త్రి పరిమాణ నిరూపకాలు

1. $P(3,-2,4)$ బిందువుకు మూలబిందువు నుంచి దూరాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన. $OP=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{9+4+16}$

$=\sqrt{29}$ యూనిట్లు

2. $(3,4,-2),(1,0,7)$ బిందువుల మధ్యదూరం కనుక్కోండి.

సాధన. $PQ=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$

$=\sqrt{(3-1)^2+(4-0)^2+(-2-7)^2}$

$=\sqrt{4+16+81}=\sqrt{101}$ యూనిట్లు

3. $(5,-1,7),(x,5,1)$ ల మధ్యదూరం 9 యూనిట్లు అయితే x ను కనుక్కోండి.

సాధన. $P(5,-1,7),Q(x,5,1)$ లు బిందువులు

$PQ=9$

$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}=9$

$\sqrt{(5-x)^2+(-1-5)^2+(7-1)^2}=9$

$(5-x)^2+36+36=81$

$(5-x)^2=81-72=9$

$5-x=\pm 3$

$5-x=3$ లేదా $5-x=-3$

$x=5-3$ లేదా $x=5+3$

$=2$ లేదా 8

4. $(2,3,5),(-1,5,-1),(4,-3,2)$ బిందువులు సమద్విబాహు లంబకోణ త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయని చూపండి.

సాధన. $A(2,3,5),B(-1,5,-1),C(4,-3,2)$ లు దత్త బిందువులు

$AB^2=(2+1)^2+(3-5)^2+(5+1)^2$

$=9+4+36=49$

$BC^2=(-1-4)^2+(5+3)^2+(-1-2)^2$

$=25+64+9=98$

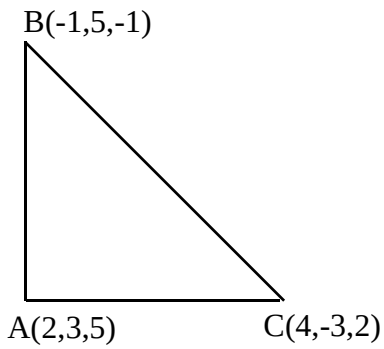
www.sakshieducation.com

$CA^2 = (4-2)^2 + (-3-3)^2 + (2-5)^2$

$= 4 + 36 + 9 = 49$

$AB^2 = CA^2 \Rightarrow AB^2 + CA^2 = 49 = 49 = 98 = BC^2$

ABC లంబకోణ సమద్విబాహు త్రిభుజం



5. $(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)$ బిందువులు ఒక సమబహు త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయని చూపండి.

సాధన. $A(1,2,3), B(2,3,1)$ మరియు $C(3,1,2)$ లు దత్త బిందువులు

$AB^2 = (1-2)^2 + (2-3)^2 + (3-1)^2$

$= 1 + 1 + 4 = 6$

$BC^2 = (2-3)^2 + (3-1)^2 + (1-2)^2$

$= 1 + 4 + 1 = 6$

$AB^2 = BC^2 = CA^2 \Rightarrow AB = BC = CA$

ABC సమబహు త్రిభుజము

6. $A = (-2,2,3), B = (13,-3,13)$ లు రెండు బిందువులు. 3PA=2PB అయ్యేటట్లు చలించే బిందువు P యొక్క నిరూపకాలు $x^2 + y^2 + z^2 + 28x - 12y + 10z - 247 = 0$ సమీకరణాన్ని తృప్తిపరుస్తాయని చూపండి.

సాధన. $A(-2,2,3)$ మరియు $B(13,-3,13)$ లు దత్త బిందువులు $P(x,y,z)$ బిందువు బిందుపథం మీది దత్త నియమము

$3PA = 2PB \Rightarrow 9PA^2 = 4PB^2$

$9\left[(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2\right]$

$= 4\left[(x-13)^2 + (y+3)^2 + (z-13)^2\right]$

$\Rightarrow 9\left(x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 6z + 9\right)$

$= 4\left(x^2 - 26x + 169 + y^2 + 6y + 9 + z^2 - 26z + 169\right)$

www.sakshieducation.com

$9x^2+9y^2+9z^2+36x-36x-36y-54z+153$

$=4x^2+4y^2+4z^2-104x+24y-104z+1388$

$5x^2+5y^2+5z^2+140x-60y+50-1235=0$

5 తో భాగించగా P బిందు పథము

$x^2+y^2+z^2+28x-12y+10z-247=0$

7. $(1,2,3)(7,0,1),(-2,3,4)$ సరేఖీయాలు అని చూపండి.

సాధన. $A(1,2,3),B(7,0,1)C(-2,3,4)$ దత్త బిందువులు

$AB=\sqrt{(1-7)^2+(2-0)^2+(3-1)^2}=$

$\sqrt{36+4+4}=\sqrt{44}=2\sqrt{11}$

$BC=\sqrt{(7+2)^2+(0-3)^2+(1-4)^2}=$

$\sqrt{81+9+9}=\sqrt{99}=3\sqrt{11}$

$CA=\sqrt{(-2,-1)^2+(3-2)^2+(4-3)^2}=$

$\sqrt{9+1+1}=\sqrt{11}$

$AB+AC=2\sqrt{11}=3\sqrt{11}=BC$

A,B,C లు సరేఖీయాలు

8. $A(-2,3,4),B(1,2,3)$ **బిందువులను కలపే రేఖాఖండాన్ని XZ-తలం విభజించే నిష్పత్తిని కనుక్కోండి.**

సాధన. AB ని XZ - తలం విభజించే నిష్పత్తి

$AB=-y_1:y_2$

$=-3:2$

9. $A(1,1,1),B(-2,4,1)$ బిందువులు రెండుశీర్షాలుగా, మూలబిందువు కేంద్రాసంగాగల త్రిభుజం ABC కి శీర్షం 'C' నిరూపకాలు కనుక్కోండి.

సాధన. $A(1,1,1),B(-2,4,1)$ లు (x,y,z) బిందువు ΔABC యొక్క శీర్షాలు

G బిందువు ΔABC కేంద్రాభాసం

G నిరూపకాలు

$\left(\frac{1-2+x}{3},\frac{1+4+y}{3},\frac{1+1+z}{3}\right)=(0,0,0)$

$\frac{x-1}{3}=0,\frac{y+5}{3}=0,\frac{z+2}{3}=0$

$x-1=0,y+5=0,z+2=0$

www.sakshieducation.com

$x=1, y=-5, z=-2$

$\therefore$ C నిరూపకాలు $(1,-5,-2)$

10. $(3,2,-1),(4,1,1),(6,2,5)$లు మూడు శీర్షాలుగా, $(4,2,2)$ కేంద్రాభాసంగా గల చతుర్ముఖి నాలగో శీర్షాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: $A(3,2,-1), B(4,1,1), C(6,2,5), D(x,y,z)$లు

చతుర్భుజ శీర్షాలు

కేంద్రభాసం G నిరూపకాలు

$$\left(\frac{3+4+6+x}{4}, \frac{2+1+2+y}{4}, \frac{-1+1+5+z}{4}\right)$$

$$=\left(\frac{13+x}{4}, \frac{5+y}{2}, \frac{5+z}{4}\right)=(4,2,2)$$

$$\frac{13+x}{4}=4 \qquad \frac{5+y}{4}=2 \qquad \frac{5+z}{4}=2$$

$$13+x=16 \qquad 5+y=8 \qquad \frac{5+z}{4}=2$$

$$x=16-13=3 \qquad y=8-5=3 \qquad z=8-5=3$$

D నిరూపకాలు $(3,3,3)$

11. $A=(6,3,-4), B=(-2,-1,2)$లను కలిపే రేఖా ఖండం మధ్యబిందువుకూ, $(3,-1,2)$బిందువుకూ మధ్య గల దూరాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన. $A(6,3,-4)\,B(-2,-1,2)$లు దత్త బిందువులు

AB మధ్య బిందువు Q

Q నిరూపకాలు $\left(\frac{6-2}{2}, \frac{3-1}{2}, \frac{-4+2}{2}\right)$

$=2(2,1,-1)$

P నిరూపకాలు $(3,-1,2)$

$$PQ=\sqrt{(3-2)^2+(1-1)^2+(2+1)^2}$$

$=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$ యూనిట్లు

www.sakshieducation.com

12. $A(3,2,-4), B(5,4-6) C(9,8,-10)$లు సరేఖీయాలు అని చూపి, B, $\overline{AC}$ ని విభజించే నిష్పత్తిని కనుక్కోండి.

సాధన.

$A(3,2,-4) B(5,4,-6)$ మరియు $C(9,8,-10)$లు

దత్తబిందువులు

$AB = \sqrt{(3-5)^2 + (2-4)^2 + (-4+6)^2}$

$= \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$BC = \sqrt{(5-9)^2 + (4-8)^2 + (-6+10)^2}$

$= \sqrt{16+16+16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$CA = \sqrt{(9-3)^2 + (8-2)^2 + (-10+4)^2}$

$= \sqrt{36+36+36} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$

$AB + BC = 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 6\sqrt{3} = CA$

A,B,C సరేఖీయాలు

AC ని B విభజించే నిష్పత్తి = AB:BC

$= 2\sqrt{3} : 4\sqrt{3} = 1:2$

13. $O(0,0,0), A(2,-3,3), B(-2,3,-3)$ బిందువులు సరేఖీయాలని చూపండి. ప్రతిబిందువూ మిగిలిన రెడు బిందువులను కలపే రేఖను ఏ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుందో కనుక్కోండి.

సాధన.

$O(0,0,0), A(2,-3,3), B(-2,3,-3)$లు దత్త బిందువులు

$OA = \sqrt{(0-2)^2 + (0+3)^2 + (0-3)^2}$

$= \sqrt{4+9+9} = \sqrt{22}$

$OB = \sqrt{(0+2)^2 + (0-3)^2 + (0+3)^2}$

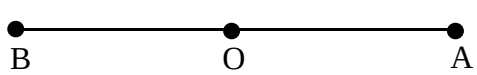
$= \sqrt{4+9+9} = \sqrt{22}$

$AB = \sqrt{(2+2)^2 + (-3-3)^2 + (3+3)^2}$

$= \sqrt{16+36+36} = \sqrt{88} = 2\sqrt{22}$

$OA + OB = \sqrt{22} + \sqrt{22} = 2\sqrt{22} = AB$

$\therefore$ O,A,B సరేఖీయాలు



AB ని 'O' విభజించే నిష్పత్తి

$= OA : AB = \sqrt{22} : \sqrt{22} = -1:2$

www.sakshieducation.com

OA ని B విభజించే నిష్పత్తి

$= -AB : BO = -2\sqrt{22} : \sqrt{22} = -2:1$

14) $Y-$అక్షం నుంచి ఒక బిందువు దూరం, $(1,2,-1)$ నుంచిదానికి దూరానికి మూడు రెట్లయితే ఆ బిందువు బిందుపథం $8x^2+9y^2+8z^2-18x-36y+18z+54=0$ అని చూపండి.

సాధన.

$P(x,y,z)$ బిందుపథము మీది బిందువు

$PM = Y-$ అక్షం నుండి దూరము $= \sqrt{x^2+z^2}$

$A(1,2,-1)$ దత్త బిందువు

దత్త నియమము $PM = 3, PA$

$PM^2 = 9PA^2$

$x^2+z^2 = \left[9(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2\right]$

$= 9x^2-18x+9+9y^2-36y+36$

$+9z^2+18z+9$

P బిందవులు $8x^2+9y^2+8z^2-18x-36y$

$+18z+54=0$

P తృప్తి పరిచే సమీకరణము

$8x^2+6y^2+8z^2-18x-36y+18z+54=0$

15. $A(2,4,5), B(3,5,-4)$ లను కలపే సరళరేఖా ఖండాన్ని YZ - తలం విభజించే నిష్పత్తిని మరియు ఖండన బిందువును కనుక్కోండి.

సాధన.

AB రేఖ YZ తులాన్ని P వద్ద ఖండిస్తుంది.

P బిందువు AB ని k:1 నిష్పత్తి లో విభజిస్తుంది.

P నిరూపకాలు

$$\left(\frac{3k+2}{1}, \frac{5k+4}{k+1}, \frac{-4k+5}{k+1}\right)$$

P బిందువు YZ తలం పై ఉంది.

$\Rightarrow$ p యొక్క x నిరూపకాలు $= 0$

$$\frac{3k+2}{k+1} = 0 \Rightarrow 3k+2=0$$

$$k = -\frac{2}{3}$$

www.sakshieducation.com

YZ తలం AB ని -2:3 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది.

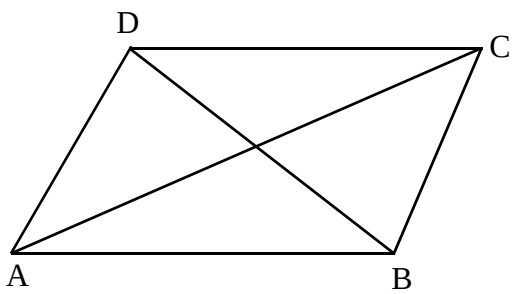
k విలువ p నిరూపకాలతో ప్రతిక్షేపించగా

$$p\left[0,\frac{5\left(-\frac{2}{3}\right)+4}{-\frac{2}{3}+1},\frac{(-4)\left(-\frac{2}{3}\right)+5}{-\frac{2}{3}+1}\right]$$

$(0,2,23)$

16. $(2,4,-1),(3,6,-1),(4,5,1)$ వరుస శీర్షాలుగా గల సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క నాలుగో శీర్షాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన.



ABCD సమాంతర చతుర్భుజం

$A=(2,4,-1), B=(3,6,-1)$

$C=(4,5,1)$

$D(x,y,z)$ నాల్గవ శీర్షం

ABCD సమాంతర చతుర్భుజం

AC మధ్య బిందువు =BD మధ్య బిందువు

$$\left(\frac{2+4}{2},\frac{4+5}{7},\frac{-1+1}{2}\right)=\left(\frac{3+x}{2},\frac{6+y}{2},\frac{-1+z}{2}\right)$$

$\frac{3+x}{2}=\frac{6}{2}$ $\quad$ $\frac{6+y}{2}=\frac{9}{2}$ $\quad$ $\frac{0}{2}=\frac{z-1}{2}$

$3+x=6$ $\quad$ $6+y=9$ $\quad$ $z-1=0$

$x=3$ $\quad$ $y=3$ $\quad$ $z=1$

$\therefore$ నాల్గవ శీర్షం నిరూపకాలు $=D(3,3,1)$

www.sakshieducation.com

17. $(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)$ బిందువులతో ఏర్పడిన త్రిభుజం లంబకేంద్రం, కేంద్రభాసం, పరికేంద్రం, అంతరకేంద్రాలు వరుసగా H,G,S,I లు అయితే వాటివిలువలను కనుక్కోండి.

సాధన.

$$AB=\sqrt{(2-1)^2+(3-2)^2+(1-3)^2}$$

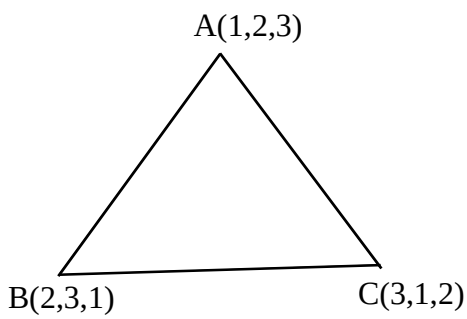
$$=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$$

$$BC=\sqrt{(3-2)^2+(1-3)^2+(2-1)^2}$$

$$=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$$

$$CA=\sqrt{(1-3)^2+(2-1)^2+(3-2)^2}$$

$$=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$$



$AB=BC=CA$ కాబట్టి, ABC సమబాహు త్రిభుజం.

కేంద్ర భాసం $G=\left(\frac{1+2+3}{3},\frac{2+3+1}{3},\frac{3+1+2}{3}\right)=(2,2,2)$

సమబాహు త్రభుజంలో లంబకేంద్రం, కేంద్రభాసం,పరికేంద్రం, అంతరకేంద్రాలు సమానం (నాలుగు బిందువులు ఏకీభవిస్తాయి).

$H=(2,2,2), S=(2,2,2), I=(2,2,2)$

www.sakshieducation.com

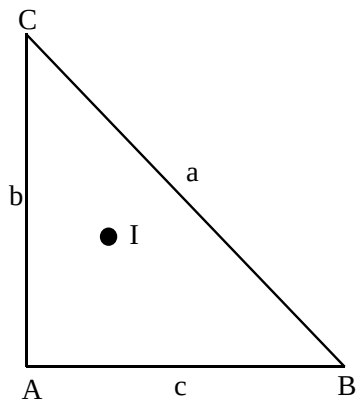
18. $(0,0,0),(3,0,0),(0,4,0)$లతో ఏర్పడిన త్రిభుజం అంతరకేంద్రం కనుక్కోండి.

సాధన.

$A=(x_1,y_1,z_1), B=(x_2,y_2,z_2), C=(x_3,y_3,z_3)$

లు శీర్షాలుగా గల ABC త్రిభుజం భుజాలు a,b,c

అయితే త్రిభుజం అంతరకేంద్రం



$$I=\left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c},\frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c},\frac{az_1+bz_2+cz_3}{a+b+c}\right)$$

$A=(0,0,0), B=(3,0,0), C=(0,4,0)$

$a=BC=\sqrt{9+16+0}=5;$

$b=CA=\sqrt{0+16+0}=4;$

$c=AB=\sqrt{9+0+0}=3$

కాబట్టి $I=\left(\frac{5(0)+4(3)+3(0)}{5+4+3},\frac{5(0)+4(0)+3(4)}{5+4+3}\right.$

$\left.\frac{5(0)+4(0)+3(0)}{5+4+3}\right)$

$=(1,1,0)$

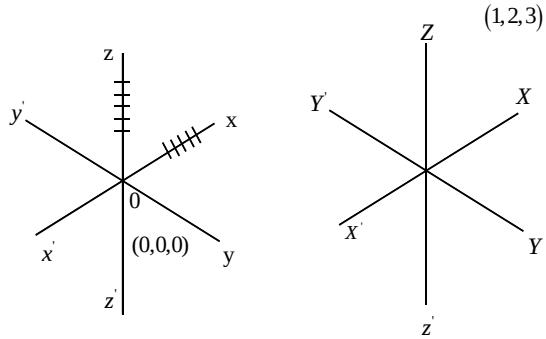
www.sakshieducation.com

19. సమాంతర అక్షపరివర్తనం ద్వారా $(1,2,3)$ బిందువును $(2,3,1)$ బిందువు వద్దకు మారిస్తే, నూతన మూల బిందువును కనుక్కోండి.

సాధన. $Oxyz$ నిరూపక వ్యవస్థ దృష్ట్యా P బిందువును నిరూపకాలు (x,y,z) అనుకొందాం $O'XYZ$ నిరూపక వ్యవస్థ దృష్ట్యా P బిందువు నిరూపకాలు (X,Y,Z) అనుకొందాం

$P(x,y,z) \to (X,Y,Z)$

$(1,2,3) \quad \to (2,3,1)$



$O'(h,k,s)$ నూతన మూలబిందువు అయితే

$x = X + h, y = Y + k, z = Z + s$ అవుతాయి

$\Rightarrow (h,k,s)(x - X, y - Y, z - Z)$

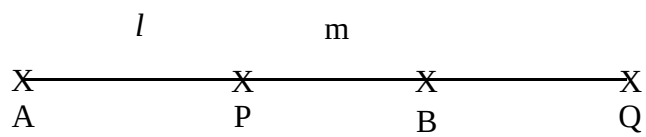
$\Rightarrow (h,k,s) = (1-2, 2-3, 3-1)$

$= (-1,-1,2)$

$\therefore \; O' = (-1,-1,2)$ నూతన మూలబిందువు

20. $A(3,2,-4), B(9,8,-10)$ బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాన్ని $P(5,4,-6)$ బిందువు విభజించే నిష్పత్తి కనుక్కోండి. ఇంకా P హరాత్మక సంయుగ్మ బిందువును కూడా కనుక్కోండి.

సాధన.



AB రేఖా ఖండాన్ని P బిందువు విభజించే నిష్పత్తి $l:m$

$\therefore (5,4-6)$

$$= \left(\frac{9l-3m}{l-m}, \frac{8l-2m}{l-m}, \frac{10l+4m}{l-m} \right)$$

AB ని Q బిందువు $l:-m$ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుందనుకుందాం. అప్పుడు

www.sakshieducation.com

$$=\left(\frac{9l-6l}{l-2l},\frac{8l-4l}{l-2l},\frac{-10l+8l}{l-2l}\right)$$

$$=(-3,-4,2)$$

$\therefore$ $P(5,4,-6)$ హరాత్మక సంయుగ్మ బిందువు $Q(-3,-4,2)$

www.sakshieducation.com