స్పర్శరేఖలు మరియు అభిలంబరేఖలు

అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. $y=\dfrac{x-1}{x-2}, x\neq 2$ **వక్రానికి** $x=10$ **బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు కనుక్కోండి.**

సాధన. వక్రం సమీకరణము $y=\dfrac{x-1}{x-2}$

$$=\frac{x-2+1}{x-2}$$

$$=1+\frac{1}{x-2}$$

$$\frac{dy}{dx}=0+\frac{(-1)}{(x-2)^2}=-\frac{1}{(x-2)^2}$$

$x=10$ వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు $=-\dfrac{1}{(10-2)^2}$

$$=-\frac{1}{64}$$

2. $x=1-a\sin\theta,\ y=b\cos^2\theta$ **వక్రానికి** $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ **వద్ద అభిలంబరేఖ వాలు కనుక్కోండి.**

సాధన. $x=1-a\sin\theta$

$$\frac{dx}{d\theta}=-a\cos\theta$$

$$y=b\cos^2\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta}=b(2\cos\theta)(-\sin\theta)=-2b\cos\theta\sin\theta$$

$$m=\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\frac{dy}{d\theta}\right)}{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)}=\frac{2b.\cos\theta\sin\theta}{-a\cos\theta}$$

$$=\frac{2b}{a}.\sin\theta$$

అభిలంబరేఖ వాలు $=-\dfrac{1}{m}=-\dfrac{a}{2b\sin\theta}$

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ వద్ద, అభిలంబరేఖ వాలు $=\dfrac{-a}{2b\sin\frac{\pi}{2}}$

www.sakshieducation.com

$= \frac{-a}{2b.1}$

$= \frac{-a}{2b}$

3. $y = x^3 - 11x + 5$ **వక్రం పై ఏ బిందువు వద్ద** $y = x - 11$ **స్పర్శరేఖ అవుతుందో కనుక్కోండి.**

సాధన. వక్రం సమీకరణం $y = x^3 - 11x + 5$

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 11$

స్పర్శరేఖ సమీకరణము $y = x - 11$

స్పర్శరేఖ వాలు $= 3x^2 - 11 = 1$

$3x^2 = 12$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

$y = x - 11$

$x = 2 \Rightarrow y = 2 - 11 = -9$

వక్రం మీది బిందువు $P(2, -9)$

4. **x = 4**వద్ద **y = 3x⁴– 4x** అనే వక్రం యొక్క స్పర్శరేఖ వాలు కనుగొనుము

Sol: ఇచ్చిన వక్రం $y = 3x^4 - 4x$

x దృష్ట్యా అవకలనము చేయుగా

$=> \frac{dy}{dx} = 12x^3 - 4$

x = 4 ప్రతిక్షేపించగా వాలు = 764

5. **y = x² - 3x + 2** అనే వక్రా నికి **x** నిరుపకం **3** అయ్యే బిందువువద్ద వాలు కనుక్కోండి

Sol: $y = x^3 - 3x + 2$

x దృష్ట్యా అవకలనము చేయుగా

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3$

www.sakshieducation.com

x = 3 వద్ద వాలు = $3(3)^{2}-3$
$= 27 - 3 = 24$

6. $x = a\,Cos^3\theta$, $y = a\,Sin^3\theta$ **అనే వక్రానికి** $\theta = \frac{\pi}{4}$ **వద్ద అభిలంబరేఖ వాలు కనుగొనుము**

Sol: $x = a\,Cos^3\theta$

$$\frac{dx}{d\theta} = a(3\,Cos^2\theta)(-\,Sin\theta) \quad = -\,3a\,Cos^2\theta\,.\,Sin\theta$$

$y = a\,Sin^3\theta$

$$\frac{dy}{d\theta} = a\,(3\,Sin^2\theta)\,Cos\theta \;=\; 3a\,Sin^2\theta\,Cos\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{d\theta}\right)}{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)} = \frac{3aSin^{2\theta}Cos\theta}{-3aCos^2\theta Sin\theta} = -\frac{Sin\theta}{Cos\theta} = -\,tan\theta$$

వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు = tan = -1

అభిలంబరేఖ వాలు = - = 1.

7. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ **అనే వక్రం పై ఏబిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ లు x-అక్షానికి సమాంతరంగా ఉంటాయో కనుక్కోండి.**

Sol: y = x- 3x- 9x+7

x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = 3x - 6x - x$$

స్పర్శరేఖ లు x- అక్షానికి సమాంతరంగా ఉన్నాయి,కావున వాటి వాలులు = 0

www.sakshieducation.com

⇨ 3x- 6x -9 = 0 => x-2x – 3 = 0

⇨ (x-3) (x+1) = 0 => x = 3 or -1

y= x - 3x - 9x + 7

x = 3 y = 27 – 27 – 27 + 7 = -20

x = -1, y = -1 – 3 + 9 + 7 = 12

బిందువులు (3, - 20), (-1, 12).

8. $y = f(x) = x^{1/3}$ **వక్రానికి** $x = 0$ **అయిన బిందువు వద్ద ఊర్ధ్వ స్పర్శరేఖ ఉందేమో పరిశీలించండి.**

సాధన. $h \neq 0$ అయితే $\underset{h\to 0}{lt} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

$$= \underset{h\to 0}{lt} \frac{h^{1/3}}{h} = \underset{h\to 0}{lt} \frac{1}{h^{2/3}} = \underset{h\to 0}{lt} \frac{1}{(h^{1/3})^2} = \infty$$

గమనిక: $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \infty$ నుంచి వక్రానికి x నిరూపకం 0 అయిన బిందువు వద్ద ఊర్ధ్వ స్పర్శరేఖ ఉంటుంది.

9. $y = f(x) = x^{2/3}$ **వక్రానికి** $x = 0$ **అయిన బిందువు వద్ద ఊర్ధ్వ స్పర్శరేఖ ఉందేమో పరిశీలించండి.**

సాధన. $h \neq 0$ అయితే, $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h^{2/3}}{h} = \frac{1}{h^{1/3}}$

$h \to 0$ అయ్యేటప్పుడు $\frac{1}{h^{1/3}}$ కు ఎడమచేతి అవధి $-\infty$

కాని కుడిచేతి అవధి ∞ అంటే $\underset{h\to 0}{lt} \frac{1}{h^{1/3}}$ వ్యవస్థితం కాదు.

$\therefore$ గమనిక $\underset{h\to 0}{lt} \frac{f(a-h)-f(a)}{h} = \alpha$ నుంచి $f(x)$ $= x^{2/3}$ వక్రానికి $x = 0$ అయిన బిందువు వద్ద ఊర్ధ్వ స్పర్శరేఖ ఉండదు. ఈ వక్రం రేఖాచిత్రంలో చూడుము.

10. $x = c\sec\theta$, $y = c\tan\theta$ **సూచించే వక్రానికి ఏదైనా బిందువు** θ **వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణం** $y\sin\theta = x - c\cos\theta$ **అని చూపండి.**

సాధన. ఏదైనా బిందువు θ వద్ద వక్రానికి స్పర్శరేఖ వాలు

(అంటే $\sec\theta, c\tan\theta$ వద్ద)

www.sakshieducation.com

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{d\theta}\right)}{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)} = \frac{c\sec^2\theta}{c\sec\theta\tan\theta} = \operatorname{cosec}\theta$$

$\therefore$ స్పర్శరేఖ సమీకరణం

$$y - c\tan\theta = \operatorname{cosec}\theta(x - c\sec\theta)$$

అంటే $y\sin\theta = x - c\cos\theta$

11. $y^2 = 4ax$ వక్రం పై ఏ బిందువు వద్దనైనా ఉపలంబ ఖండం స్థిరమని చూపండి.

సాధన. $y^2 = 4ax$ ను x దృష్ట్యా అవకలనం చేస్తే

$$2yy' = 4a \Rightarrow y' = \frac{2a}{y}$$

అంటే $yy' = 2a'$

MG నుంచి వక్రం పై ఏ బిందువు (x, y) వద్దనైనా ఉపలంబ ఖండం స్థిరం

12. $y = a^x (a > 0)$ వక్రం పై ఏ బిందువు వద్దనైనా ఉపస్పర్శ ఖండం స్థిరమని చూపండి,

సాధన. $y = a^x$ ను దృష్ట్యా అవకలనం చేస్తే $y' = a^x \log a$

$\therefore$ వక్రం పై ఏదైనా బిందువు (x, y) వద్ద ఉపస్పర్శ ఖండం

$$= \left|\frac{y}{y'}\right| = \left|\frac{a^x}{a^3\log a}\right| = \frac{1}{\log a} = \text{స్థిరరాశి}$$

www.sakshieducation.com

స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 3}$ **వక్రానికి వాలు '0' అయ్యే స్పర్శరేఖ సమీకరణాలు కనుక్కోండి.**

సాధన. వక్రం సమీకరణం $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 3}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{(x^2 - 2x + 3)^2}\{2(x-1)\}$

$= \dfrac{-2(x-1)}{(x^2 - 2x + 3)^2}$

స్పర్శరేఖ వాలు $= 0$

$\Rightarrow \dfrac{-2(x-1)}{(x^2 - 2x + 3)^2} = 0$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$x = 1$ వద్ద

$y = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 3} = \dfrac{1}{1 - 2 + 3} = \dfrac{1}{2}$

P నిరూపకాలు $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$

స్పర్శరేఖ వాలు $= 0$

కావలసిన స్పర్శరేఖ సమీకరణము

$y - \dfrac{1}{2} = 0(x - 1)$

$2y - 1 = 0$

2. $y = x^3 + 4x^2$ **వక్రానికి** $(-1, 3)$ **బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ, అభిలంబరేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి**

సాధన. **వక్రం సమీకరణము** $y = x^3 + 4x^2$

$\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 + 8x$

$P(-1, 3)$ వద్ద,

స్పర్శరేఖ వాలు $= 3(-1)^2 + 8(-1)$

$= 3 - 8 = -5$

స్పర్శరేఖ సమీకరణము $P(-1, 3)$

$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$

$y - 3 = -5(x + 1) = -5x - 5$

$5x + y + 2 = 0$

P వద్ద అభిలంబరేఖ సమీకరణము

www.sakshieducation.com

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1)$$

$$y - 3 = \frac{1}{5}(x + 1)$$

$$5y - 15 = x + 1$$

$$x - 5y + 16 = 0$$

3. క్రిందివక్రాలకు వాటి కి ఎదురుగా ఇచ్చినబిందువుల వద్ద స్పర్శ రేఖ,అభిలంబరేఖ ల సమికరణాలను కనుక్కోండి.

i) $\mathbf{y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5}$ **at (0, 5).**

Sol: $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4x^3 - 18x^2 + 26x - 10$$

At x = (0,5)

స్పర్శరేఖ వాలు $m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{at(0,5)} = 0 - 0 + 0 - 10$ = 0 – 0 + 0 – 10 = - 10

స్పర్శ రేఖసవిరణం $y - 5 = -10(x - 0)$

$= -10x$

$10x + y - 5 = 0$

అభిలంబరేఖ వాలు $= -\frac{1}{m} = \frac{1}{10}$

అభిలంబరేఖ సమికరణం $y - 5 = \frac{1}{10}(x - 0)$

$$10y - 50 = x \Rightarrow x - 10y + 50 = 0$$

iv) $\mathbf{x = \cos t, y = \sin t, \text{ at } t = \frac{\pi}{4}}$.

Sol: x = Cos t, y = Sin t

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\sin t, \frac{dt}{dx} = \cos t$$

www.sakshieducation.com

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}=\frac{\cos t}{-\sin t}=-\cot t$$

$$\Rightarrow m=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{at\frac{\pi}{4}}=-\cot\frac{\pi}{4}=-1 \quad \text{and} \quad x=-\cot\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ y=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

బిందువు $p\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

స్పర్శ రేఖసమికరణం $y-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad =-x+\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow x+y=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow x+y=\sqrt{2}$$

అభిలంబరేఖ వాలు $=-\frac{1}{m}=\frac{-1}{-1}=1$

అభిలంబరేఖ సమికరణం $y-\frac{1}{\sqrt{2}}=x-\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x-y=0$.

4. $y=x\log x$ **వక్రం పై ఒక బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు** $\frac{3}{2}$ **అయితే, ఆ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ, అభిలంబ రేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి**

సాధన.: వక్రం సమీకరణము $y=x\log x$

$$\frac{dy}{dx}=x.\frac{1}{x}+\log x.1=1+\log x$$

$$1+\log x=\frac{3}{2}$$

$$\log_e x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=e^{1/2}=\sqrt{e}$$

$$\therefore y=\sqrt{e}.\log\sqrt{e}=\frac{\sqrt{e}}{2}$$

కావలసిన బిందువు $P\left(\sqrt{e},\frac{\sqrt{e}}{2}\right)$

www.sakshieducation.com

స్పర్శరేఖ సమీకరణము $y-\frac{\sqrt{e}}{2}=\frac{3}{2}(x-\sqrt{e})$

$$\frac{2y-\sqrt{e}}{2}=\frac{3(x-\sqrt{e})}{2}$$

$$2y-\sqrt{e}=3x-3\sqrt{e}$$

$$3x-2y-2\sqrt{e}=0$$

అభిలంబరేఖ సమీకరణము $y-y_1=-\frac{1}{f'(x_1)}(x-x_1)$

$$y-\frac{\sqrt{e}}{2}=-\frac{2}{3}(x-\sqrt{e})$$

$$\frac{2y-\sqrt{e}}{2}=-\frac{2}{3}(x-\sqrt{e})$$

$$6y-3\sqrt{e}=-4x+4\sqrt{e}$$

$$i.e, 4x+6y-7\sqrt{e}=0$$

5. $x^2-y^2=2$ **వక్రం పై ఏ బిందువుల వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు 2 కు సమానమవుతోంది?**

సాధన. స్పర్శరేఖ సమీకరణము $x^2-y^2=2\rightarrow(1)$

x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$2x-2y\frac{dy}{dx}=0$$

స్పర్శరేఖ వాలు $=\frac{dy}{dx}=2$

$$\therefore 2x-4y=0; x=2y$$

(1) లో ప్రతిక్షేపించగా, $4y^2-y^2=2$

$$3y^2=2$$

$$y^2=\frac{2}{3}\Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$x=2y=\pm2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$\therefore$ కావలసిన బిందువు $P\left(2\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ మరియు

$$Q\left(-2\sqrt{\frac{2}{3}},-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

www.sakshieducation.com

6. $y(1-x)=x$ **వక్రం పై** $P(2,-2)$ **బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ నిరూపకాక్షాల పై సమాన పొడవు గల అంతర ఖండాలు చేస్తుందని, ఆ బిందువు వద్ద అభిలంబరేఖ మూల బిందువు ద్వారా పోతుందని చూపండి**

సాధన. వక్రం సమీకరణము $y(1-x)=x$

$$y=\frac{x}{1-x}$$

x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(1-x).1-x(-1)}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{1-x+x}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$P(2,-2)$ వద్ద, $f'(x_1)=\frac{1}{(1-2)^2}=1=m$

P వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణము

$$y+2=1(x-2)=x-2;\ x-y=4$$

$$\frac{x}{4}-\frac{y}{4}=1\Rightarrow\frac{x}{4}+\frac{y}{(-4)}=1$$

$$\therefore a=4,b=-4$$

$\therefore$ స్పర్శరేఖ నిరూపకాక్షాల మీద సమానమైన గుర్తులు గల ఇతర ఖండాలు అభిలంబ రేఖా సమీకరణము

$$y-y_1=\frac{1}{f'(x_1)}(x-x_1)$$

$$y+2=-(x-2)=-x+2$$

$$x+y=0$$

సమీకరణంలో స్థిరపదం లేదు

$\therefore P(2,-2)$ వద్ద అభిలంబరేఖ మూల బిందువు గుండా పోతుంది.

7. $\mathbf{x^2-2xy+4y=0}$ **పై ఒక బిందువు వద్ద స్పర్శ రేఖ వాలు** $-\frac{3}{2}$ **అయితే , ఆ బిందువు వద్ద స్పర్శ రేఖ, అభిలంబ రేఖల సమికరణాలను కనుక్కోండి.**

Sol: $x^2-2xy+4y=0$ — (1)

x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

www.sakshieducation.com

$$2x-2x.\frac{dy}{dx}-2y+4\frac{dy}{dx}=0$$

$$2(x-y)=2(x-2)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2(x-y)}{2(x-2)}=\frac{x-y}{x-2}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{2}\Rightarrow\therefore\frac{x-y}{x-2}=-\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 2x-2y=-3x+6\Rightarrow 5x-2y=6\Rightarrow 2y=5x-6 \qquad \text{—(2)}$$

(1) , (2) సాధించగా ,

$$x^2-x(5x-6)+2(5x-6)=0$$

$$\Rightarrow x^2-5x^2+6x+10x-12=0 \qquad \Rightarrow -4x^2-16x-12=0$$

$$\Rightarrow -4\left(x^2-4x+3\right)=0 \qquad \Rightarrow x^2-4x+3=0$$

$$\Rightarrow (x-1)=0 \text{ or } x-3=0$$

$$\therefore x=1 \text{ or } x=3$$

Case (i) : x = 1 , (1)నుండి

$$1-2y+4y=0\Rightarrow \qquad 2y=-1\Rightarrow y=-\frac{1}{2}$$

బిందువు $P\left(1,-\frac{1}{2}\right)$

స్పర్శ రేఖా సమీకరణం $\quad y+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}(x-1)$

$$\Rightarrow\frac{2y+1}{2}=\frac{-3(x-1)}{2}\Rightarrow 2y+1=-3x+3\Rightarrow 3x+2y-2=0$$

అభిలంబ రేఖ వాలు 2/3

www.sakshieducation.com

అభిలంబ రేఖా సమీకరణం $y+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}(x-1)$

$$\Rightarrow \frac{2y+1}{2}=\frac{2}{3}(x-1) \Rightarrow 6y+3=4x-4 \Rightarrow 4x-6y-7=0$$

Case (ii) : x = 3

(1) నుండి, $9-6y+4y=0 \Rightarrow \quad 2y=9 \Rightarrow y=\frac{9}{2}$

$\therefore$ బిందువు $\left(3,\frac{9}{2}\right)$

స్పర్శ రేఖా సమీకరణం $\quad y-\frac{9}{2}=-\frac{3}{2}(x-3)$

$$\Rightarrow \frac{2y-9}{2}=\frac{-3(x-3)}{2} \Rightarrow 2y-9=-3x+9 \Rightarrow 3x+2y-18=0$$

అభిలంబ రేఖా సమీకరణం $y-\frac{9}{2}=\frac{2}{3}(x-3)$

$$\frac{2y-9}{2}=\frac{2(x-3)}{3} \Rightarrow 6y-27=4x-12 \Rightarrow 4x-6y+15=0$$

8. $y=2e^{-x/3}$ వక్రం y-అక్షాన్ని ఖండించే బిందువు వద్ద ఆ వక్రానికి స్పర్శ రేఖ సమీకరణాలు కనుక్కోండి.

Sol: $y=2e^{-x/3}$ —(1)

y-అక్ష సమీకరణం x = 0

$$\Rightarrow y=2.e^{0}=2.1=2$$

ఖండన బిందువు P(0, 2)

x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా,

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=2\left(-\frac{1}{3}\right).e^{-x/3}$$

$$m=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{at(0,2)}=\frac{-2}{3}e^{0}=\frac{-2}{3}$$

www.sakshieducation.com

P వద్ద స్పర్శ రేఖా సమీకరణం

$$y-2=-\frac{2}{3}(x-0) \quad \Rightarrow 3y-6=-2x \Rightarrow 2x+3y-6=0$$

అభిలంబ రేఖ వాలు = 3/2

అభిలంబ రేఖా సమీకరణం $y-2=\frac{3}{2}(x-0)$

9. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ **వక్రం పై $P(x_1,y_1)$ వద్ద స్పర్శ రేఖా సమీకరణం $yy_1^{-1/2}+xx_1^{-1/2}=a^{1/2}$ అని చూపుము.**

Sol: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ ——(1)

$P(x_1, y_1)$ వక్రంపై ఏదైనా బిందువు అనుకోండి. అప్పుడు $\sqrt{x_1}+\sqrt{y_1}=\sqrt{a}$

x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా,

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}.\frac{dy}{dx}=0 \quad \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{y}}.\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}=-\frac{y^{1/2}}{x^{1/2}}$$

$$P(x_1,y_1)=-\frac{(y_1)^{1/2}}{(x_1)^{1/2}}$$

స్పర్శ రేఖా సమీకరణం , $y-y_1=\frac{-y_1^{1/2}}{x_1^{1/2}}(x-x_1)$

$$\frac{y}{y_1^{1/2}}-\frac{y_1}{y_1^{1/2}}=-\frac{x}{x_1^{1/2}}+\frac{x_1}{x_1^{1/2}} \qquad =x_1^{1/2}+y_1^{1/2} \quad =a^{1/2}$$

P వద్దస్పర్శ రేఖా సమీకరణం

$$y.y_1^{-1/2}+x.x_2^{-1/2}=a^{1/2}$$

www.sakshieducation.com

10. $x^2+y^2= 2$, $3x^2+x^2=4x$ అనే వక్రాలకు (1, 1) వద్ద ఉమ్మడి స్పర్శ రేఖ ఉంటుందని చూపుము.

Sol: మొదటి వక్రసమికరణం $x^2+y^2=2$

x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$\Rightarrow \quad 2x+2y\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx}=-2x \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}$$

p (1, 1) వద్ద స్పర్శ రేఖవాలు $= \frac{-1}{1}=-1$

రెండవ వక్రసమికరణం $3x^2+y^2=4y.$

x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$6x+2y.\frac{dy}{dx}=4 \qquad \Rightarrow 2y.\frac{dy}{dx}=4-6x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{4-6x}{2y}=\frac{2y-3x}{y}$$

p(1, 1) వద్ద స్పర్శ రేఖవాలు $= \frac{2-3}{1} = -\frac{1}{1}=-1$

p(1, 1) వద్ద స్పర్శ రేఖవాలులు సమానం మరియు అవి గుండా పోతున్నాయి కావున ఇచ్చిన వక్రాలకు ఉమ్మడి స్పర్శ రేఖ ఉటుంది.

11. $y=b.\sin\frac{x}{a}$ వక్రం పై ఏదేని బిందువు వద్ద ఉప స్పర్శఖండం, ఉప లంబ ఖండాలను కనుక్కోండి.

Sol: $y=b.\sin\frac{x}{a} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=b.\cos\frac{x}{a}.\frac{1}{a}=\frac{b}{a}.\cos\frac{x}{a}=m$

P(x,y) వక్రం ఒకపై బిందువుఅనుకోండి.

ఉప స్పర్శఖండం $= \left|\frac{y_1}{m}\right| = \frac{b.\sin\frac{x}{a}}{\frac{b}{a}.\cos\frac{x}{a}} = \left|a.\tan\frac{x}{a}\right|$

www.sakshieducation.com

ఉప లంబ ఖండం = $|y_1 m| = \left|b.\sin\frac{x}{a}.\left(\frac{b}{a}\cos\frac{x}{a}\right)\right| = \left|\frac{b^2}{2a}.\sin\frac{2x}{a}\right|$.

12. $xy = a^2$ **అనే వక్రానికి ఏదైనా బిందువు వద్ద ఉపలంబ ఖండం ఆ బిందువు** y **నిరూపకాలు ఘనానికి అనుపాతంఓ ఉంటుందని చూపండి**

సాధన. వక్రం సమీకరణము $xy = a^2$

$$y = \frac{a^2}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-a^2}{x^2}$$

ఉపలంబ రేఖ పొడవు $= |y_1, f'(x_1)|$

$$= \left|y_1\left(\frac{(-a)^2}{x_1^2}\right)\right| = \left|-a^2 y, \frac{y_1^2}{a^4}\right|$$

$= \frac{y_1^3}{a^2} \propto y_1^3 = y$ నిరూపకం యొక్క ఘనము.

13. $y = be^{x/a}$ **అనే వక్రం పై ఏదైనా బిందువు** (x, y) **వద్ద ఉప స్పర్శఖండం స్థిరమనీ, ఉపలంబ ఖండం** $\frac{y^2}{a}$ **అని చూపండి.**

సాధన. వక్రం సమీకరణము $y = b.e^{x/a}$

$$\frac{dy}{dx} = b.e^{x/a}.\frac{1}{a} = \frac{y}{a}$$

ఉప స్పర్శ రేఖ పొడవు $= \left|\frac{y_1}{f'(x_1)}\right|$

$= \left|\frac{y_1}{\left(\frac{y_1}{a}\right)}\right| = a =$ స్థిరము

ఉపలంబ రేఖ పొడవు $= |y_1, f'(x_1)|$

$$= \left|y_1, \frac{y_1}{a}\right|$$

$$= \frac{y_1^2}{a}$$

www.sakshieducation.com

14. $y=3x^2-x^3$ వక్రం $x-$అక్షాన్ని ఖండించే బిందువుల వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణాలు కనుక్కోండి.

సాధన. వక్రం $y=3x^2-x^3=0$ లో, $x-$అక్షాన్ని ఖండించే బిందువు కోసం $y=0$ ను ప్రతిక్షేపిస్తే,

$3x^2-x^3=0$ లేదా $x^2(3-x)=0$ వస్తుంది.

అంటే $x=0, x=3$

అంటే వక్రం $X-$అక్షాన్ని $O(0,0)$, $A(3,0)$ బిందువుల వద్ద ఖండిస్తుంది.

$\frac{dy}{dx}=6x-3x^2 \Rightarrow O(0,0)$ వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,0)}=0$

$\therefore O(0,0)$ వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణం $y-0=0(x-0)$ లేదా $y=0$ అవుతుంది

అంటే $(0,0)$ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ అక్షం అన్నమాట.

ఇప్పుడు $A(3,0)$ వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(3,0)}$

$=6(3)-3(3)^2=-9$

$\therefore (3,0)$ వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణం

$y-0=-9(x-3)$ అంటే $y+9x=27$ అవుతుంది.

15. $y=\sin x$ వక్రానికి ఏ బిందువు వద్ద క్షితిజ స్పర్శరేఖలు ఉంటాయో కనుక్కోండి

సాధన. $y=\sin x$ నుంచి $\frac{dy}{dx}=\cos x$

స్పర్శరేఖ క్షితిజరేఖ అయితే స్పర్శరేఖ వాలు సున్న

$\cos x=0$

అంటే $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}; n\in Z$

కాబట్టి దత్త వక్రానికి క్షితిజ స్పర్శరేఖ ఉండే బిందువులు

(x_0, y_0)

$\Leftrightarrow x_0=(2n+1).\frac{\pi}{2}$

$y_0=(-1)^n n\in Z$

www.sakshieducation.com

దీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు

1. (x_1, y_1) వద్ద $x^3 + y^3 = 3axy$ అనే వక్రానికి స్పర్శ రేఖా సమీకరణం $(x_1^2 - ay_1)x + (y_1^2 - ax_1)y = ax_1y_1$. అని చూపుము

Sol: వక్రసమీకరణం $x^3 + y^3 = 3axy$

P వక్ర ం పై బిందువు కావున $x_1^2 + y_1^2 = 3ax_1y_1$

$x^3 + y^3 = 3axy$ ను x దృష్ట్యా అవకలనము చేయుగా

$$3x^2 + 3y^2.\frac{dy}{dx} = 3a\left(x.\frac{dy}{dx} + y\right)$$

$$x^2 + y^2\frac{dy}{dx} = a\left(x.\frac{dy}{dx} + y\right) = ax.\frac{dy}{dx} + ay$$

$$\Rightarrow (y^2 - ax)\frac{dy}{dx} = ay - x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax} = -\frac{(x^2 - ay)}{(y^2 - ax)}$$

స్పర్శ రేఖవాలు $(x_1, y_1) = -\frac{(x_1^2 - ay_1)}{(y_1^2 - ax_1)}$

P వద్ద స్పర్శ రేఖా సమీకరణం

$$y - y_1 = -\frac{(x_1^2 - ay_1)}{(y_1^2 - ax_1)}(x - x_1)$$

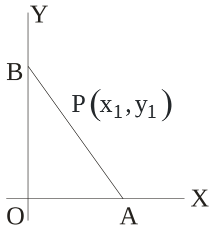
$$\Rightarrow y(y_{1-ax_1}^2) - y(y_1^2 - ax_1) = -x(x_1^2 - ay_1) + x_1(x_1^2 - ay_1)$$

$$\Rightarrow x(x_1^2 - ay_1) + y(y_1^2 - ax_1) = x_1(x_1^2 - ay_1) + y_1(y_{1-ax_1}^2)$$

$$= x_1^3 - ax_1y_1 + y_1^3 - ax_1y_1 = x_{1+}^3y_1^3 - 2ax_1y_1 = 3ax_1y_1 - 2ax_1y_1 = ax_1y_1$$

www.sakshieducation.com

2. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ వక్రం పై ఏదేని బిందును వద్ద స్పర్శ రేఖ నిరూపకాక్షాలను **A, B** లవద్ద ఖండిస్తే **AB** పొడవు స్థిరమని చూపుము



Sol: వక్రసమీకరణం $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$

వక్రం యొక్క ప రామితీయ సమీకరణాలు $x=a\cos^3\theta,\ y=a\sin^3\theta$

$\left(a\cos^3\theta,\ a\sin^3\theta\right)$ వక్రం పై బిందువు

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{a.3\sin^2\theta.(\cos\theta)}{a.3\cos^2\theta.(-\sin\theta)}=\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}$$

P వద్ద స్పర్శ రేఖా సమీకరణం

$$y-a\sin^3\theta=\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}\left(x-a\cos^3\theta\right)$$

$$\Rightarrow \frac{y}{\sin\theta}-a\sin^2\theta=-\frac{x}{\cos\theta}+a\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\cos\theta}+\frac{y}{\sin\theta}=a\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)=a$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a\cos\theta}+\frac{y}{a\sin\theta}=1$$

$\Rightarrow x-\text{intercept } OA=a\cos\theta$

$y-\text{intercept } OB=a\sin\theta$

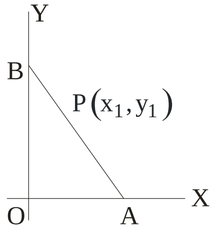
$$AB^2=OA^2+OB^2$$

$$=(a\cos\theta)^2+(a\sin\theta)^2$$

$=a^2\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)=a^2$ $\Rightarrow AB=a=$ స్థిరాంకం.

www.sakshieducation.com

3. $x^m y^n = a^{m+n} (mn \neq 0)$ వక్రం పై ఏదేని బిందును **P** వద్ద స్పర్శ రేఖ నిరూపకాక్షాలను **A, B** లవద్ద ఖండిస్తే **AP : PB** స్థిరమని చూపుము



Sol: వక్రసమికరణం $x^m.y^n = a^{m+n}$

$P(x_1, y_1)$ వక్ర ఒకపై బిందువుఅనుకోండి. అప్పుడు $x_1^m.y_1^n = a^{m+n}$

x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$x^m.ny^{n-1}.\frac{dy}{dx} + y^n.mx^{m-1} = 0$$

$$nx^m.y^{n-1}\frac{dy}{dx} = -m.x^{m-1}.y^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-m.x^{m-1}.y^n}{n.x^m y^{n-1}} = -\frac{my}{nx}$$

P వద్దవాలు $= \dfrac{-my_1}{mx_1}$

P వద్ద స్పర్శ రేఖా సమికరణం $y - y_1 = -\dfrac{my_1}{nx_1}(x - x_1)$

$$\Rightarrow nx_1y - nx_1y_1 = -my_1x + mx_1y_1$$
$$\Rightarrow my_1x + nx_1y = mx_1y_1 + nx_1y_1 = (m+n)x_1y_1$$

$$\Rightarrow \frac{my_1}{(m+n)x_1y_1}.x + \frac{nx_1}{(m+n)x_1y_1}.y = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\frac{m+n}{m}.x_1} + \frac{y}{\frac{m+n}{n}.y_1} = 1$$

$$\Rightarrow OA = \frac{m+n}{m}.x_1.OB = \frac{m+n}{n}$$

కావున $A\left[\frac{m+n}{m}.x_1, 0\right], B\left[0, \frac{m+n}{n}.y_1\right]$

www.sakshieducation.com

AB ని P బిందువు విభజించే నిష్పత్తి

$$\frac{AP}{PB}=\frac{X-X_1}{X_1-0}=\frac{\frac{m+n}{m}-x_1}{x_1}=\frac{nx_1}{mx_1}=\frac{n}{m}$$ ఒక స్థిరాంకం.

4. క్రింది వక్రాల మధ్య కోణాన్ని కనుక్కోండి.

1. $y^2=4x, x^2+y^2=5$

సాధన. y ని తొలగించగా $x^2+4x=5$

$x^2+4x-5=0$

$(x-1)(x+5)=0$

$x-1=0$ లేదా $x+5=0$

$x=1$ లేదా -5

$y^2=4x$

$x=1\Rightarrow y^2=4$

$y=\pm 2$

$x=-5\Rightarrow y$ వాస్తవం కాదు

$\therefore$ ఖండన బిందువులు $P(1,2)$ మరియు $Q(1,-2)$ మొదటి వక్రం సమీకరణము $y^2=4x$

$2y.\frac{dy}{dx}=4$

$\frac{dy}{dx}=\frac{4}{2y}$

$f'(x)=\frac{2}{y}$

రెండవ వక్రం సమీకరణం $x^2+y^2=5$

$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$

$2y.\frac{dy}{dx}=-2x$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y};\ g'(x)=-\frac{x}{y}$

$P(1,2)$ వద్ద $f'(x_1)=\frac{2}{2}=1,\ g'(x_1)=-\frac{1}{2}$

$$\tan\theta=\left|\frac{f'(x_1)-g'(x_1)}{1+f'(x_1)g(x_1)}\right|=\left|\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right|=3$$

www.sakshieducation.com

$\theta = \tan^{-1}(3)$

$Q(1,-2)$ వద్ద $f'(x_1) = \frac{2}{-2} = -1,\ g'(x_1) = \frac{1}{2}$

$$\tan\theta = \left|\frac{f'(x_1) - g'(x_1)}{1 + f'(x_1)g'(x_1)}\right| = \left|\frac{-1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}\right| = 3$$

$\theta = \tan^{-1}(3)$

2. $x^2 = 2(y+1);\ y = \frac{8}{x^2+4}$

సాధన. $x^2 = 2\left(\frac{8}{x^2+4} + 1\right) = \frac{16 + 2x^2 + 8}{x^2+4}$

$x^2(x^2+4) = 2x^2 + 24$

$x^4 + 4x^2 - 2x^2 - 24 = 0$

$x^4 + 2x^2 - 24 = 0$

$(x^2+6)(x^2-4) = 0$

$x^2 = -6$ లేదా $x^2 = 4$

$x^2 = -6 \Rightarrow x$ వాస్తవం కాదు

$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$y = \frac{8}{x^2+4} = \frac{8}{4+4} = \frac{8}{8} = 1$

$\therefore$ ఖండన బిందువులు $P(2,1)$ మరియు $Q(-2,1)$ మొదటి వక్రం సమీకరణం $x^2 = 2(y+1)$

$2x = 2.\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x$

$f'(x_1) = x_1$

రెండవ వక్రం సమీకరణము $y = \frac{8}{x^2+4}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8(-1)}{(x^2-4)^2}2x = -\frac{16x}{(x^2+4)^2}$$

$$g'(x_1) = -\frac{16x}{(x^2+4)^2}$$

$P(2,1)$ **వద్ద,** $f'(x_1) = 2$

$$g'(x_1) = \frac{-16\times 2}{8^2} = -\frac{32}{64} = -\frac{1}{2}$$

$$f'(x_1).g'(x_1) = 2\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

www.sakshieducation.com

∴ దత్త వక్రాలు లంబంగా ఖండించుకుంటున్నాయి.

$i.e., \theta = \frac{\pi}{2}$

$Q(-2,1)$, వద్ద $f'(x_1) = -2,\ g'(x_1) = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$

$f'(x_1).g'(x_1) = -2 \times \frac{1}{2} = -1$

∴ దత్త వక్రాలు లంబంగా ఖండించుకుంటూన్నాయి

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

3. $y^2 = 8x, 4x^2 + y^2 = 32$

సాధన. $4x^2 + 8x = 32 \Rightarrow x^2 + 2x = 8$

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$(x-2)(x+4) = 0$

$x = 2$ లేదా -4

$x = -4 \Rightarrow y^2$ వాస్తవం కాదు

$x = 2 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4$

ఖండంన బిందువులు $P(2,4), Q(2,-4)$

మొదటి వక్రం సమీకరణము $y^2 = 8x$

$2y.\frac{dy}{dx} = 8 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{8}{2y} = \frac{4}{y}$

$f'(x_1) = \frac{4}{y}$

రెండవ వక్రం సమీకరణము

$4x^2 + y^2 = 32$

$8x + 2y.\frac{dy}{dx} = 0$

$2y\frac{dy}{dx} = -8x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-8x}{2y} = \frac{-4x}{y}$

$g'(x_1) = -\frac{4x}{y}$

$P(2,4)$ వద్ద, $f'(x_1) = \frac{4}{4} = 1,$

$g'(x_1) = \frac{-4.2}{4} = -2$

www.sakshieducation.com

$$\tan\theta = \left|\frac{f'(x_1)-g'(x_1)}{1+f'(x_1)g'(x_1)}\right| = \left|\frac{1+2}{1-2}\right| = 3$$

$$\theta = \tan^{-1}(3)$$

$Q(2,-4)$ వద్ద, $f'(x_1) = \frac{4}{-4} = -1$

$$g'(x_1) = \frac{-4.2}{-4} = 2$$

$$\tan\theta = \left|\frac{f'(x_1)-g'(x_1)}{1+f'(x_1)g'(x_1)}\right| = \left|\frac{-1-2}{1+(-1).2}\right|$$

$$= \left|\frac{-3}{-1}\right| = 3$$

$$\theta = \tan^{-1}(3)$$

5. $6x^2 - 5x + 2y = 0$, $4x^2 + 8y^2 = 3$ **వక్రాలు** $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ **బిందువు వద్ద స్పృశించుకొంటాయిని చూపండి**

సాధన. మొదటి వక్రం సమీకరణము

$$6x^2 - 5x + 2y = 0$$

$$2y = 5x - 6x^2$$

$$2.\frac{dy}{dx} = 5 - 12x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5-12x}{2}$$

$P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ వద్ద $f'(x_1) = \dfrac{5-12.\frac{1}{2}}{2}$

$$= \frac{5-6}{2} = -\frac{1}{2}$$

రెండవ వక్రం సమీకరణము $4x^2 + 8y^2 = 3$

$$8x + 16y.\frac{dy}{dx} = 0$$

$$16y.\frac{dy}{dx} = -8x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-8x}{16y} = -\frac{x}{2y}$$

www.sakshieducation.com

$P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ వద్ద $g'(x_1) = \dfrac{-\frac{1}{2}}{2\left(\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{2}$

$\therefore f'(x_1) = g'(x_1)$

దత్త వక్రాలు $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ వద్ద స్పృశించుకొంటాయి.

6. $by^2 = (x+a)^3, (b \neq 0)$ **వక్రంపై ఏదైనా బిందువు వద్ద ఉపస్పర్శ ఖండం వర్గం, ఆ బిందువు వద్ద ఉపలంబ ఖండంతో అనుపాతంలో ఉంటుందని చూపండి.**

సాధన. $by^2 = (x+a)^3$ x దృష్ట్యా అవకలనం చేస్తే

$2byy' = 3(x+a)^2$

$\therefore$ వక్రం పై ఏదైనా బిందువు (x, y) వద్ద ఉపలంబ ఖండం

$= |yy'| = \left|\frac{3}{2b}(x+a)^2\right| \to (1)$

ఉపస్పర్శ ఖండం వర్గం

$= \left|\frac{y}{y'}\right|^2 = \frac{y^2}{y'^2}$

$= \dfrac{(x+a)^3}{b\left[\frac{3(x+a)^2}{2by}\right]^2} = \frac{(x+a)^3}{b} \times \frac{4 \times b^2 \times y^2}{9(x+a)^4}$

$= \frac{(x+a)^3}{b} \times \frac{4}{9} \times b^2 \times \frac{(x+a)^3}{b} \times \frac{1}{(x+a)^4}$

$\left(\because by^2 = (x+a)^3\right)$

$\frac{4}{9}(x+a)^2 \to (2)$

$\therefore \dfrac{(\text{ఉపస్పర్శం ఖండం})^2}{(\text{ఉపలంబ ఖండం})} = \dfrac{\frac{4}{9}(x+a)^2}{\frac{3}{2b}(x+a)^2}$

$= \frac{8b}{27}$ ఒక స్థిరరాశి

$\therefore$ (ఉపస్పర్శ ఖండం) $\propto$ (ఉపలంబ ఖండం)

www.sakshieducation.com

7. $y^2 = 4(x+1)$, $y^2 = 36(9-x)$ వక్రాలు లంబంగా ఖండించుకొంటాయని చూపండి

జ: $y^2 = 4(x+1), y^2 = 36(9-x)$ వక్రాలను ఖండన బిందువుల కోసం సాధిస్తే

$4(x+1) = 36(9-x)$

అంటే $10x = 80$ లేదా $x = 8$

$y^2 = 4(x+1) \Rightarrow y^2 = 4(9) = 36$

$\Rightarrow y = \pm 6$

$\therefore$ రెండు వక్రాలు ఖండన బిందువులు $P(8,6)$, $Q(8,-6)$

$y^2 = 4(x+1) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{y}$ (మొదటి వక్రం)

$y^2 = 36(9-x) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-18}{y}$ (రెండో వక్రం)

$y^2 = 4(x+1)$ వక్రానికి P వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు

$m_1 = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

$y^2 = 36(9-x)$ వక్రానికి P వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు

$m_2 = \dfrac{-18}{6} = -3$

$m_1 m_2 = \dfrac{1}{3} \times -3 = -1$

$\Rightarrow$ వక్రాలు P వద్ద లంబంగా ఖండించుకొంటాయి.

ఇదేవిధంగా, వక్రాలు Q వద్ద కూడా లంబంగా ఖండించుకొంటాయని చూపవచ్చు.

8. $x.y^k = a^{k+1}$ వక్రం పై ఏదేని బిందువు వద్ద ఉప లంబ ఖండంస్థిరం కావాలంటే k విలువను కనుక్కోండి.

Sol: $P(x_1, y_1)$ వక్రం ఒకపై బిందువుఅనుకోండి.

వక్రసమికరణం $x.y^k = a^{k+1}$.

x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$x.k.y^{k-1}\frac{dy}{dx} + y^k.1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k.xy^{k-1}.\frac{dy}{dx} = -y^k$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y^k}{k.x.y^{k-1}} = -\frac{y}{kx}$$

www.sakshieducation.com

ఉప లంబ ఖండం= $|y_1 m|$ = $\left|y_1 \frac{-(y_1)}{kx_1}\right| = \frac{y_1^2}{kx_1}$

$= \frac{y_1^2}{k} \cdot \frac{y_1^k}{a^{k+1}} = \frac{y_1^{k+2}}{k.a^{k+1}}$

ఉప లంబ ఖండంస్థిరం కావున $\Rightarrow k+2=0 \Rightarrow k=-2$

9. x = a (t + sin t), y = a(1 – cos t) వక్రం పై ఏదేని బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ పొడవు, అభిలంబరేఖపొడవు, ఉపస్పర్శరేఖ పొడవు, ఉపలంబరేఖపొడవు కనుక్కోండి.

Sol: వక్రసమికరణం x = a (t + sin t), y = a(1 – cos t)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{a\sin t}{a(1+\cos t)} = \frac{2\sin\frac{t}{2}.\cos\frac{t}{2}}{2\cos^2\frac{t}{2}} = \frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}} = m$$

స్పర్శరేఖ పొడవు = $\left|\frac{y_1}{m}\sqrt{1+m^2}\right| = \left|a(1-\cos t)\sqrt{1+\cot^2\frac{t}{2}}\right|$

$= \left|2a.\sin^2\frac{t}{2}.\operatorname{cosec}\frac{t}{2}\right| = \left|2a.\sin^2\frac{t}{2}.\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\right| = \left|2a\sin\frac{t}{2}\right|$

అభిలంబరేఖపొడవు $\left|y_1\sqrt{1+m^2}\right| = \left|a(1-\cos t)\sqrt{1+\tan^2\frac{t}{2}}\right|$

$= \left|a\left(a\sin^2\frac{t}{2}\right).\sec\frac{t}{2}\right| = \left|2a.\sin\frac{t}{2}.\frac{\sin\frac{t}{2}}{\cot\frac{t}{2}}\right| = \left|2a.\sin\frac{t}{2}.\tan\frac{t}{2}\right|$

ఉపస్పర్శరేఖ పొడవు $\left|\frac{y_1}{m}\right| = \frac{a(1-\cos t)}{\frac{\sin t/2}{\cos t/2}} = \left|a.2\sin^2 t/2.\frac{\cos t/2}{\sin t/2}\right|$

$= |a.(2\sin t/2.\cos t/2)| = |a.\sin t|$

www.sakshieducation.com

ఉపలంబరేఖపొడవు $\left|y_1 m\right| = a(1-\cos t)\dfrac{\sin t/2}{\cos t/2}$

$$= \left|2a\sin^2 t/2.\tan t/2\right| = \left|2a\sin^2 t/2.\tan t/2\right|$$

10. $y=\frac{a}{2}\left(e^{x/a}+e^{-x/a}\right)$ **వక్రం పై ఏదేని బిందువు వద్ద ఉపస్పర్శరేఖ పొడవు, లంబరేఖపొడవు కనుక్కోండి.**

Sol: వక్రసమీకరణం $y=\frac{a}{2}\left(e^{x/a}+e^{-x/a}\right) \qquad = a.\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = a.\sinh\left(\frac{x}{a}\right)\frac{1}{a} = \sinh\frac{x}{a} \quad = m$$

లంబరేఖపొడవు $= \left|y_1\sqrt{1+m^2}\right| \qquad = \left|a.\cosh\frac{x}{a}\right|\sqrt{1+\sinh^2\frac{x}{a}}$

$$= a.\cosh\frac{x}{a}.\cosh\frac{x}{a} = a.\cosh^2\frac{x}{a}$$

ఉపలంబరేఖపొడవు $\left|y_1 m\right| = \left|a.\cosh\left(\frac{x}{a}\right).\sinh\left(\frac{x}{a}\right)\right| \qquad = \left|\frac{a}{2}\left(2\sinh\frac{x}{a}.\cosh\frac{x}{a}\right)\right|$

$$= \left|\frac{a}{2}.\sinh\frac{2x}{a}\right|$$

11. $x=a(\cos t+t\sin t)\,y=a(\sin t-t\cos t)$ **వక్రం పై ఏదేని బిందువు వద్ద ఉపస్పర్శరేఖ పొడవు, ఉపలంబ రేఖపొడవు కనుక్కోండి.**

Sol: వక్రసమీకరణం $x=a(\cos t+t\sin t)$, $\qquad y=a(\sin t-t\cos t)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{at\sin t}{at\cos t} = \tan t$$

ఉపస్పర్శరేఖ పొడవు $= \left|\frac{y_1}{f'(x_1)}\right| = \left|\frac{a(\sin t-t\cos t)}{\tan t}\right| \quad = \left|a\cot t(\sin t-t\cos t)\right|$

www.sakshieducation.com

ఉపలంబరేఖపొడవు $= |y_1.f'(x_1)| \quad = |a(\sin t - t\cos t)\tan t| = |a \tan t(\sin t - t\cos t)|$

12. ఈక్రింది వక్రాల మధ్య కోణాన్ని కనుక్కోండి.

1. $\mathbf{x + y + 2 = 0;\ x^2 + y^2 - 10y = 0}$

Sol: $x + y + 2 = 0 \Rightarrow x = -(y+2)$ —— (1)

$x^2 + y^2 - 10y = 0$ — (2)

1, 2 ల నుండి

$(y+2)^2 + y^2 - 10y = 0 \Rightarrow y^2 + 4y + 4 + y^2 - 10y = 0$

$\Rightarrow 2y^2 - 6y + 4 = 0 \quad \Rightarrow y^2 - 3y + 2 = 0 \Rightarrow (y+1)(y-2) = 0$

$\Rightarrow y = 1 \text{ or } y = 2$

$x = -(y+2)$

$y = 1 \Rightarrow x = -(1+2) = -3$

$y = 2 \Rightarrow x = -(2+2) = -4$

ఖండనబిందువులు $P(-3,1)$ and $Q(-4,2)$

వక్ర సమికరణం $x^2 + y^2 - 10y = 0$

$x^2 + y^2 - 10y = 0$

x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$\Rightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} - 10\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow 2\frac{dy}{dx}(y-5) = -2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y-5}$

రేఖా సమికరణం $x + y + 2 = 0$

www.sakshieducation.com

వాలు $m_2 = -1$.

Case (i): వాలు $m_1 = \frac{dy}{dx}/P = -\frac{-3}{1-5} = -\frac{3}{4}$ మరియు $m_2 = -1$.

వక్రాల మధ్య కోణం è అయితే $\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$

$$= \left|\frac{-\frac{3}{4}+1}{1+\frac{3}{4}}\right| = \frac{1}{7} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$$

Case (ii):

వాలు $m_1 = \frac{dy}{dx}/Q = -\frac{4}{2-5} = -\frac{4}{3}$ **మరియు** $\mathbf{m_2 = -1}$.

$$\Rightarrow \tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{-\frac{4}{3}+1}{1+\frac{4}{3}}\right| = \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$$

2. $\mathbf{2y^2 - 9x = 0, 3x^2 + 4y = 0}$ **(4 వ పాదంలో).**

Sol: $2y^2 - 9x = 0 \Rightarrow 9x = 2y^2 \Rightarrow$ $x = \frac{2}{9}y^2$ -

$3x^2 + 4y = 0$

సమీకరణాలను సాధించగా $\Rightarrow 3.\frac{4}{81}y^4 + 4y = 0$

$$\Rightarrow \frac{4y^4 + 108y}{27} = 0 \Rightarrow 4y\left(y^3 + 27\right) = 0$$

$y = 0$ or $y^3 = -27 \Rightarrow y = -3$

$9x = 2y^2 = 2 \times 9 \Rightarrow x = 2$

www.sakshieducation.com

ఖండన బిందువు $P(2,-3)$ (4 వ పాదంలో)

వక్ర సమీకరణం $2y^2 = 9x$

$$4y\frac{dy}{dx} = 9 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{9}{4y}$$

వాలు $m_1 = \frac{dy}{dx} / P(2,-3) = \frac{9}{4.-3} = -\frac{3}{4}$

రెండవ వక్రం $3x^2 + 4y = 0$

$$\Rightarrow 4y = -3x^2$$

$$\Rightarrow 4.\frac{dy}{dx} = -6x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-6x}{4} = \frac{-3x}{2}$$

వాలు $m_2 = \frac{dy}{dx} / P(2,-3) = \frac{-3.2}{2} = -3$

వక్రాల మధ్య కోణం è అయితే $\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{9}{13}\right).$$

$y^2 = 4(x+1)$, $y^2 = 36(9-x)$ అనే వక్రాలు లంబంగా ఖండించుకుంటాయని చూపుము.

www.sakshieducation.com

13. (a,b) బిందువు వద్ద $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2(a \neq 0, b \neq 0)$ వక్రానికి స్పర్శరేఖా సమీకరణం $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$ అనిచూపుము.

Sol: $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2$

x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$n\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}.\frac{1}{a}+n\left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}.\frac{1}{b}.\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(a,b)}=\frac{\left(-\frac{n}{a}\right)\left(\frac{a}{a}\right)^{x-1}}{\left(\frac{n}{b}\right)\left(\frac{b}{b}\right)^{x-1}}=-\frac{b}{a}$$

(a,b) వద్దస్పర్శ రేఖసవిరణం $y-b=-\frac{b}{a}(x-a)\Rightarrow \quad \frac{y}{b}-1=-\frac{x}{a}+1\Rightarrow$

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$

14. $2y=e^{\frac{-x}{2}}$ **అనేవక్రానికి మరియు y అక్షానికి మధ్య కోణాన్ని కనుక్కోండి.**

Sol: y అక్ష సమికరణం x = 0

$2y=e^{\frac{-x}{2}}$, x = 0 ల ఖండన బిందువు $p(0,\frac{1}{2})$

స్పర్శ రేఖ x- అక్షం తో చేసే కోణం ψ అయితే

$$\tan\psi=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(0,\frac{1}{2}\right)}=\left.\frac{-1}{4}e^{\frac{-x}{2}}\right|_{\left(0,\frac{1}{2}\right)}=\frac{-1}{4}$$

y - అక్షం, $2y=e^{\frac{-x}{2}}$ ల మధ్య కోణం ϕ అయితే

$$\tan\phi=\left|\tan\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)\right|-|\cot\psi|=4$$

$\therefore$ $2y=e^{\frac{-x}{2}}$ అనేవక్రానికి మరియు y అక్షానికి మధ్య కోణం $\tan^{-1}4$.

www.sakshieducation.com

15. $\mathbf{ax^2+by^2=1}$ **,** $a_1x^2+b_1y^2=1$ **అనేవక్రాలు లంబంగా ఖండించుకుంటే** $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{b_1}$ **అనిచూపుము.**

Sol: $p(x_1, y_1)$ ను $\mathbf{ax^2+by^2=1}$ **,** $a_1x^2+b_1y^2=1$ వక్రాల ఖండన బిందువు అనుకోండి.

$$\text{అప్పుడు}\frac{x_1^2}{b_1-b}=\frac{y_1^2}{a_1-a}=\frac{1}{ab_1-a_1b} \qquad \text{—(1)}$$

$ax^2+by^2=1$ ను x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా ,

$$m_1=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{atP} \quad \Rightarrow m_1=\frac{-ax_1}{by_1}$$

ఇదేవిధంగా $a_1x^2+b_1y^2=1$ వక్రానికి $p(x_1, y_1)$ వద్ద స్పర్శ రేఖ వాలు

$$m_2=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{atP} \quad =\frac{-a_1x_1}{b_1y_1}$$

వక్రాలు లంబంగా ఖండించుకుంటున్నాయి కావున $m_1m_2=-1$.

$$\text{i.e.,} \frac{aa_1x_1^2}{bb_1y_1^2}=-1 \text{ or } \frac{x_1^2}{y_1^2}=\frac{-bb_1}{aa_2} \qquad \text{—(2)}$$

$$\text{(1), (2) ల నుండి } \frac{b_1-b}{a-a_1}=\frac{bb_1}{aa_1}$$

$$\Rightarrow (b-a)a_1b_1=(b_1-a_1)ab$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{b_1}$$

www.sakshieducation.com