కూడగా

$3x_1 + 7 < 3x_2 + 7$

$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$\therefore x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \forall x_1 x_2 \in R$

ప్రమేయం $R$ పై శుద్ధ ఆరోహణం

ii) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ **ప్రమేయం** $R$ **పై శుద్ధ అవరోహణంఅని చూపండి.**

**జ:** $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

అయితే $x_1 < x_2$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}$

$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$R$ పై $f(x)$ శుద్ధ అవరోహణం

iii) $f(x)=e^{3x}$ **ప్రమేయం** $R$ **పై శుద్ధ ఆరోహణం అని చూపండి.**

**జ:** $f(x)=e^{3x}$

$x_1 x_2 \in R$ అయితే $x_1 < x_2$

$W.k.t\ a > b$

అయితే $e^a > e^b$

$\Rightarrow e^{3x} < e^{3x_2}$

$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$R$ పై $f(x)$ శుద్ధ ఆరోహణం

iv) $f(x)=5-7x$ **ప్రమేయం** $R$ **పై శుద్ధ అవరోహణం అని చూపండి.**

**జ:** $f(x)=5-7x$

$x_1 x_2 \in R$

అయిన $x_1 < x_2$

www.sakshieducation.com

$\Rightarrow 7x_1 < 7x_2$

$-7x_1 > -7x_2$

ఇరువైపుల 5 కూడగా

$5 - 7x_1 > 5 - 7x_2$

$f(x_1) > f(x_2)$

$\therefore x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \forall x_1 x_2 \in R$

$R$ పై $f(x)$ శుద్ధ అవరోహణం

**2. కింద ప్రమేయాలు శుద్ధ ఆరోహణం, శుద్ధ అవరోహణం అయ్యే అంతరాలన కనుక్కోండి**

i) $x^2 + 2x - 5$

**జ:** $f(x) = x^2 + 2x - 5$

$f'(x) = 2x + 2$

$f(x)$ ఆరోహణం అయితే $f'(x) > 0$

$\Rightarrow 2x + 2 < 0$

$\Rightarrow x + 1 > 0$

$x > -1$

$x \in (-1, \infty)$ వద్ద $f(x)$ ఆరోహణం

$f(x)$ అవరోహణం అయితే $f'(x) > 0$

$\Rightarrow 2x + 2 < 0$

$\Rightarrow x + 1 < 0$

$x < -1$

$x \in (-1, \infty)$ వద్ద $f(x)$ ఆరోహణ

ii) $(x+1)^3 (x-1)^3$

జ: $f(x) = (x+1)^3 (x+1)^3$

$= (x^2 - 1)^3$

$= x^6 - 1 - 3x^4 + 3x^2$

$f'(x) = 6x^5 - 12x^3 + 6x$

$= 6(x^5 - 2x^3 + x)$

$= 6x(x^4 - 2x^2 + 1)$

$= 6x(x^2 - 1)^2$

$f'(x) \le 0$

$\Rightarrow 6x(x^2 - 1)^2 \le 0$

$f(x)$ అవరోహణ అయితే $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

www.sakshieducation.com

$f'(x) > 0$

$f(x)$ ఆరోహణ అయితే $(0,1) \cup (1,\infty)$

vi) $f(x) = \sqrt{25-4x^2}$

జ: $f(x)$ వాస్తవము కావలెనంటే $25-4x^2 \geq 0$

$$-(4x^2-25) \geq 0$$

$$-(2x+5)(2x-5) \geq 0$$

$\therefore x$ విలువ $-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}$ మధ్య ఉంటుంది.

$f$ యొక్క ప్రదేశము $= \left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{25-4x^2}}(-8x)$$

$$= -\frac{4x}{\sqrt{25-4x^2}}$$

$f(x)$ ఆరోహణము అయితే $f'(x) = 0$

$$\Rightarrow \frac{-4x}{\sqrt{25-4x^2}} > 0$$

$i.e., x < 0$

$f(x)$ ప్రమేయము $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ లో ఆరోహణము

$f(x)$ అవరోహణము అయితే $f'(x) = 0$

$$\Rightarrow -\frac{4x}{\sqrt{25-4x^2}} < 0$$

$\therefore x > 0$

$f(x)$ ప్రమేయము $\left(0, \frac{5}{2}\right)$లో అవరోహణం

**3. $(0, \pi/2)$ అంతరం పై $f(x) = \cos^2 x$ శుద్ధ అవరోహణం అని చూపండి.**

జ: $f(x) = \cos^2 x$

$$\Rightarrow f'(x) = 2\cos x(-\sin x)$$

$$= -2\sin x \cos x$$

$$= -\sin 2x$$

$$\therefore 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 0 < 2x < \pi$$

www.sakshieducation.com

'$\sin x$' $+ve$ మధ్య $0+\pi$

$\therefore f'(x) = -ve$

$\therefore f'(x) < 0$

$\therefore f(x)$ విలువ తగ్గుతుంది.

**4. క్రింది ప్రమేయాలకు గరిష్ఠ , కనిష్ఠం వుండవని చూపండి**

*i)* $f(x) = e^x$

**జ:** $f'(x) = e^x$ మరియు $f''(x) = e^x$

$\therefore$ గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువలకు $f'(x) = 0 \Rightarrow e^x = 0$

$\Rightarrow x$ నిర్వచితం కాదు

దత్త ప్రమేయానికి గరిష్ఠ, కనిష్ఠాలు కావు

*ii)* $f(x) = \log x (0, \infty)$

**జ:** $f'(x) = \frac{1}{x}$ మరియు $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x$ నిర్వచితం కాదు

$\Rightarrow f(x)$ కు గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువలు లేవు

*iii)* $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

**జ:** $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 = 0$ కు వాస్తవ విలువలు

$\Rightarrow f(x)$ కు గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువలు లేవు.

www.sakshieducation.com

## స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

**1.** **ప్రతి** $x>0$ **కి** $\frac{x}{(1+x)^2}<\tan^{-1}x<x$ **అని చూపండి**

**జ:** $f(x)=\tan^{-1}x-\frac{x}{1+x^2}$ అనుకుందాం

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{(1+x^2).1-x.2x}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{1+x^2-1-x^2+2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}>0$$

$f(x)$ ప్రమేయము $x>0$లో ఆరోహణము

$f(x)>f(0)$

$f(0)=\tan^{-1}0-0=0-0=0$ కనుక

*i.e.,* $f(x)>0$

$$\Rightarrow \tan^{-1}x-\frac{x}{1+x^2}>0$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}x>\frac{x}{1+x^2}\rightarrow(1)$$

$g(x)=x-\tan^{-1}x$ అనుకుందాం

$$g'(x)=1-\frac{1}{1+x^2}=\frac{1+x^2-1}{1+x^2}=\frac{x^2}{1+x^2}>0$$

$g(x)$ ప్రమేయము $x>0$ కు ఆరోహణము

$g(x)>g(0)$

$g(0)=0-\tan^{-1}0=0-0=0$

$\therefore x-\tan^{-1}x>0$

$\Rightarrow x>\tan^{-1}x\rightarrow(2)$

(1), (2) ల నుండి

$x>0$ అయితే $\frac{x}{1+x^2}<\tan^{-1}x<x$

**2.** $y=\frac{x^3}{6}-\frac{3x}{2}+\frac{11x}{2}+12$ **ప్రమేయానికి ఏ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ వాలులు పెరుగుతాయి?**

**జ:** వక్రం సమీకరణము $y=\frac{x^3}{6}-\frac{3x}{2}+\frac{11x}{2}+12$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{6}-\frac{3}{2}.2x\frac{11}{2}=0$$

$$=\frac{x^2}{2}-3x+\frac{11}{2}$$

www.sakshieducation.com

వాలు $= m = \frac{x^2}{2} - 3x + \frac{11}{2}$

$\frac{dm}{dx} = \frac{2x}{2} - 3 = x + 3$

వాలు ఆరోహణము $\Rightarrow m > 0$

$x - 3 > 0$

$x > -3$

వాలు $(3, \infty)$ లో ఆరోహణము

**3.** $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4 \quad \forall x \in R$ **ప్రమేయం ఏ అంతరంలో శుద్ధ అవరోహణం అవుతుందో కనుక్కోండి.**

**జ:** $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f(x)$ విలువ తగ్గుతుంది, $f'(x) > 0$

$3x^2 - 6x > 0$

$3x(x-2) > 0$

$(x-0)(x-2) > 0$

$f(x)$ విలువ తుగ్గుతుంది $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$f(x)$ విలువ పెరుగుతుంది. $f'(x) < 0$

$(x-0)(x-2) < 0$

$x \in (0, 2)$

**4.** $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ **అంతరాలలో అవరోహణమో, ఆరోహణమో చూపండి.**

జ: $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$

$f(x) = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$

$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$

$f'(x) = \frac{-1}{2} 2\sin 2x \cos 2x(2)$

$= -2\sin 2x . \cos 2x$

$= -\sin 4x$

$0 < x < \frac{\pi}{4}$

$\therefore f(x)$ విలువ తగ్గుతుంది, $f'(x) < 0$

$-\sin x < 0$

www.sakshieducation.com

$\sin x > 0$

$\therefore x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

$f(x)$ విలువ పెరుగుతుంది. $f'(x) > 0$

$-\sin x > 0$

$\sin x < 0$

$x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

**5. క్రింది ప్రమేయాలకు వాటి ప్రక్కనే సూచించిన ప్రదేశాల పై స్థానిక అంత్యబిందువులు, స్థానిక అంత్య విలువలు (ఉంటే) కనుక్కోండి**

i) $f(x) = x^2, \forall x \in R$

జ: $f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x \Rightarrow f''(x) = 2$

గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువలు $f'(x) = 0$

$2x = 0$

$x = 0$

ఇప్పుడు $f''(x) = 2 > 0$

$\therefore f(x)$ వద్ద $x = 0$ కనిష్ఠ విలువ ఉంది

స్థానిక కనిష్ఠ బిందువు $x = 0$

స్థానిక కనిష్ఠ విలువ = 0

ii) $f(x) = \sin x, [0, 4\pi]$

జ: ఇచ్చినది, $f(x) = \sin x$

$\Rightarrow f'(x) = \cos x$

$\Rightarrow f''(x) = -\sin x$

గరిష్ఠ లేక కనిష్ఠ విలువలు

$f'(x) = 0$

$\cos x = 0$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$

i) $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1 < 0$

$f(x) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

www.sakshieducation.com

$\therefore$ స్థానిక గరిష్ఠ బిందువు $x=\frac{\pi}{2}$

స్థానిక గరిష్ఠ విలువ $x=1$

$ii)\ f''\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-\sin\frac{3\pi}{2}=-1>0$ $\qquad f(x)=\sin\frac{3\pi}{2}=-1$

$\therefore$ స్థానిక కనిష్ఠ బిందువు $x=\frac{3\pi}{2}$

స్థానిక కనిష్ఠ బిందువు $x=-1$

$iii)\ f''\left(\frac{5\pi}{2}\right)=-\sin\frac{5\pi}{2}=-1<0$

$f(x)=\sin\frac{5\pi}{2}=1$

$\therefore$ స్థానిక గరిష్ఠ బిందువు $x=\frac{5\pi}{2}$

స్థానిక గరిష్ఠ విలువ $x=1$

$iv)\ f''\left(\frac{7\pi}{2}\right)=-\sin\frac{7\pi}{2}=1>0$

$f(x)=\sin\frac{7\pi}{2}=-1$

$\therefore$ స్థానిక కనిష్ట బిందువు $x=\frac{7\pi}{2}$

స్థానిక కనిష్ట విలువ $x=-1$

$iii)$ $f(x)=x^3-6x^2+9x+15$

జ: $f'(x)=3x^2-12x+9\Rightarrow f''(x)=16x-12$

$\therefore$ గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువలకు $f'(x)=0$

$\Rightarrow 3x^2-12x+9=0$

$\Rightarrow x^2-4x+3=0$

$\Rightarrow (x-1)(x-3)=0$

$\Rightarrow x=1$ లేదా 3

ఇప్పుడు $f''(1)=6(1)-12=-6<0$

$\therefore f(x), x=1$ వద్ద గరిష్ఠము

గరిష్ఠ విలువ $f(1)=1^3-6(1)^2+9(1)+15$

$=1-6+9+15=19$

$f''(3)=6(3)-12=18-12=6>0$

$\therefore f(x),\ x=3$ వద్ద కనిష్ఠము

కనిష్ఠ విలువ $=f(3)=3^3-6.3^2+9.3+15$

www.sakshieducation.com

$= 27 - 54 + 27 + 15$

$= 15$

*viii)* $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} \forall x \in R$

జ: $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}$ మరియు $f''(x) = \frac{4}{x^3}$

$\therefore$ గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువలకు $f'(x) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

$f''(2) = \frac{4}{2^3} = \frac{1}{2} > 0$ $(x > 0$ కనుక

$\therefore f(x), x = 2$ వద్ద కనిష్ఠ విలువ ఉంది

కనిష్ఠ విలువ $= f(2) = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} = 1 + 1 = 2$

**6. క్రింది ప్రమేయాలకు పక్కనే సూచించిన ప్రదేశాల పై పరమ గరిష్ఠ, పరమ కనిష్ఠ విలువలను (ఉంటే) కనుక్కోండి**

*i)* $f(x) = (x-1)^2 + 3; [-3,1]$

జ: $x = 1$ వద్ద కనిష్ఠము

కనిష్ఠ విలువ $= f(1) = 0 + 3 = 3$

$(-3,1)$ లో $f$ ఆరోహణముగరిష్ఠ విలువ

$f(-3) = (-3,-1)^2 + 3 = 16 + 3 = 19$

$f(1) = 0 + 3 = 3$

గరిష్ఠ విలువ $= 19$

కనిష్ఠ విలువ $= 3$

*iii)* $f(x) = 2|x|$ పై $[-1, 6]$

జ: $f'(x) = \frac{2|x|}{x}$

గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువలు $f'(x) = 0$

$\frac{2|x|}{x} = 0 \Rightarrow x = 0$

$f(0) = 0$

*iv)* $f(x) = x + \sin 2x; [0, 2\pi]$

జ: $f(x) = x + \sin 2x$

$f'(x) = 1 + 2\cos 2x$

www.sakshieducation.com

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2\cos 2x + 1 = 0$

$\Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow 2x = \frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \in (0, 2\pi)$

$f(0) = 0 + \sin 2(0) = 0$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} + \sin 2.\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$f(2\pi) = 2\pi + \sin 2.2\pi = 2\pi + 0 = 2\pi$

కనిష్ఠ విలువ $= 0$

గరిష్ఠ విలువ $= 2\pi$

**7. మొదటి అవకలజ పరీక్షను ఉపయోగించి $f(x) = x^3 - 12x$ ప్రమేయానికి $R$ పై స్థానిక అంత్య విలువలు కనుక్కోండి**

**జ:** $f(x) = x^3 - 12x$

$f'(x) = 3x^2 - 12$

$f''(x) = 6x$

గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువలు $f'(x) = 0$

$3x^2 - 12 = 0$

$3x^2 = 12$

$x = \pm 2$

$f''(2) = 12 > 0$

స్థానిక గరిష్ఠ బిందువు $x = 2$

స్థానిక గరిష్ఠ విలువ $= -16$

$f''(-2) = -12 < 0$

స్థానిక గరిష్ఠ బిందువు $x = -1$

స్థానిక గరిష్ఠ విలువ $= 16$

www.sakshieducation.com

**8.** **రెండో అవకలజ పరీక్షను ఉపయోగించి**

$f(x) = x^3 - 9x^2 - 48x + 72 \forall x \in R$

**కు స్థానిక అంత్య విలువలు కనుక్కోండి.**

**జ:** $f(x) = x^3 - 9x^2 - 48x + 72$

$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 18x - 48$

$= 3(x-8)(x+2)$

విరామ బిందువులు $-2 \& 8$

$f''(x) = 6x - 18 = 6(x-3)$

$x = 8, \quad f''(8) = 30 > 0$

$\therefore (8) = (8)^3 - 9(8)^2 - 48(8) + 72$

$= 512 - 576 - 384 + 72$

$= -376$

$x = -2, \quad f''(-2) = -30 < 0$

$f(-2) = (-2)^3 - 9(-2)^2 - 48(-2) + 72$

$= -8 - 36 + 96 + 72$

$= 124$

స్థానిక కనిష్ఠ బిందువు $= -376$

స్థానిక గరిష్ఠ విలువ $= 124$

**9.** $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ **పై నిర్వచితమైన ప్రమేయం**

$f(x) = -\sin 2x - x$ **కు స్థానిక గరిష్ఠ, స్థానిక కనిష్ఠాలను కనుక్కోండి**

**జ:** $f(x) = -\sin 2x - x$

$f'(x) = -2\cos 2x - 1$

$f''(x) = 4\sin 2x$

విరామ బిందువు $x = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{3}, \quad f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4\sin\frac{2\pi}{3}$

$= \frac{4\sqrt{3}}{2} > 0$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}$

www.sakshieducation.com

$x = \frac{\pi}{3}\ f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -4\sin\frac{2\pi}{3}$

$= -\frac{4\sqrt{3}}{2} < 0$

$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = +\sin\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$

స్థానిక కనిష్ఠ బిందువు $= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}$

స్థానిక గరిష్ఠ విలువ $= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$

**10.** $[0,5]$ **పై నిర్వచితమైన ప్రమేయం** $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 2$ **కు స్థానిక గరిష్ఠ, స్థానిక కనిష్ఠాలను కనుక్కోండి**

**జ:** $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 2$

$f(x) = 6x^2 - 6x - 36$

$f''(x) = 12x - 6$

గరిష్ఠ, కనిష్ట విలువలు $f'(x) = 0$

$6x^2 - 6x - 36 = 0$

$x^2 - x - 6 = 0$

$x^2 - 3x + 2x - 6 = 0$

$x(x-2) + 2(x-3) = 0$

$(x+2)(x-3) = 0$

$x = 3, -2$

$f''(3) = 30 > 0$

$x = 3$ వద్ద $f(x)$ కు గరిష్ట/ కనిష్ట విలువ

$f(3) = 2(3)^3 - 3(3)^2 - 36(3) + 2$

$= 54 - 27 - 108 + 2$

$= -79$

స్థానిక గరిష్ట విలువ $= -79$

$0 \le x \le 5$

$\therefore f(0) = 0 - 0 - 0 + 2$

$= 2$

$\therefore$ స్థానిక గరిష్ట విలువ $= 2$

www.sakshieducation.com

11. $f(x) = 8x^3 + 81x^2 - 42x - 8 \forall x \in R[-8, 2]$ **పరమ గరిష్టం, పరమ కనిష్టాలను కనుక్కోండి.**

**జ:** $f(x) = 8x^3 + 81x^2 - 42x - 8$

$f'(x) = 24x^2 + 162x - 42$

గరిష్ట, కనిష్ట విలువలు $f'(x) = 0$

$24x^2 + 162x - 42 = 0$

$4x^2 + 27x - 7 = 0$

$4x^2 + 28x - x - 7 = 0$

$4x(x+7) - 1(x+7) = 0$

$(x+7)(4x-1) = 0$

$x = -7$ లేదా $\frac{1}{4}$

$f(-8) = 8(-8)^3 + 81(-8)^2 - 42(-8) - 8$

$= -8(512) + 81(64) + 336 - 8$

$= -4096 + 5184 + 336 - 8$

$= 5520 - 4104 = 1416$

$f(2) = 8(2)^3 + 81(2)^2 - 42(2) - 8$

$= 64 + 324 - 84 - 8$

$= 296$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = 8\left(\frac{1}{4}\right)^3 + 8\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 42\left(\frac{1}{4}\right)$

$= \frac{8}{64} + \frac{81}{16} - \frac{42}{4}$

$= \frac{8 + 324 - 672}{164}$

$= -\frac{852}{64} = -\frac{213}{16}$

$f(-7) = 1246$

పరమ గరిష్ఠ విలువ $= 1416$

పరిమ కనిష్ట విలువ $= \frac{-213}{16}$

www.sakshieducation.com

**12. రెండు సంఖ్యల మొత్తం 16గా ఉంటూ వాటి వర్గాల మొత్తం కనిష్ఠంగా ఉండే సంఖ్యలను కనుక్కోండి**

**జ:** $x, y$ లు రెండు సంఖ్యలు అనుకోండి

$x + y = 16$

$\Rightarrow y = 16 - x$

$f(x) = x^2 + y^2 = x^2 + (16 - x)^2$

$= x^2 + 256 + x^2 - 32x$

$f'(x) = 4x - 32$

కనిష్ఠ, గరిష్ఠ విలువలు $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 4x - 32 = 0$

$4x = 32$

$x = 8$

$f''(x) = 4 > 0$

$\therefore x = 8$ వద్ద $f(x)$ కనిష్ఠం

$y = 16 - x = 16 - 8 = 9$

$\therefore$ కావలసిన సంఖ్యలు 8, 8

www.sakshieducation.com

## ధీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు

**1.** **రెండు ధనాత్మక సంఖ్యల మొత్తం 12 , వాటి వర్గాల మొత్తం అల్పిష్ఠం అయ్యేటట్లుగా ఆ సంఖ్యలను కనుక్కోండి.**

**Sol:** సంఖ్యలను x, y అనుకోండి.

$\Rightarrow x + y = 12$

$\Rightarrow y = 12 - x$

దత్తాంశం $f(x) = x^2 + y^2 \Rightarrow f(x) = x^2 + (12 - x)^2$

$= x^2 + 144 + x^2 - 24x$

$= 2x^2 - 24x + 144$

$\Rightarrow f'(x) = 4x - 24 \Rightarrow f''(x) = 4$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x - 24 = 0$

$\Rightarrow 4x - 24 \Rightarrow x = \frac{24}{4} = 6$

$f''(x) = 4 > 0$

**x = 6**వద్ద $f(x)$ కనిష్ఠం

$y = 12 - x = 12 - 6 = 6$

$\therefore$ కావల్సిన సంఖ్యలు 6, 6.

**2.** **x + y = 60 మరియు $xy^3$ మహిష్ఠం అయ్యేటట్లుగా ధనాత్మక ¶ 0 P ï v À $x, y$ లను కనుక్కోండి**

Sol: $x + y = 60 \Rightarrow y = 60 - x$ —(1)

$f(x) = xy^3 = x(60 - x)^3$

$f' = x\,3(60 - x)^2(-1) + (60 - x)^3$

$= -3x(60 - x)^2 + (60 - x)^3$

www.sakshieducation.com

$=(60-x)^2[-3x+60-x]$

$=(60-x)^2(60-4x)=4(60-x)^2(15-x)$

$f''=4\left[(60-x)^2(-1)+(15-x)2(60-x)(-1)\right]$

$=4(60-x)[-60+x-30+2x]$

$=4(60-x)(3x-90)$

$=12(60-x)(x-30)$

కనిష్ఠం, గరిష్ఠం ల కొరకు $f'=0$

$\Rightarrow 4(60-x)^2(15-x)=0$

$\Rightarrow x=15, x=60$ కాని $x\neq 60$

$\therefore x=15 \Rightarrow y=60-15=45$

$f''(15)=12(60-15)(15-3x)<0$

$\Rightarrow$ $x=15$ అయితే f గరిష్ఠం

$\Rightarrow y=45.$

$\therefore$ కావల్సిన సంఖ్యలు 15, 45.

**3.** $(-6,0)$ **నుండి** $x^2-y^2+16=0$**. వక్రానికి గల కనిష్ఠ దూరం కనుక్కోండి.**

**Sol:** $P(x,y)$ వక్రంపై గల ఏదైన బిందువు అనుకోండి.

$x^2-y^2+16=0$

$\therefore y^2=x^2+16$

$A(-6,0)$

$AP^2=(x+6)^2+y^2=(x+6)^2+x^2+16$

$=x^2+12x+36+x^2+16 = 2x^2+12x+52$

www.sakshieducation.com

$$f(x) = 2x^2 + 12x + 52$$

$$f'(x) = 4x + 12 \text{ and } f''=4$$

కనిష్ఠం, గరిష్ఠం ల కొరకు , $f'(x) = 0 \Rightarrow 4x + 12 = 0$

$$4x = -12$$

$$x = \frac{-12}{4} = -3$$

$$f''(x) = 4 > 0$$

$x = -3$ అయితే f కనిష్ఠం .

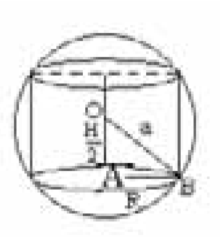
X= -3 $\Rightarrow y^2 = x^2 + 16 = 9 + 16 = 25; \; y = 5$

$\therefore$ కనిష్ఠ దూరం $AP = \sqrt{(-3+6)^2 + 25}$

$$= \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

**4. 'a' యూనిట్ వ్యాసార్థం గల గోళం లో అంతర్లిఖిత స్థూపంలో గరిష్ఠ ఘనపరిమాణం గల స్థూపం కొలతలను కనుక్కోండి.**

Sol: స్థూపం వ్యాసార్థం R, ఎత్తు H అనుకోండి. అప్పుడు OA = H/2.



$\Delta OAB$ నుండి

$$OB^2 = OA^2 + AB^2$$

$$a^2 = R^2 + \frac{H^2}{4}$$

www.sakshieducation.com

$$R^2 = a^2 - \frac{H^2}{4}$$

ఘనపరిమాణం V = $\pi R^2 H$

$$V = \pi H\left(a^2 - \frac{H^2}{4}\right)$$

Let $f(H) = \pi\left(a^2 H - \frac{H^2}{4}\right)$

$$f'(H) = \pi\left(a^2 - \frac{3H^2}{4}\right),$$

$$f''(H) = \pi\left(-\frac{6H}{4}\right)$$

కనిష్ఠం, గరిష్ఠం ల కొరకు

$f^1 = 0$

$$\Rightarrow \pi\left(a^2 - \frac{3H^2}{4}\right) = 0$$

$$\therefore a^2 - \frac{3H^2}{4} = 0 \Rightarrow \frac{3H^2}{4} = ah$$

$$\Rightarrow H^2 = \frac{4a^2}{3} \Rightarrow H = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$$f''(H) = \pi\left(\frac{-6H}{4}\right) < 0$$

$H = \frac{2a}{\sqrt{3}}$ అయితే $f(H)$ గరిష్ఠం

$$\Rightarrow R^2 = a^2 - \frac{H^2}{4} = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}$$

www.sakshieducation.com

$\Rightarrow R = \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{3}}$

స్థూపం కొలతలు $\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{3}}, \frac{2a}{\sqrt{3}}$

**5.** $2\sin x + \sin 2x$ **అనే ప్రమేయానికి** $[0, 2\pi]$ **అంతరంపై కనిష్ఠ, గరిష్ఠ విలువలను కనుక్కోండి**

**Sol:** $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$

$\Rightarrow f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x + \cos 2x = 0$

$\Rightarrow \cos x + 2\cos^2 x - 1 = 0$

$\Rightarrow (2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$

$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ or $\cos x = -1$

$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$

అంత్య బిందువులు $0, 2\pi$

దత్త ప్రమేయానికి $0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$ and $2\pi$ లవద్ద విలువలు కనుగొందాం

$f(0) = 0, f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

$f(\pi) = 0, f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$

$f(2\pi) = 0$.

$\therefore$ $[0, 2\pi]$ అంతరంలో గరిష్ఠ విలువ $= \max.\left\{f(0), f\left(\frac{\pi}{3}\right) f\left(\frac{5\pi}{3}\right), f(2\pi)\right\}$

www.sakshieducation.com

$= \max.\left\{0, \frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right\} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$[0, 2\pi]$ అంతరంలో కనిష్ఠ విలువ $= \text{Min.}\left\{0, \frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right\} = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$

**6.** **30cm×80cm కొలతలుగా ఉండే ఒక దీర్ఘచతురస్రాకారపు రేకుముక్క నాలుగు మూలల నుండి x భుజంగా ఉండే చతురస్రాకార ముక్కలను కత్తిరించి మిగిలిన రేకును మడిచి మూతలేనిపెట్టెను తయారుచేశారు. ఆ పెట్టె ఘనపరిమాణం గరిష్ఠం అయితే x విలువ కనుక్కోండి.**

**Sol:** రేకుపొడవు = 80 , రేకుపెడల్పు = 30.

చతురస్ర భుజం = x

పెట్టె పొడవు $= 80 - 2x = l$

పెట్టెపెడల్పు $= 30 - 2x = b$

పెట్టెఎత్తు = x = h

ఘ.ప. = $lbh = (80 - 2x)(30 - 2x).x$

$= x\left(2400 - 200x + 4x^2\right)$

$f(x) = 4x^3 - 220x^2 + 2400x$

$\Rightarrow f'(x) = 12x^2 - 440x + 2400$

$= 4\left[3x^2 - 110x + 600\right]$ and $f'' = 4(6x - 110)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 110x + 600 = 0$

$x = \frac{110 \pm \sqrt{12100 - 7200}}{6}$

$= \frac{110 \pm 70}{6} = \frac{180}{6} \text{ or } \frac{40}{6} = 30 \text{ or } \frac{20}{3}$

If $x = 30, b = 30 - 2x = 30 - 2(30) = -30 < 0$

$\Rightarrow x \neq 30$

www.sakshieducation.com

$$\therefore x = \frac{20}{3}$$

$$f''(x) = 24x - 440$$

$$x = \frac{20}{3}, f''(x) = 24.\frac{20}{3} - 440$$

$$= 160 - 440 \quad = -280 < 0$$

$\Rightarrow f(x)$ $x = \frac{20}{3}$ అయితే $f(x)$ గరిష్ఠం

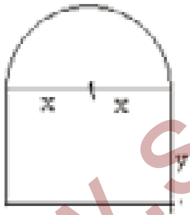
$x = \frac{20}{3}cm$ అయితే పెట్టె ఘనపరిమాణం గరిష్టం.

**7. చుట్టు కొలత 20 అడుగులు ఉండేటట్లు దీర్ఘచతురస్రం పై అర్ధవృత్తం ఉన్న ఆకారాన్ని నిర్మించగలిగే కిటికీ లన్నింటిపైశాల్యాలలో గరిష్ట వైశాల్యం కనుక్కోండి.**

**Sol:** దీర్ఘచతురస్రం పొడవు = 2x

దీర్ఘచతురస్రంవెడల్పు= y అనుకొనుము

అ ర్ధవృత్త వ్యాసార్ధం x అవుతుంది.




చుట్టుకొలత $= 2x + 2y + \pi.x = 20$

$$2y = 20 - 2x - \pi x$$

$$y = 10 - x - \frac{\pi}{2}.x$$

$$Area = 2xy + \frac{\pi}{2}.x^2$$

www.sakshieducation.com

$$= 2x\left(10 - x - \frac{\pi x}{2}\right) + \frac{\pi}{2}x^2$$

$$= 20x - 2x^2 - \pi x^2 + \frac{\pi}{2}x^2$$

$$f(x) = 20x - 2x^2 - \pi x^2 + \frac{\pi}{2}x^2$$

$\Rightarrow f' = 20 - 4x - 2\pi x + \pi x$ and $f'' = -4 - 2\pi + \pi = -4 - \pi$

కనిష్ఠం, గరిష్ఠం ల కొరకు $f'(x) = 0 \Rightarrow 20 - 4x - \pi x = 0$

$$\Rightarrow (\pi + 4)x = 20$$

$$\Rightarrow x = \frac{20}{\pi + 4}$$

$$f''(x) = -4 - \pi < 0$$

$\Rightarrow f(x)$ , $x = \frac{20}{\pi + 4}$ వద్ద గరిష్ఠం.

$$y = 10 - x - \frac{\pi}{2}x = 10 - \frac{20}{\pi + 4} - \frac{\pi}{2}\frac{20}{\pi + 4}$$

$$= \frac{10\pi + 40 - 20 - 10\pi}{\pi + 4} = \frac{20}{\pi + 4}$$

గరిష్ఠ వైశాల్యం $= 2xy + \frac{\pi}{2}.x^2$

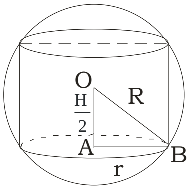
$$= \frac{40}{\pi + 4}.\frac{20}{\pi + 4} + \frac{\pi}{2}\frac{400}{(\pi + 4)^2}$$

$$= \frac{800 + 200\pi}{(\pi + 4)^2} = \frac{200(\pi + 4)}{(\pi + 4)^2} = \frac{200}{\pi + 4} \text{sq.feet.}$$

www.sakshieducation.com

8. **R వ్యాసార్ధం గా గల గోళంలో అంతర్లిఖిత స్థూపాలలో వక్ర తల వైశాల్యం గరిష్టమ య్యే స్థూపం ఎత్తు $\sqrt{2R}$ అని చూపుము**

Sol: స్థూపం వ్యాసార్ధం $r$, ఎత్తు H అనుకోండి




$$\Delta OAB,\ OA^2 + AB^2 = OB^2$$

$$\Rightarrow\ r^2 + \frac{h^2}{4} = R^2;\ r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$$

వక్రతలవైశాల్యం $= 2\pi rh$

$$= 2\pi\sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}.h$$

$$= \pi h\sqrt{4R^2 - h^2}$$

$$f(h) = \pi h\sqrt{4R^2 - h^2}$$

$$f'(h) = \pi\left[h.\frac{1}{2\sqrt{4R^2 - h^2}}(-2h) + \sqrt{4R^2 - h2.1}\right]$$

$$= \pi.\frac{-h^2 + 4R^2 - h^2}{\sqrt{4R^2 - h^2}} = \frac{2\pi\left(2R^2 - h^2\right)}{\sqrt{4R^2 - h^2}}$$

కనిష్ఠం, గరిష్ఠం ల కొరకు $f'(h) = 0$

$$\therefore 2R^2 - h^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi\left(2R^2 - h^2\right)}{\sqrt{4R^2 - h^2}} = 0$$

www.sakshieducation.com

$\Rightarrow \; h^2 = 2R^2 \Rightarrow h = \sqrt{2}R$

$\Rightarrow \; \sqrt{4R^2 - h^2}\,(-2h) + \left(2R^2 - h^2\right)$

$$f''(h) = 2\pi \frac{\frac{d}{dh}\sqrt{4R^2 - h^2}}{4R^2 - h^2}$$

$$= -\frac{4\pi h + 0}{\sqrt{4R^2 - ^2}} < 0 \left[\text{when } h = \sqrt{2}R\right]$$

$f(h)$ విలువ గరిష్ఠం.

కావున స్థూపం ఎత్తు $h = \sqrt{2}R$

**9. $l$ పొడవు ఉండే తీగను రెండు ముక్కలు చేసి ఒక ముక్కను చతురస్రాకారంగా, రెండో ముక్కను వృత్తాకారంగా వంచగా ఏర్పడిన వైశాల్యాలమొత్తం అల్పిష్ఠంకావాలంటే ఆ ముక్కల పొడవు ఎంత?**

**Sol:** చతురస్ర భుజం $x$ , వృత్త వ్యాసార్ధం $r$ అనుకోండి.

కావున $4x + 2\pi r = l$

$4x = l - 2\pi r$

$$x = \frac{l - 2\pi r}{4}$$

వైశాల్యాల మొత్తం $= x^2 + \pi r^2$

$$f(r) = \frac{(l - 2\pi r)^2}{16} + \pi r^2$$

$$f'(r) = \frac{2(l - 2\pi r)}{16}(-2\pi) + 2\pi r = 0$$

$$f'(r) = 0 \Rightarrow \frac{-\pi}{4}(l - 2\pi) + 2\pi r = 0$$

www.sakshieducation.com

$$\frac{\pi}{4}(l-2\pi r)=2\pi r$$

$$l.\frac{\pi}{4}=2\pi r\left(\frac{\pi}{4}+1\right)=\frac{2\pi r(\pi+4)}{4}$$

$$r=\frac{l}{2(\pi+4)}$$

$$2\pi r=2\pi.\frac{l}{2(\pi+4)}=\frac{l\pi}{\pi+4}$$

$$x=\frac{l-2\pi r}{4}=\frac{1}{4}\left(l\frac{-\pi l}{\pi+4}\right)$$

$$=\frac{\pi l+rl-\pi l}{4\pi+4}=\frac{4l}{4(\pi+4)}$$

$$=\frac{l}{\pi+4}$$

$$4x=\frac{4l}{\pi+4}$$

$$f''(x)\frac{\pi}{4}(2\pi)+2\pi\frac{-\pi^2}{2}=\frac{\pi(4-\pi)}{2}>0$$

$r=\frac{l}{2(\pi+4)}$ ఐతే $f(r)$ కనిష్ఠం

వైశాల్యాలమొత్తం అల్పిష్టం అయితే ముక్కల పొడవు లు $\frac{\pi l}{\pi+4}$ and $\frac{4l}{\pi+4}$

www.sakshieducation.com

**10.** $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$ **అంతరం (1, 3)లో** $f(c)=0$ **అయ్యేటట్లుగా ఒకటి కంటే ఎక్కువ లు ఉన్నాయని చూపండి**

సాధన. $[1,3]$ పై $f$ అవిచ్ఛిన్నమనీ (1, 3) పై $f$ అవకలనీయమని

$f(1)=f(3)=0$ అని గమనించండి

$f'(x)=(x-1)(x-2)+(x-1)$

$(x-3)+(x-2)(x-3)$

$=3x^2-12x+11$

$f'(x)=0$ కు మూలాలు $\dfrac{12\pm\sqrt{144-132}}{6}$

$=2\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ అవుతాయి

ఈ రెండు విలువలూ వివృతాంతరం (1, 3) లో అవకలజపు విలువల సున్న అయ్యేటట్లుగా ఉన్నాయి.

**11.** $f(x)=x^2-3x+8\forall x\in R$ **ప్రమేయం ఏ అంతరంలో ఆరోహణమో, అవరోహణమో, అవరోహణమో కనుక్కోండి**

సాధన. దత్త ప్రమేయం $f(x)=x^2-3x+8$ దీనిని $x$ దృష్ట్యా అవకలనం చేస్తే $f'(x)=2x-3$. $x=3/2$ వద్ద $f'(x)=0$ కనుక $x=3/2$ సందిగ్ధ బిందువు

| $x$ విలువలు | $f'(x)$ గుర్తు |
|---|---|
| $x<3/2$ | ఋణాత్మకం |
| $x=3/2$ | సున్న |
| $x>3/2$ | ధనాత్మకం |

$(-\infty,3/2$ లో $f'(x)<0$ కనక $\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right)$ అంతరం పై $f(x)$ శుద్ధ అవరోహణం. ఇంకా $\left(\dfrac{3}{2},\infty\right)$ అంతరం పై $f'(x)>0$ కనక $\left(\dfrac{3}{2},\infty\right)$ అంతరం పై $f(x)$ శుద్ధ ఆరోహణం

**12.** $f(x)=|x|$ **ప్రమేయం** $(-\infty,0)$ **అంతరం పై శుద్ధ అవరోహణమనీ,** $(0,\infty)$ **అంతరం పై శుద్ధ ఆరోహణమనీ చూపండి**

సాధన. దత్త ప్రమేయం $f(x)=|x|$ అంటే

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$ అయితే

$f'(c)>0$ కనక క అంతరం పై $f(x)$ శుద్ధ ఆరోహణం. $(-\infty,0)$ అంతరం పై $f'(c)<0$ కనక $(-\infty,0)$ అంతరం పై శుద్ధ అవరోహణం

www.sakshieducation.com

**13.** $f(x)=x^x (x>0)$ **ప్రమేయం ఏ అంతరాల పై శుద్ధ ఆరోహణమో, అవరోహణమో కనుక్కోండి**

**సాధన.** **ప్రమేయం** $f(x)=x^x$ **దీనికి రెండు వైపులా సంవర్గమానాలు తీసుకొంటే** $\log(f(x))=x\log x$.

**దీనిని** $x$ **దృష్ట్యా అవకలనం చేస్తే,**

$$\frac{1}{f(x)}f'(x)=1+\log x,$$

$$\therefore f'(x)=x^x(1+\log x),$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x^x(1+\log x)=0\rightarrow(1)$$

$$\Rightarrow 1+\log x=0$$

$$\Rightarrow x=1/e$$

| అంతరం | $f'(x)$ గుర్తు |
|---|---|
| $(0,1/e)$ | ఋణాత్మకం |
| $(1/e,\infty)$ | ధనాత్మకం |

$x<1/e$ అయితే $\log x<\log(1/e)$ (ఆధారం $e>1$)

అంటే $\log x<-1$

అంటే $1+\log x<0\Rightarrow x^x(1+\log x)<0$

అంటే $f'(x)<0$

$x>1/e$ అయితే $\log x>\log(1/e)$ అంటే

$\log x>-1$

$\Rightarrow 1+\log(x)>0$

$\Rightarrow x^x(1+\log(x))>0$

$\Rightarrow f'(x)>0$

కనక $(0,1/e)$ అంతరంలో $f$ శుద్ధ అవరోహణం, $(1/e,\infty)$ అంతరంలో $f$ శుద్ధ ఆరోహణం

**14.** **దీర్ఘ చతురస్రపు చుట్టుకొలత 20 స్థిరంగా ఉంటూ ఏర్పడే దీర్ఘ చతురస్రాల వైశాల్యాలలో గరిష్ఠ వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి**

సాధన. దీర్ఘ చతురస్రాల పొడవు. వెడల్పులు వరుసగా $x,y$ అనుకొందాం. దీర్ఘచతురస్ర చుట్టుకొలత 20.

అంటే $2(x+y)=20$

అంటే $x+y=10\rightarrow(1)$

దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యాన్ని $A$ అనుకొందాం. అప్పుడు

$A=xy\rightarrow(2)$

దీనిని గరిష్ఠం చేయాలి. సమీకరణం (1) ని కింది విధంగా రాయవచ్చు

$y=10-x\rightarrow(3)$

www.sakshieducation.com

సమీకరణం (2), (3) ల నుంచి

$A = x(10 - x)$

అంటే $A = 10x - x^2 \rightarrow (4)$

సమీకరణం (4)ను $x$ దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$\frac{dA}{dx} = 10 - 2x$

$10 - 2x = 0$ మూలం $A$ కు విరామ బిందువు

$\therefore A$ విరామ బిందువు $x = 5$

(5) ను $x$ దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$\frac{d^2A}{dx^2} = -2$ వస్తుంది

అంటే ఇది రుణాత్మకం, కాబట్టి రెండో అవకలజ పరీక్షను అనుసరించి $x = 5$ వద్ద $A$ గరిష్ఠం

కాబట్టి

$y = 10 - 5 = 5$ గరిష్ఠ వైశాల్యం $A = 5(5) = 25$

**15.** $(4,0)$ **నుంచి** $y^2 = x$ **వక్రం పై కనిష్ఠ దూరంలో ఉన్న బిందువును కనుక్కోండి**

**సాధన.** $y^2 = x$ పై $P(x, y)$ బిందువు $A(4,0)$ అనుకొందాం $PA$ కనిష్ఠం అయ్యేటట్లు $P$ ని కనుక్కోవాలి

$PA = D$ అనుకొందాం. కనిష్ఠం చేయవలసిన రాశి $D$

$D = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2} \rightarrow (1)$

$P(x, y)$ వక్రం పై బిందువు కనుక

$y^2 = x \rightarrow (2)$

సమీకరణం (1), (2) ల నుంచి

$D = \sqrt{(x-4)^2 + x)}$

$D = \sqrt{(x^2 - 7x + 16} \rightarrow (3)$

సమీకరణం (3)ను $x$ దృష్ట్యా అవకలనం చేస్తే

$\frac{dD}{dx} = \frac{2x-7}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 7x + 16}}$

ఇప్పుడు $\frac{dD}{dx} = 0$ అయితే $x = \frac{7}{2}$. కాబట్టి, $D$ కి $\frac{7}{2}$ విరామ బిందువు. మొదటి అవకలజ పరీక్ష

అనువర్తితంతో $x = \frac{7}{2}$ కనిష్ఠం అవుతుందో కాదో సరి చూద్దాం

$\left(\frac{dD}{dx}\right)_{x=3} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{9 - 12 + 16}}$

ఇది ఋణాత్మకం

www.sakshieducation.com

$$\left(\frac{dD}{dx}\right)_{x=4} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{16-28}+16}$$

ఇది ధనాత్మకం

$\frac{dD}{dx}$ గుర్తు $x = 7/2$ వద్ద ఋణాత్మకం నుంచి ధనాత్మకానికి మారింది. కాబట్టి $x = 7/2$ వద్ద $D$ కనిష్ఠం $x = 7/2$ ను (2) లో ప్రతిక్షేపించగా వచ్చే సమీకరణం $y^2 = 7/2$

$$\therefore y = \pm\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)}$$

కాబట్టి $\left(\left(\frac{7}{2},\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)}\right)\right), \left(\left(\frac{7}{2},-\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)}\right)\right)$

$A(4,0)$ కు కనిష్ఠ దూరంలో ఉండే బిందువులు

**16. ఇచ్చిన శంకువులో అంతర్లిఖించబడే లంబ వృత్తాకార స్థూపం యొక్క వక్రతల ఉపరితల వైశాల్యం గరిష్ఠం అయితే**

**జ:** శంకువు ఆధార వృత్త కేంద్రం $O$, దీని ఎత్తు $h$, దీని ఆధార వృత్త వ్యాసార్థం $r$ అనుకొందాం

అప్పుడు $AO = h, OC = r$

శంకువులో అంతర్లిఖించబడిన స్థూప వ్యాసార్థం $x(OE)$,

దీని ఎత్తు $u$ అనుకొందాం అంటే,

అంటే $RO = QE = PD = u$

ఇప్పుడు $AOC, QEC$ త్రిభుజాలు సరూప త్రిభుజాలు కాబట్టి

$$\frac{QE}{OA} = \frac{EC}{OC}$$

$$\therefore \frac{u}{h} = \frac{r-x}{r}$$

$$\therefore u = \frac{h(r-x)}{r} \rightarrow (1)$$

స్థూపం వక్రతల ఉపరితల వైశాల్యం $S$ అనుకొందాం. అప్పుడు

$$S = 2\pi xu$$

సమీకరణం (1) ప్రకారం,

$$S = 2\pi h(r - x - x^2)/r$$

శంకువు యొక్క $r, h$ స్థిరరాశులు. కాబట్టి $S$ అనేది $x$ లో మాత్రమే ప్రమేయం ఇప్పుడు

$$\frac{dS}{dx} = 2\pi h(r-2x)/r, \frac{d^2S}{dx^2} = -4\pi h/r$$

$S$ విరామ బిందువు, $\frac{dS}{dx} = 0$ కి మూలం

www.sakshieducation.com

అంటే $\pi(r-2x)/r=0$

అంటే $x=r/2$

$x$ యొక్క అన్ని విలువలకు

$\frac{d^2S}{dx^2}<0$, కాబట్టి $\left(\frac{d^2S}{dx^2}\right)_{x=r/2}<0$

కాబట్టి గరిష్ఠంగా అంర్లింఖింపబడే స్థూపం వ్యాసార్థం, శంకువు వ్యాసార్థంలో సగం.

www.sakshieducation.com