సరళరేఖాయుగ్మాలు

1. ఈ క్రింది ఇచ్చిన ప్రతీ సరళరేఖాయగ్మపు మధ్య కోణాన్ని కనుక్కోండి.

i) $x^2-7xy+12y^2=0$

ii) $x^2+2xy\cot\alpha-y^2=0$

సాధన. i) $x^2-7xy+12y^2=0$

$$a=1, b=12, h=-\frac{7}{2}$$

$$\tan\theta=\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}$$

$$=\frac{2\sqrt{\frac{49}{4}-12}}{1+12}=\frac{2\sqrt{\frac{1}{4}}}{13}=\frac{\sqrt{1}}{13}$$

$$\tan\theta=\frac{1}{13}\Rightarrow\theta=\tan^{-1}\left(\frac{1}{13}\right)$$

సాధన. ii) $x^2+2xy\cot\alpha-y^2=0$

$$a+b=1-1=0$$

$$\therefore\ \theta\frac{\pi}{2}$$

2. $\left(x^2+2a\right)^2-3y^2=0, x=a$ లు సూచించే రేఖలు ఒక సమబాహు త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయని చూపండి.

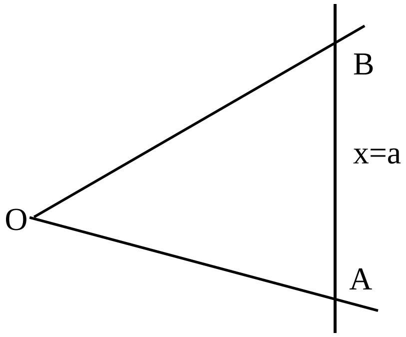
సాధన. OA, OB ల ఉమ్మడి సమీకరణము

$$(x+2a)^2-3y^2=0$$

$$(x+2a)^2-\left(\sqrt{3}y\right)^2=0$$

$$\left(x+2a+\sqrt{3}y\right)\left(x+2a-\sqrt{3}y\right)=0$$

www.sakshieducation.com



OA సమీకరణము $x+\sqrt{3}y+2a=0$ ------(1)

OB సమీకరణము $x-\sqrt{3}y+2a=0$ ------(2)

AB సమీకరణము $x-a=0$

$\therefore \cos\underline{|OAB} = \frac{|1+0|}{\sqrt{1+3}\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2} = \cos 60^0$

$\therefore OAB = 60^0$

$\cos OBA = \frac{|1-0|}{\sqrt{1+3}\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2} = \cos 60^0$

$\therefore OAB = 60^0$

$\therefore AOB = 180^0 - (OAB + OBA)$

$= 180^0 - (60^0 + 60^0)$

$= 18^0 - 120^0$

$= 60^0$

$\therefore \Delta OAB$ సమబాహు త్రిభుజం.

3. $(2,-1)$ బిందువు వద్ద ఖండించుకొంటూ $6x^2 - 13xy - 5y^2 = 0$ సూచించే రేఖాయుగ్మానికి

i) లంబంగా ఉండే రేఖాయుగ్మాపు సమీకరణం,

ii) సమాంతరంగా ఉండే రేఖాయుగ్మాపు సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన. OA,OB ల సమీకరణము $6x^2 - 13xy - 5y^2 = 0$

i) (x_1, y_1) గుండా పోతూ $2x^2 + 2hxy + by^2 = 0$ కు

లంబంగా ఉండే రేఖా సమీకరణము

$b(x-x_1)^2 - 2h(x-x_1)(y-y_1) + a(y-y_1)^2 = 0$

లంబరేఖల సమీకరణము

$-5(x-2)^2 + 13(x-2)(y+1)6(y+1)^2 = 0$

www.sakshieducation.com

$$-\left(x^2-4x+4\right)+13\left(xy+x-2y-2\right)+6\left(y^2+2y+1\right)=0$$

$$-5x^2+20x-20+13xy+13x-26y-26+6y^2+12y+6=0$$

$$-5x^2+13xy+6y^2+33x-14y+40=0$$

లేదా $5x^2-13xy-6y^2-33x+14y+40=0$

ii) (x_1, y_1) గుండాపోతూ $ax^2+2hxy+by^2=0$ కు సమాంతరంగా ఉండే రేఖల సమీకరణము

$a(x-x_1)^2+2h(x-x_1)(y-y_1)+b(y-y_1)^2=0$ సమాంతర రేఖల సమీకరణము

$$6(x-2)^2-13(x-2)(y+1)-5(y+1)^2=0$$

$$6\left(x^2-4x+4\right)-13\left(xy+x-2y-2\right)-5\left(y^2+2y+1\right)=0$$

$$6x^2-24x+24-13xy-13x+26y+26-5y^2-10y-5=0$$

$$\Rightarrow 6x^2-24x-13xy-5y^2-37x+16y+45=0$$

4. $3x^2+4xy+23y^2=0, 3x-2y+13=0$ అనే సరళరేఖలతో ఏర్పడే త్రిభుజం $\frac{13}{\sqrt{3}}$ చ.యూ. వైశాల్యంగా గల సమబాహు త్రిభుజం అని నిరూపించండి.

సాధన. OA,OB ల ఉమ్మడి సమీకరణాలు

$3x^2+48xy+23y^2=0$ --------(1)

AB సమీకరణం $3x-2y+13=0$ --------(2)

(1) ని

$$\left(9x^2-12xy+4y^2\right)-3\left(4x^2+12xy+9y^2\right)=0$$

ఈ విధంగా రాయగలము.

i.e., $\Rightarrow (3x-2y)^2-3(3x+3y)^2=0$

$$\Rightarrow\left[(3x-2y)+\sqrt{3}(2x+3y)\right]\left[(3x-2y)-\sqrt{3}(2x+3y)\right]=0$$

$$\Rightarrow\left[\left(3+2\sqrt{3}\right)x+\left(3\sqrt{3}-2\right)y\right]=0, \quad \left[\left(3-2\sqrt{3}\right)x-\left(3\sqrt{3}+2\right)y\right]=0$$

OA సమీకరణము

$\left(3+2\sqrt{3}\right)x-\left(3\sqrt{3}-2\right)y=0$ --------(1)

OB సమీకరణము

$\left(3-2\sqrt{3}\right)x-\left(3\sqrt{3}+2\right)y=0$ -------(2)

$$\cos\ OAB=\frac{\left|3\left(3+2\sqrt{3}\right)-2\left(3\sqrt{3}-2\right)\right|}{\sqrt{9+4}\sqrt{\left(3+2\sqrt{3}\right)^2+\left(3\sqrt{3}-2\right)^2}}$$

www.sakshieducation.com

$$= \frac{\left|9+6\sqrt{3}-6\sqrt{3}+4\right|}{\sqrt{13}\sqrt{9+12\sqrt{3}+27+4-12\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{13}{\sqrt{13}.2\sqrt{13}} = \frac{1}{2} = \cos 60^0$$

$$\therefore \underline{|OAB} = 60^0$$

$$\cos OBA = \frac{\left|3\left(3-2\sqrt{3}\right)+2\left(3\sqrt{3}+2\right)\right|}{\sqrt{9+4}\sqrt{\left(3-2\sqrt{3}\right)^2+\left(3\sqrt{3}+2\right)^2}}$$

$$= \frac{\left|9-6\sqrt{3}+6\sqrt{3}+4\right|}{\sqrt{13}+\sqrt{9+12-12\sqrt{3}+27+4+12\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{13}{\sqrt{13}.2\sqrt{13}} = \frac{1}{2} = \cos 60^0$$

$\therefore$ OBA $= 60^0$

$\therefore$ AOB $= 180^0 - [OAB + OBA]$

$= 180^0 - \left(60^0 + 60^0\right)$

$= 180^0 - 120^0 = 60^0$

$\therefore$ OAB సమబాహు త్రిభుజము

$$\therefore \ \Delta OAB \text{ వైశాల్యం} = \left|\frac{n^2\sqrt{h^2-ab}}{am^2-2hlm+bl^2}\right|$$

$$= \frac{169\sqrt{576-69}}{\left|3(-2)^2-48.3(-2)+23(3)^2\right|}$$

$$= \frac{169\sqrt{507}}{|12+288+207|} = \frac{169.13\sqrt{3}}{507}$$

$$= \frac{13\sqrt{3}}{3} = \frac{13}{\sqrt{3}} \text{ చ.యూనిట్లు}$$

www.sakshieducation.com

5. $ax^2+2hxy+by^2=0$ **ఒక రేఖాయుగ్మం ఈ రేఖలో ఒక దాని వాలురెండో దాని వాలుకు రెట్టింపయితే $8h^2=9ab$ అని చూపండి.**

సాధన. దత్త రేఖల ఉమ్మడి సమీకరణము

$$ax^2+2hxy+by^2=0$$

$y=m_1x$ మరియు $y=m_2x$ లు వాటి విడి విడి సమీకరణాలు అనుకొందాం.

$$m_1+m_2=-\frac{2h}{b}, m_1m_2=\frac{a}{b}$$

$m_2=2m_1$ కనుక

$$3m_1=-\frac{2h}{b}, 2m_1^2=\frac{a}{b}$$

$$m_1=-\frac{2h}{3}, m_1^2=\frac{a}{2b}$$

$$\left(-\frac{2h}{3b}\right)^2=\frac{a}{2b}$$

$$\frac{4h^2}{9b^2}=\frac{a}{2b}$$

$$8h^2=9ab$$

6. $(lx+my)^2-3(mx-ly)^2=0,\ lx+my+n=0$ **అనే సరళరేఖలలో ఏర్పడే త్రిభుజం $\frac{n^2}{\sqrt{3}(l^2+m^2)}$ వైశాల్యం గల సమబాహు త్రిభుజం అని నిరూపించండి.**

సాధన. OA, OB ల ఉమ్మడి సమీకరణము $(lx+my)^2-3(mx-ly)^2=0$

$$l^2x^2+m^2y^2+2lmy-3m^2x^2-3l^2y^2+6lmxy=0$$

$$(l^2-3m^2)x^2+8lmxy+lm^2-3l^2)y^2=0$$

$$\cos\underline{|AOB}=\frac{|a+b|}{\sqrt{(a-b^2)-4n^2}}$$

$$=\frac{|l^2-m^2+m^2-3l^2|}{\sqrt{(l^2-3m^2-m^2+3l)^2+al^2m^2}}$$

$$\frac{2|l^2+m^2|}{4\sqrt{(l^2-m^2)^2+4l^2m^2}}=\frac{2|l^2+m^2|}{4(l^2+m^2)}=\frac{1}{2}$$

$$=\cos 60^o$$

www.sakshieducation.com

$\lfloor AOB = 60^o$

OA, OB ల సమద్విఖండన రేఖ ఉమ్మడి సమీకరణము

$h(x^2 - y^2) = (a-b)xy$

$4lm(x^2 - y^2) = (x^2 - 3m^2 + 3l^2 xy)$

$4lm(x^2 - y^2) = 4(l^2 - m^2)$

$lmx^2 - (l^2 - m^2)xy - lmy^2 = 0$

$(lx - my)(mx - ly) = 0$

$lx + my = 0$ మరియు $mx - ly = 0$

సమద్విఖండన రేఖ $mx - ly = 0$ కు లంబంగా ఉంటే $lx + my + n = 0$

OAB సమద్విబాహు త్రిభుజం $\lfloor OAB = 60^o$

OAB సమబాహు త్రిభుజం

$P = P$ నుండి AB మీదకు లంబదూరం

$$= \frac{|n|}{\sqrt{l^2 + m^2}}$$

$\Delta OAB = \frac{p^2}{\sqrt{3}} = \frac{n^2}{\sqrt{3}(l^2 + m^2)}$ చ.యూనిట్లు

7. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ **సూచించే సరళరేఖలలో ఒక సరళరేఖ నిరూపకాక్షాల మధ్యకోణాన్ని సమద్విఖండన చేస్తే $(a+b)^2 = 4h^2$ అని నిరూపించుము.**

సాధన. నిరూపకాక్షాల కోణ సమద్విఖండన రేఖల మీకరణాలు $y = \pm x$

సందర్భం $(i): y = x$ రేఖ $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ యొక్క ఒక కోణం సమద్విఖండన రేఖ

$x^2(a + 2h + b) = 0$

$a + 2h + b = 0$ .... (1)

సందర్భం $(ii): y = -x$ రేఖ

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ యొక్క ఒక కోణం సమద్విఖండన రేఖ

$a - 2h + b = 0$............ (2)

(1), (2) లను గుణించగా

$(a + b + 2h).(a + b - 2h) = 0$

$(a+b)^2 - 4h^2 = 0$

$(a+b)^2 = 4h^2$

www.sakshieducation.com

8. $ax^2+2hxy+by^2=0$ **అనే రేఖాయుగ్మం నుంచి** (α,β) **అనే బిందువుకు లంబ దూరాల లబ్ధం** $\dfrac{|a\alpha^2+2h\alpha\beta+b\beta^2|}{\sqrt{(a-b)^2+4h^2}}$ **అని నిరూపించండి.**

సాధన. $ax^2+2hxy+by^2\equiv(l_1x+m_1y)(l_2x+m_2y)$

అనుకొందాం

సూచించే రేఖా విడి సమీకరణము

$ax^2+2hxy+by^2=0$

$L_1: l_1x+m_1y=0$ మరియు

$L_2: l_2x+m_2y=0$

$l_1l_2=a; m_1m_2=b$ మరియు

$l_1m_2+l_2m_1=2h$

$d_1=(\alpha,\beta)$ నుండి L_1 కు లంబదూరము

$$L_1=\frac{|l_1\alpha+m_1\beta|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}}$$

$d_2=(\alpha,\beta)$ నుండి L_2 కు లంబదూరము

$$=\frac{|l_2\alpha+m_2\beta|}{\sqrt{l_2^2+m_2^2}}$$

లంబ దూరాల లబ్ధము

$$=\frac{|(l_1\alpha+m_1\beta)(l_2\alpha+m_2\beta)|}{\sqrt{(l_1^2+m_1^2)(l_2^2+m_2^2)}}$$

$$\frac{|a\alpha^2+2h\alpha\beta+b\beta^2|}{\sqrt{(a-b)^2+4h^2}}$$

www.sakshieducation.com

9. $ax^2+2hxy+by^2=0$ **అనే రేఖా యుగ్మంలోనూ** $lx+my+n=0$ **అనే సరళరేఖతోను నిర్ధిష్టమయ్యే త్రిభుజ వైశాల్యము** $\dfrac{n^2\sqrt{h^2-ab}}{|am-2hlm+bl^2|}$ **అని నిరూపించండి.**

సాధన. $\overline{OA},\overline{OB}$ లు సూచించే రేఖాయుగ్మం సమీకరణం $ax^2+2hxy+by^2=0$ (బొమ్మను చూడండి)

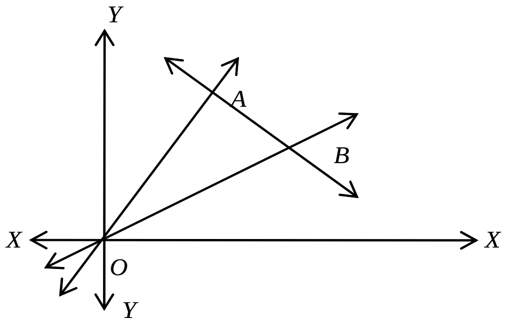
$\overline{AB}$ రేఖ

$lx+my+n=0$ అనుకుందాం

$ax^2+2hxy+by^2\equiv(l_1x+m_1y)(l_2x+m_2y)$

$\overline{OA},\overline{OB}$ ల సమీకరణాలు వరుసగా

$l_1x+m_1y=0$ మరియు $l_2x+m_2y=0$ అనుకొందాం



$A=(x_1,y_1)$ మరియు $B=(x_2,y_2)$ అనుకుందాం

$l_1x_1+m_1y_1=0, lx_1+my_1+n=0$ అడ్డ గుణకార సూత్రం ప్రకారం

$$\frac{x_1}{m_1n}=\frac{y_1}{-nl_1}=\frac{l}{l_1m-lm_1}$$

$$x_1=\frac{m_1n}{l_1m-lm_1};\ y_1=\frac{-nl_1}{l_1m-lm_1}$$

ఇదే విధంగా $x_2=\dfrac{m_2n}{l_2m-lm_2};\ y_2=\dfrac{-nl_2}{l_2m-lm_2}$

వైశాల్యము $\Delta OAB=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{n^2(l_1m_2-l_2m_1)}{(l_1m-lm_1)(l_2m-lm_2)}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\frac{n^2\sqrt{(l_1m_2+l_2m_1)^2-4l_1l_2m_1m_2}}{|l_1l_2m^2-lm(l_1m_2+l_2m_1)m_1m_2l^2|}$$

www.sakshieducation.com

$$=\frac{1}{2}\frac{n^2\sqrt{4h^2-4ab}}{|am^2-2hlm+bl^2|}$$

$(l_1l_2=a, m_1m_2=b, l_1m_2+l_2m_1=2h)$ కనుక

$$=\frac{n^2\sqrt{h^2-ab}}{|am^2-2hlm+bl^2|}$$

10. $ax^2+2hxy+by^2=0$ **సమికరణం సూచించే రేఖల మధ్య కోణం** θ **అయితే**

$$\cos\theta=\pm\frac{a+b}{\sqrt{(a-b)^2+4h^2}}$$ **అనిచూపుము**

Proof:

$ax^2+2hxy+by^2=0$ సమికరణం సూచించే రేఖలు $l_1x+m_1y=0$ —(1)
$l_2x+m_2y=0$ —(2). అనుకుందాం

అప్పుడు $l_1l_2=a$, $l_1m_2+l_2m_1=2h$, $m_1m_2=b$.

(1), (2). రేఖల మధ్య కోణం θ అయితే $\cos\theta=\pm\frac{l_1l_2+m_1m_2}{\sqrt{(l_1^2+m_1^2)(l_2^2+m_2^2)}}$

$$=\pm\frac{l_1l_2+m_1m_2}{\sqrt{l_1^2l_2^2+m_1^2m_2^2+l_1^2m_2^2+l_2^2m_1^2}}$$

$$=\pm\frac{l_1l_2+m_1m_2}{\sqrt{(l_1l_2-m_1m_2)^2+2l_1l_2m_1m_2+(l_1m_2+l_2m_1)^2-2l_1m_2l_2m_1}}$$

$$=\pm\frac{a+b}{\sqrt{(a-b)^2+4h^2}}$$

www.sakshieducation.com

11. $ax^2+2hxy+by^2=0$ **రేఖల మధ్య కోణసమద్విఖండన రేఖాయుగ్మ సమీకరణం**

$$h(x^2-y^2)=(a-b)xy \text{ (or) } \frac{x^2-y^2}{a-b}=\frac{xy}{h}.$$

Proof:

$ax^2+2hxy+by^2=0$ సమీకరణం సూచించే రేఖలు $l_1x+m_1y=0$ — (1)

$l_2x+m_2y=0$ — (2). అనుకుందాం

అప్పుడు $l_1l_2=a$, $l_1m_2+l_2m_1=2h$, $m_1m_2=b$.

(1), (2) రేఖల మధ్య కోణసమద్విఖండన రేఖల సమీకరణాలు

$$\frac{l_1x+m_1y}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}}-\frac{l_2x+m_2y}{\sqrt{l_2^2+m_2^2}}=0,\quad \frac{l_1x+m_1y}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}}+\frac{l_2x+m_2y}{\sqrt{l_2^2+m_2^2}}=0$$

కోణసమద్విఖండన రేఖాయుగ్మ సమీకరణం

$$\left(\frac{l_1x+m_1y}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}}-\frac{l_2x+m_2y}{\sqrt{l_2^2+m_2^2}}\right)\left(\frac{\ell_1x+m_1y}{\sqrt{\ell_1^2+m_1^2}}+\frac{\ell_2x+m_2y}{\sqrt{\ell_2^2+m_2^2}}\right)=0$$

$$\Rightarrow\left(\frac{l_1x+m_1y}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}}\right)^2-\left(\frac{l_2x+m_2y}{\sqrt{l_2^2+m_2^2}}\right)^2=0$$

$$\Rightarrow\left(l_2^2+m_2^2\right)(l_1x+m_1y)^2-\left(l_1^2+m_1^2\right)(l_2x+m_2y)^2=0$$

$$\Rightarrow x^2\left[l_1^2\left(l_2^2+m_2^2\right)-l_2^2\left(l_1^2+m_1^2\right)\right]y^2\left[m_2^2\left(l_1^2+m_1^2\right)-m_1^2\left(l_2^2+m_2^2\right)\right]-2xy\left[l_2m_2\left(l_1^2+m_1^2\right)-l_1m_1\left(l_2^2+m_2^2\right)\right]=0$$

$$\Rightarrow x^2\left(l_1^2l_2^2+l_1^2m_2^2-l_1^2l_2^2-l_2^2m_1^2\right)-y^2\left(l_1^2m_2^2+m_1^2m_2^2-m_1^2l_2^2-m_1^2m_2^2\right)$$

$$-2xy\left(l_2m_2l_1^2+l_2m_2m_1^2-l_1m_1l_2^2-l_1m_1m_2^2\right)=0$$

$$\Rightarrow x^2\left(l_1^2m_2^2-l_2^2m_1^2\right)-y^2\left(l_1^2m_2^2-l_2^2m_2^2\right)\quad =2xy\left[l_1l_2(l_1m_2-l_2m_1)-m_1m_2(l_1m_2-l_2m_1)\right]$$

$$\Rightarrow(x^2-y^2)\left(l_1^2m_2^2-l_2^2m_1^2\right)=2xy\left(l_1l_2-m_1m_2\right)\left(l_1m_2-l_2m_1\right)$$

$$\Rightarrow(x^2-y^2)(l_1m_2+l_2m_1)=2xy(l_1l_2-m_1m_2)$$

$$\Rightarrow 2h(x^2-y^2)=2xy(a-b)$$

$$\therefore h(x^2-y^2)=(a-b)xy \quad \text{OR} \quad \frac{x^2-y^2}{a-b}=\frac{xy}{h}$$

www.sakshieducation.com

12. $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ **అనే సమీకరణం రేఖాయుగ్మాన్ని సూచిస్తే ఈ సరళరేఖల నుంచి మూలబిందువుకు ఉన్న దూరాల లబ్ధం** $\frac{|c|}{\sqrt{(a-b)^2+4h^2}}$ **అని నిరూపించండి.**

సాధన. $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$

రేఖాయుగ్మాన్ని సూచిస్తుంది.

$l_1x+m_1y+n_1=0$ .... (1)

$l_2x+m_2y+n_2=0$ .... (2)

$\Rightarrow ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$

$\equiv(l_1x+m_1y+n_1)(l_2x+m_2y+n_2)$

$l_1l_2=a, m_1m_2=b, l_1m_2+l_2m_1=2h,$

$l_1n_2+l_2n_1=2g, m_1n_2+m_2n_1=2f, n_1n_2=c$

మూలబిందువు నుండి (1) కి లంబదూరము

$$=\frac{|n_1|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}}$$

మూలబిందువు నుండి (1) కి లంబదూరము

$$=\frac{|n_2|}{\sqrt{l_2^2+m_2^2}}$$

లంబాల లబ్ధం

$$=\frac{|n_1|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}}\cdot\frac{|n_2|}{\sqrt{l_2^2+m_2^2}}$$

$$=\frac{|n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2l_2^2+m_1^2m_2^2l_1^2m_2^2+l_2^2m_1^2}}$$

$$=\frac{|n_1n_2|}{\sqrt{(l_1l_2-m_1m_2)^2+(l_1m_2+l_2m_1)^2}}$$

$$=\frac{|c|}{\sqrt{(a-b)^2+(2h)^2}}=\frac{|c|}{\sqrt{(a-b)^2+4h^2}}$$

www.sakshieducation.com

13. $ax^2+2hxy+by^2=0,\quad ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ అనే రేఖా యుగ్మాలతో ఒక సమచతుర్భుజం ఏర్పడితే $(a-b)fg+h\left(f^2-g^2\right)=0$ అని నిరూపించండి.

సాధన. OA, OB ల ఉమ్మడి సమీకరణము

$ax^2+2hxy+by^2=0,$

AC, BC ల ఉమ్మడి సమీకరణము

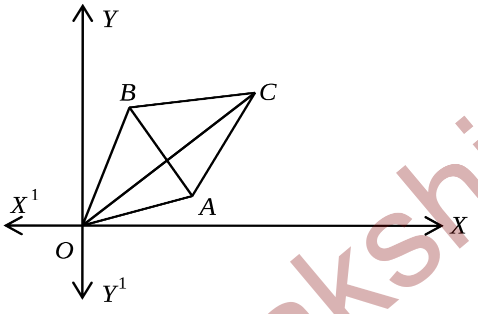
$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$

ఖండన బిందువు $C=\left(\dfrac{hf-bg}{ab-h^2},\dfrac{gh-af}{ab-h^2}\right)$

వికర్ణం సమీకరణము $y=\dfrac{gh-af}{hf-bg}.x$

$y(hf-bg)=x(gh-af)$

$(gh-af)x-(hf-bg)y=0$



A, B లు రెండు రేఖా యుగ్మాల మీది బిందువులు

AB ల ఉమ్మడి సమీకరణము

$2gx+2fy+c=0$

$OACB$ సమచతుర్భుజం

OC, AB లు లంబంగా ఉన్నాయి.

$2g(gh-af)-2f(hf-bg)=0$

$hg^2-afg-hf^2+bfg=0$

$(a-b)fg+h\left(f^2-g^2\right)=0$

www.sakshieducation.com

14. $ax^2+2hxy+by^2=0,$ **తో సూచించే సరళరేఖలు ఒక సమాంతర చతుర్భుజం రెండు బుజాలు. ఆ సమాంతర చతుర్భుజం ఒక వికర్ణం సమీకరణం** $px+qy=1$ **అయితే రెండవ వికర్ణం సమీకరణం** $y(bp-hq)=x(aq-hp)$ **అని నిరూపించండి.**

సాధన. $OACB$ సమాంతర చతుర్భుజం $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ ల సమీకరణము

$H\equiv ax^2+2hxy+by^2=0$ మిగిలిన రెండు భుజాలు $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}$ లు వరుసగా $\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}$ కి సమాంతరాలు కనుక

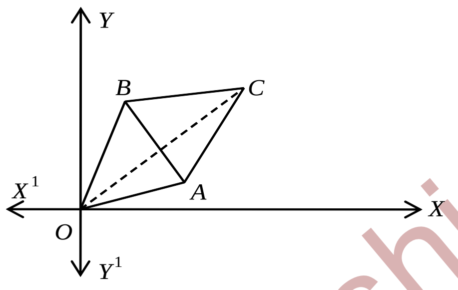
$S\equiv ax^2=2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$

వికర్ణం $\overline{AB}$ సమీకరణము (18 సమస్య నుండి)

$2gx+2fy+c=0$. దీని సమీకరణము

$px+qy=1$ (లేదా) $-pcx-qcy+c=0$

$c\neq 0$



$2g=-pc, 2f=-qc$ .... (1)

శీర్షం C నిరూపకాలు

$$=\left(\frac{hf-bg}{ab-h^2},\frac{gh-af}{ab-h^2}\right)$$

వికర్ణం $\overline{OC}$ సమీకరణము

$(gh-af)x=(hf-bg)y$

i.e., $c(-ph+aq)x=c(-hq+bp)y$ వలన

(లేదా) $(aq-hp)x=(bp-hq)y$

(కనుక $c\neq 0$)

www.sakshieducation.com

15. $S \equiv ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ సమీకరణం రెండు సమాంతర రేఖలను సూచిస్తే $h^2=ab$ and $bg^2=af^2$ అనిచూపుము. మరియు వాటి మధ్య దూరం $2\sqrt{\dfrac{g^2-ac}{a(a+b)}}$ (or) $2\sqrt{\dfrac{f^2-bc}{b(a+b)}}$ అనిచూపుము

Proof :

$S \equiv ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ సమీకరణం సూచించే రేఖలు

$lx+my+n_1=0$ — (1)
$lx+my+n_2=0$ — (2) అనుకుందాం

$\therefore ax^2+2hxy+2gx+2fy+c$

$\equiv (lx+my+n_1)(lx+my+n_2)$

అప్పుడు $l^2=a$ — (3)

$2lm=2h$ — (4)

$m^2=b$ — (5)

$l(n_1+n_2)=2g$ — (6)

$m(n_1+n_2)=2f$ — (7)

$n_1n_2=c$ — (8)

(3) , (5) ల నుండి $l^2m^2=ab$

(4) నుండి $h^2=ab$.

$\dfrac{(6)}{(7)} \Rightarrow \dfrac{l}{m}=\dfrac{g}{f} \Rightarrow \dfrac{l^2}{m^2}=\dfrac{g^2}{f^2}$,

$\therefore \dfrac{a}{b}=\dfrac{g^2}{f^2} \Rightarrow bg^2=af^2$

(1) , (2) ల మధ్య దూరం

$$=\left|\frac{n_1-n_2}{\sqrt{(l^2+m^2)}}\right|=\frac{\sqrt{(n_1+n_2)^2-4n_1n_2}}{\sqrt{l^2+m^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{(4g^2/l^2)-4c}}{\sqrt{a+b}} \text{ or } \frac{\sqrt{(4f^2/m^2)-4c}}{\sqrt{a+b}}$$

$$=2\sqrt{\frac{g^2-ac}{a(a+b)}} \text{ (or) } 2\sqrt{\frac{f^2-bc}{b(a+b)}}$$

www.sakshieducation.com

16. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, $h^2 > ab$ రేఖల ఖండన బిందువు

$\left(\dfrac{hf - bg}{ab - h^2}, \dfrac{gh - af}{ab - h^2}\right)$ అనిచూపుము

Proof:

రేఖల ఖండన బిందువు (x_1, y_1) అనుకుందాం

మూలబిందువును (x_1, y_1) కు సమాంతర పరివర్తన చేయండి.

(X, Y) లను (x, y) యొక్క క్రొత్త నిరూపకములు అనుకోండి.

$x = X + x_1$ and $y = Y + y_1$.

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ యొక్క రూపాంతర సమికరణం

$$a(X + x_1)^2 + 2h(X + x_1)(Y + y_1) + b(Y + y_1)^2 + 2g(X + x_1) + 2f(Y + y_1) + c = 0$$

$$\Rightarrow aX^2 + 2hXY + bY^2 + 2X(ax_1 + hy_1 + g) + 2Y(hx_1 + by_1 + f) + (ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c) = 0$$

ఈ సమికరణం మూలబిందువు గుండా పోయే సమికరణాన్ని సూచిస్తోంది కావున

$$ax_1 + hy_1 + g = 0 \quad \text{—— (1)}$$

$$hx_1 + by_1 + f = 0 \quad \text{—— (2)}$$

$$ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0 \quad \text{—— (3)}$$

(3) ను క్రింది విధంగా వ్రాయగా

$$x_1(ax_1 + hy_1 + g) + y_1(hx_1 + by_1 + f) + (gx_1 + fy_1 + c) = 0$$

$$\Rightarrow gx_1 + fy_1 + c = 0 \text{——(4)}$$

(1), (2) ల ను సాధించగా

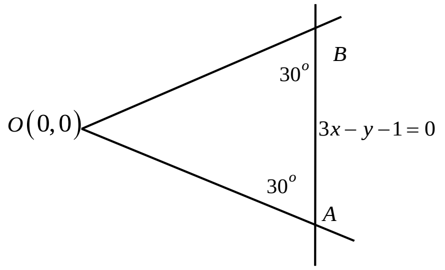
(2) $$\frac{x_1}{hf - bg} = \frac{y}{gh - af} = \frac{1}{ab - h^2}$$

$$\therefore x_1 = \frac{hf - bg}{ab - h^2}, \; y_1 = \frac{gh - af}{ab - h^2}$$

ఖండన బిందువు $\left(\dfrac{hf - bg}{ab - h^2}, \dfrac{gh - af}{ab - h^2}\right)$

www.sakshieducation.com

17. మూలబిందువు గుండా పోతూ $3x-y-1=0$ అనే సరళరేఖతో 30° కోణం చేసే సరళరేఖా యుగ్మం సమీకరణం $13x^2+12xy-3y^2=0$ అని చూపండి.



సాధన. AB సమీకరణము $3x-y-1=0$

OA, OB లు AB తో 30° కోణం చేస్తూ మూలబిందువు గుండా పోతుంది.

OA వాలు m అనుకొందాం

OA సమీకరణము

$y-0=m(x-0)=mx$ లేదా $mx-y=0$

$$\cos\underline{|OAB} = \frac{|3m+1|}{\sqrt{9+1}\sqrt{m^2+1}}$$

$$\cos\underline{|OAB} = \cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|3m+1|}{\sqrt{10}\sqrt{m^2+1}}$$

వర్గీకరించి, అడ్డ గుణకారము చేయగా,

$$\frac{3(m^2+1)}{4} = \frac{(3m+1)^2}{10}$$

$$15(m^2+1) = 2(3m+1)^2$$

$$15m^2+15 = 2(9m^2+6m+1)$$

$$= 18m^2+12m+2$$

$$3m^2+12m-13=0$$

m_1, m_2 లు మూలాలనుకుందాం.

$$m_1+m_2=-4, m_1m_2=\frac{-13}{3}$$

OA, OB ల ఉమ్మడి సమీకరణము

www.sakshieducation.com

$$(m_1\ x-y)(m_2\,x-y)=0$$

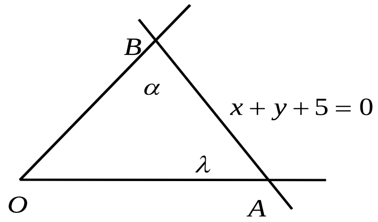
$$m_1m_2x^2-(m_1+m_2)xy+y^2=0$$

$$\frac{-13}{3}x^2+4xy+y^2=0$$

$$-13x^2+12xy+3y^2=0 \text{ (లేదా)}$$

$$13x^2-12xy-3y^2=0$$

18. మూలబిందువు గుండాపోతూ $x+y+5=0$ సరళరేఖతో లఘుకోణం α చేసరీ సరళరేఖాయుగ్మం సమీకరణం కనుక్కోండి.



సాధన. AB సమీకరణము

$$x+y+5=0 \ \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

AB వాలు $=-1$

OA, OB లు కావలసిన రేఖలు

OA సమీకరణము $y=mx \Rightarrow mx-y=0$

$$\cos\alpha=\frac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

$$=\frac{|m-1|}{\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}}$$

$$2(m^2+1)\cos^2\alpha=(m-1)^2$$

$$2(m^2+1)=\frac{(m-1)^2}{\cos^2\alpha}=(m-1)^2\sec^2\alpha$$

$$2m^2+2=m^2\sec^2\alpha-2m\sec^2\alpha+\sec^2\alpha$$

$$m^2(\sec^2\alpha-2)-2m\sec^2\alpha+(\sec^2\alpha-2)=0$$

$$m_1+m_2=\frac{2\sec^2\alpha}{\sec^2\alpha-2},\ m_1m_2=1$$

OA, OB ల ఉమ్మడి సమీకరణము

www.sakshieducation.com

$$(y-m_1x)(y-m_2x)=0$$

$$y^2-(m_1+m_2)xy+m_1m_2x^2=0$$

$$y^2+\frac{2\sec^2\alpha}{\sec^2\alpha-2}=\frac{2}{1-2\cos^2\alpha}$$

$$m_1+m_2=\frac{2\sec^2\alpha}{\sec^2\alpha-2}=\frac{2}{1-2\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{-2}{2\cos^2\alpha-1}=\frac{-2}{\cos 2\alpha}$$

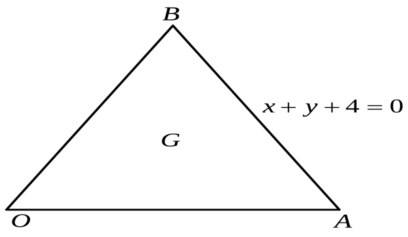
$$=-2\sec 2\alpha$$

OA, OB ల ఉమ్మడి సమీకరణాలు

$$x^2+2xy\sec 2\alpha+y^2=0$$

19. క్రింది రేఖలలో ఏర్పడే త్రిభుజ కేంద్రాభాసం, వైశాల్యం కనుక్కోండి.

i) $2y^2-xy-6x^2=0,\ x+y+4=0$



సాధన. i) OA, OB ల ఉమ్మడి సమీకరణాలు $2y^2-xy-6x^2=0$ .... (1)

AB సమీకరణం $x+y+4=0$

$$y=-(x+4)\text{................}(2)$$

(1) లో ప్రతిక్షేపించగా

$$2(x+4)^2+x(x+4)-6x^2=0$$

$$2(x^2+8x+16)+x^2+4x-6x^2=0$$

$$2x^2+16x+32+x^2+4x-6x^2=0$$

$$-3x^2+20x+32=0$$

$$3x^2-20x-32=0$$

$$(3x+4)(x-8)=0$$

$3x+4=0$ లేదా $x-8=0$

$3x=-4$ లేదా $x=8$

www.sakshieducation.com

$x=-\frac{4}{3}$ లేదా 8

సందర్భం $(i): x=-\frac{4}{3}$

$$y=-(x+4)$$

$$=-\left(\frac{-4}{3}+4\right)=-\frac{8}{3}$$

A నిరూపకాలు $\left(-\frac{4}{3},-\frac{8}{3}\right)$

సందర్భం $(ii): x=8$

$$y=-(x+4)=-(8+4)=-12$$

B నిరూపకాలు $(8,-12)$

ΔAOB కేంద్ర భాసము G అనుకుందాం.

G నిరూపకాలు

$$\left(\frac{0-\frac{4}{3}+8}{3},\frac{0-\frac{8}{3}-12}{3}\right)=\left(\frac{20}{9},-\frac{44}{9}\right)$$

$$\Delta OAB=\frac{1}{2}\left|x_1y_2-x_2y_1\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\left(-\frac{4}{3}\right)(-12)-\left(-\frac{8}{3}\right)(8)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{48}{3}+\frac{64}{3}\right|$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{112}{3}$$

$=\frac{56}{3}$ చ.యూనిట్లు

www.sakshieducation.com

20. $ax^2+2hxy+by^2=0$, $lx+my=1$ అనేసరళరేఖలలో ఏర్పడే త్రిభుజ కేంద్రాభాసం (α,β) అయితే $\frac{\alpha}{bl-hm}=\frac{+\beta}{am-hl}=\frac{2}{3(bl^2-2hlm+am^2)}$ అని నిరూపించండి.

సాధన. OA, OB ల ఉమ్మడి సమీకరణము

$ax^2+2hxy+by^2=0$......... (1)

AB సమీకరణము $lx+my=1$

$my=1-lx$

$y=\frac{1-lx}{m}$ .... (2)

(1) లో ప్రతిక్షేపించగా

$$ax^2+2hx\frac{(1-lx)}{m}+b\frac{(1-lx)^2}{m^2}=0$$

$$am^2x^2+2hmx(1-lx)+b(1+l^2x^2-2lx)=0$$

$$am^2x^2+2hmx-2hlmx^2+b+bl^2x^2-2blx=0$$

$$(am^2-2hlm+bl^2)x^2-2(bl-hm)x+b=0$$

A నిరూపకాలు (x_1,y_1) మరియు B నిరూపకాలు (x_2,y_2)

$$x_1+x_2=\frac{2(bl-hm)}{am^2-2hlm+bl^2} \quad .... (3)$$

A, B లు $lx+my=1$ మధ్యబిందువులు,

$$lx_1+my_1=1$$

$$lx_2+my_2=1$$

$$l(x_1+x_2)+m(y_1+y_2)=2$$

$$m(y_1+y_2)=2-l(x_1+x_2)$$

$$=2-\frac{l.2(bl-hm)}{am^2-2hlm+bl^2}$$

$$=\frac{2(am^2-2hlm+bl^2-bl^2+hlm)}{am^2-2hlm+bl^2}$$

$$=\frac{2(am^2-hlm)}{am^2-2hlm+bl^2}=\frac{2m(am-hl)}{am^2-2hlm+bl^2}$$

$$y_1+y_2=\frac{2(am-hl)}{am^2-2hlm+bl^2} \quad .... (4)$$

www.sakshieducation.com

త్రిభుజ శీర్షాల నిరూపకాలు

$O(0,0), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

G నిరూపకాలు అనుకుందాం

$$\left(\frac{x_1+x_2}{3}, \frac{y_1+y_2}{3}\right) = (\alpha, \beta)$$

$$\frac{x_1+x_2}{3} = \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2(bl-hm)}{3(am^2-2hlm+bl^2)} \quad [by\ (3)]$$

$$\frac{\alpha}{bl-hm} = \frac{2}{3(bl^2-2hlm+am^2)} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\frac{y_1+y_2}{3} = \beta$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{2(am-hl)}{3(bl^2-2hlm+am^2)} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

(5) మరియు (6) నుండి,

$$\frac{\alpha}{bl-hm} = \frac{\beta}{am-hl} = \frac{2}{3(bl^2-2hlm+am^2)}$$

21. $3x^2+8xy-3y^2=0,\ \ 3x^2+8xy-3y^2+2x-4y-1=0$ **అనే రేఖాయుగ్మాలలో ఒక చతురస్రం ఏర్పడుతుందని నిరూపించండి.**

సాధన. OA, OB ల ఉమ్మడి సమీకరణాలు

$3x^2 8xy-3y^2 \quad (x+3y)(3x-y)=0$

$3x-y=0,\ x+3y=0$

OA సమీకరణము $3x-y=0$ …… (1)

OB సమీకరణము $x+3y=0$……….(2)

CA, CB ల ఉమ్మడి సమీకరణాలు

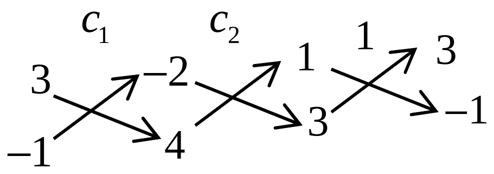
$3x^2+8xy-3y^2+2x-4y+1=0$

$3x^2+8xy-3y^2+2x-4y+1=\ (3x-y+c_1)(x+3y+c_2)$

www.sakshieducation.com

x గుణకాలను సమానం చేయగా $c_1 + 3c_2 = 2$

y గుణకాలను సమానం చేయగా $3c_1 + c_2 = -4$



$\frac{c_1}{12-2} = \frac{c_2}{-6-4} = \frac{1}{-1-9}$

$c_1 = \frac{10}{-10} = -1, c_2 = \frac{-10}{-10} = 1$

BC సమీకరణం $3x - y - 1 = 0$ .... (3)

AC సమీకరణం $x + 3y + 1 = 0$ .... (4)

OA, BC లు సమీకరణాలు స్థిరపదాలలో మాత్రమే చేధిస్తున్నా

$\Rightarrow OA, BC$ లు సమాంతరాలు

OB, CA లు సమీకరణాలు స్థిరపదాలలో మాత్రమే చేధిస్తున్నా

$\Rightarrow OB, AC$ లు సమాంతరాలు

OA, OB ల ఉమ్మడి సమీకరణము

$a + b = 3 - 3 = 0, OACB$ దీర్ఘచతురస్రం

$OA = 0$ నుండి AC మీదకు లంబదూరము

$= \frac{|0+0+1|}{\sqrt{1+9}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$OB = O$ నుండి BC మీదకు లంబదూరము

$= \frac{|0+0+1|}{\sqrt{9+1}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$OA = OB$ మరియు $OACB$ దీర్ఘచతురస్రం $OACB$ చతురస్రం.

www.sakshieducation.com

22. $3x-4y+7=0, 12x+5y-2=0$ అనే సరళరేఖల మధ్యలఘు కోణ సమద్విఖండన రేఖ సమీకరణమును కనుక్కోండి.

సాధన. దత్త రేఖలు

$$3x-4y+7=0 \;.......... \;(1)$$

$$12x+5y-2=0 \;............ \;(2)$$

(1) మరియు (2) రేఖల కోణ సమద్విఖండన రేఖల సమీకరణము

$$\frac{3x-4y+7}{\sqrt{3^2+4^2}} \pm \frac{12x+5y-2}{\sqrt{12^2+5^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3x-4y+7}{5} \pm \frac{12x+5y-2}{13} = 0$$

$$13(3x-4y+7) \pm 5(12x+5y-2) = 0$$

$$(39x-52y+91) \pm (60x+25y-10) = 0$$

$$i) 39x-52y+91+60x+25y-10=0$$

$$99x-27y+81=0 \;...... \;(3)$$

లేదా $11x-3y+9=0$

$$ii) (39x-52y+51)-(60x+25y-10)=0$$

$$39x-52y+51-60x-25y+10=0$$

$$-21x-77y+61=0 \;......... \;(4)$$

(1), (4) రేఖల మధ్య కోణము θ అయితే

$$\tan\theta = +\left|\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1a_2+b_1b_2}\right| = \left|\frac{231+84}{63-308}\right|$$

$$= \frac{315}{225} > 1$$

(4) గురు కోణ సమద్విఖండన రేఖ (3) సూచించే రెండవది లఘుకోణ సమద్విఖండన రేఖ

$11x-3y+9=0$ రేఖలఘు కోణ సమద్విఖండనరేఖ.

www.sakshieducation.com

23. $x+y-5=0, x-7y+7=0$ **అనే సరళరేఖల మధ్య అధిక గురుకోణ సమద్విఖండన రేఖ సమీకరణమును కనుక్కోండి.**

సాధన. దత్తరేఖలు

$x+y-5=0$ .... (1)

$x-7y+7=0$ .... (2)

(1), (2) మధ్యకోణ సమద్విఖండన రేఖలు

$$\frac{x+y-5}{\sqrt{1+1}} \pm \frac{x-7y+7}{\sqrt{1+49}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x+y-5}{\sqrt{2}} \pm \frac{x-7y+7}{5\sqrt{2}} = 0$$

$$\Rightarrow (5x+5y-25) \pm (x-7y+7=0)$$

$i) 5x+5y-25+x-7y+7=0$

$6x-2y-18=0$

$3x-y-9=0$ .... (3)

$ii) (5x+5y-25)-(x-7y+7)=0$

$4x+12y-32=0$

$x+3y-8=0$ .... (4)

(1), (4) రేఖల మధ్యకోణము θ అయితే

$$\tan\theta = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1a_2 + b_1b_2} = \frac{3-1}{1+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} < 1$$

(4) లఘుకోణ సమద్విఖండన రేఖ గురుకోణ సమద్విఖండన రేఖ సమీకరణము $3x-y-9=0$.

www.sakshieducation.com

24. $3x^2+7xy+2y^2+5x+5y+2=0$ సమీకరణం ఒక సరళరేఖాయుగ్మాన్ని సూచిస్తుందని నిరూపించి, ఆ సరళరేఖల ఖండన బిందువును కనుక్కోండి.

సాధన. దత్త సమీకరణం $3x^2+7xy+2y^2+5x+5y+2=0$

పోల్చగా a = 3   2f = 5 $\Rightarrow f=\frac{5}{2}$

b = 2   2g = 5 $\Rightarrow g=\frac{5}{2}$

c = 2   2h = 7 $\Rightarrow h=\frac{7}{2}$

$$\Delta = abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2$$

$$=3(2)(2)+2.\frac{5}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}-3.\frac{25}{4}$$

$$-2.\frac{25}{4}-2.\frac{49}{4}$$

$$=\frac{1}{4}(48+175-75-50-98)$$

$$=\frac{1}{2}(223-223)=0$$

$$h^2-ab=\left(\frac{7}{2}\right)^2-2.6=\frac{49}{4}-12=\frac{1}{4}>0$$

$$f^2-bc=\left(\frac{5}{2}\right)^2-2.2=\frac{25}{4}-4=\frac{9}{4}>0$$

$$g^2-ac=\left(\frac{5}{2}\right)^2-3.2=\frac{25}{4}-6=\frac{1}{4}>0$$

$\therefore$

$$\left(\frac{hf-bg}{ab-h^2},\frac{gh-gf}{ab-h^2}\right)$$

$$\frac{hf-bg}{ab-h^2}=\frac{\frac{7}{2}.\frac{7}{2}-2.\frac{5}{2}}{6-\frac{49}{2}}=\frac{35-20}{24-9}$$

$$=\frac{+15}{-25}=\frac{-3}{5}$$

$$\frac{gh-af}{ab-h^2}=\frac{\frac{5}{2}.\frac{7}{2}-3.\frac{5}{2}}{6-\frac{49}{4}}=\frac{35-30}{24-49}$$

www.sakshieducation.com

$$= \frac{5}{-25} = -\frac{1}{5}$$

ఖండన బిందువు $P\left(\frac{-3}{5}, \frac{-1}{5}\right)$

25. $x^2 - y^2 - x + 3y - 2 = 0$ సమీకరణం రెండు లంబరేఖలను సూచిస్తుందని నిరూపించి, వాటి సమీకరణాలను కనుక్కోండి.

సాధన. పోల్చగా a =1, f= $\frac{3}{2}$

b = -1 g $= -\frac{1}{2}$

c = -2 h = 0

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$$

$$= (-1)(-2) + 0 - 1.\frac{9}{4} + 1.\frac{1}{4} + 0$$

$$= +2 - \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

$$h^2 - ab = 01 - (-1) = 1 > 0,$$

$$g^2 - ac = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4} > 0$$

$$a + b = 1 - 1 = 0$$

దత్త సమీకరణము లంబరేఖా యుగ్మాన్ని సూచిస్తుంది.

$$x^2 - y^2 - x + 3y - 2 = (x + y + c_1)(x - y + c_2)$$

x గుణకాలు సమానం చేయగా

$$\Rightarrow c_1 + c_2 = -1$$

y గుణకాలు సమానం చేయగా

$$\Rightarrow -c_1 + c_2 = -1$$

కూడగా $2c_2 = 2 \Rightarrow c_2 = 1$

$$c_1 + c_2 = -1 \Rightarrow c_1 + 1 = -1$$

$$c_1 = -2$$

రేఖాల సమీకరణాలు $x + y - 2 = 0$ మరియు $x - y + 1 = 0$

www.sakshieducation.com

26. $x^2+2xy-35y^2-4x+44y-12=0$ సూచించే రేఖాయుగ్మం $5x+2y-8=0$ అనే సరళరేఖ

సాధన. దత్త రేఖల సమీకరణం అనుషక్తాలవుతాయని చూపండి.

$$x^2+2xy-35y^2-4x+44y-12=0$$

a = 1	f = 22
b = -35	g = -2
c = -12	h =1

ఖండన బిందువు $\left(\dfrac{hf-bg}{ab-h^2}, \dfrac{gh-af}{ab-h^2}\right)$

$$\frac{hf-bg}{ab-h^2}=\frac{22-70}{-35-1}=\frac{-48}{-36}=\frac{4}{3}$$

$$\frac{gh-af}{ab-h^2}=\frac{-2-22}{-35-1}=\frac{-24}{-36}=\frac{2}{3}$$

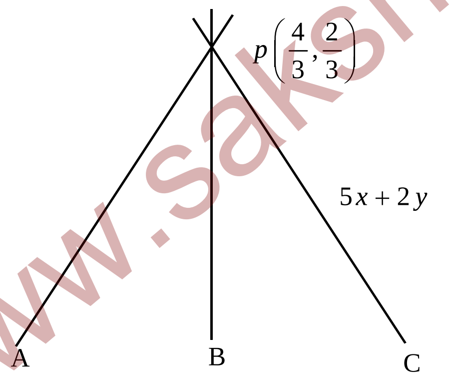
దత్త రేఖల ఖండన బిందువు $P\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$

$$5x+2y-8=5.\frac{4}{3}+2.\frac{2}{3}-8$$

$$=\frac{20+4-24}{3}=0$$

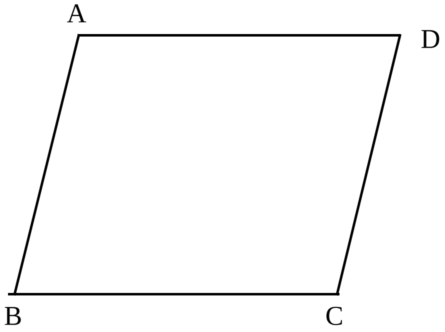
P బిందువు $5x+2y-8=0$ రేఖ మీద ఉంది.

$\therefore$ దత్త రేఖలు అనుషక్తాలు.



www.sakshieducation.com

27. $(2,1)$ బిందువు నుంచి $12x^2+25xy+12y^2+10x+11y+2=0$ సూచించే సరళరేఖలకు ఉన్నలంబ దూరాల లబ్ధం కనుక్కోండి.



సాధన. AB, AC ల ఉమ్మడి సమీకరణాలు

$12x^2+25xy+12y^2+10x+11y+2=0$

$12x^2+25xy+12y^2$

$=12x^2+16xy+9xy+12y^2=0$

$=4x(3x+4y)+3y(3x+4y)$

$=(3x+4y)(4x+3y)$

$12x^2+25xy+12y^2+10x+11y+2$

$=(3x+4y+c_1)(4x+3y+c_2)$

x గుణకాలను సమానంగా చేయగా

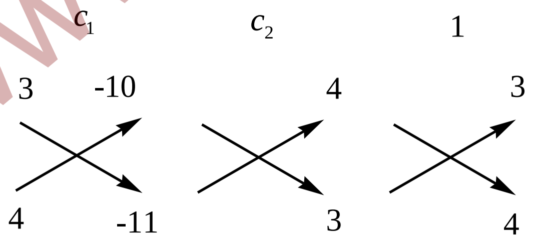
$4c_1+3c_2=10$ --------(1)

0 గుణకాలను సమానంగా చేయగా

$3c_1+4c_2=11$ -------(2)

i.e., $4c_1+3c_2-10=0$

$3c_1+4c_2-11=0$



$$\frac{c_1}{-33+40}=\frac{c_2}{-30+44}=\frac{1}{16-9}$$

$$c_1=\frac{7}{7}=1, c_2=\frac{14}{7}=2$$

AB సమీకరణం $3x+4y+1=0$

www.sakshieducation.com

AC సమీకరణం $4x+3y+2=0$

PQ = P నుండి AB మీదకు లంబ దూరము

$$AB=\frac{6+4+11}{\sqrt{9+16}}=\frac{11}{5}$$

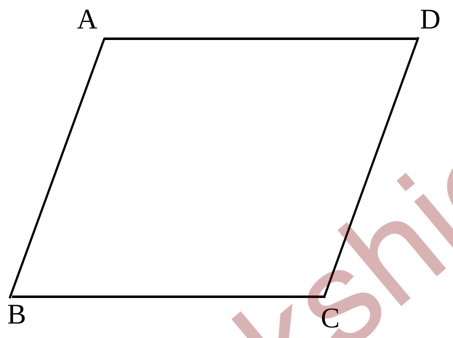
PR = P నుండి AC మీదకు లంబ దూరము

$$AC=\frac{|8+3+2|}{\sqrt{16+9}}=\frac{13}{5}$$

లంబదూరాల లబ్ధము

$$=PQ\times PR=\frac{11}{5}\times\frac{13}{5}=\frac{143}{25}$$

28. $y^2-4y+3=0, x^2+4xy+4y^2+5x+10y+4=0$ అనే సరళరేఖాయుగ్మాలతో ఒక సమాంతర చతుర్భుజం ఏర్పడుతుందని నిరూపించి, దాని భుజాల పొడవులను కనుక్కోండి.



సాధన. మొదటి రేఖాయుగ్మం సమీకరణం

$y^2-4x+3=0$

$(y-1)(y-3)=0$

$y-1=0$ లేదా $y-3=0$

AB సమీకరణం $y-1=0$ --------(1)

CD సమీకరణం $y-3=0$ -------(2)

AB,CD సమీకరణాలలో స్థిర పదంలో మాత్రమే తేడా ఉంది.

$\therefore$ AB, CD లు సమాంతరాలు.

రెండవ రేఖాయుగ్మం సమీకరణం

$x^2+4xy+4y^2+5x+10y+4=0$

$(x+2y)^2+5(x+2y)+4=0$

www.sakshieducation.com

$(x+2y)^2+4(x+2y)+(x+2y)+4=0$

$(x+2y)(x+2y+4)+1(x+2y+4)=0$

$(x+2y+1)(x+2y+4)=0$

$x+2y+1=0, x+2y+4=0$

AD సమీకరణం

$x+2y+1=0$ ....(3)

BC సమీకరణం

$x+2y+4=0$ ....(4)

AD,DC సమాంతరాలు

(1),(3)లను సాధించగా

$x+2+1=0$

x = -3

A నిరూపకాలు (-3,1)

(2), (3) లను సాధించగా

$x+2+4=0$

$x=-7$

D నిరూపకాలు (-7,3)

(1),(4) లను సాధించగా

$x+2+4=0$

x = -6

B నిరూపకాలు $(-6,1)$

AB= $\sqrt{(-3+6)^2+(1-1)^2}$

$=\sqrt{9+0}$

=3

$AD=\sqrt{(-3+7)^2+(1-3)^2}$

$=\sqrt{16+4}$

$=\sqrt{20}=2,5$

సమాంతర చతుర్భుజ భుజాల పొడవులు $3, 2\sqrt{5}$

www.sakshieducation.com

29. $2x^2+kxy-6y^2+3x+y+1=0$ సమీకరణం ఒక సరళరేఖా యుగ్మాన్ని సూచిస్తే K విలువ కనుక్కోండి. K యొక్క ఆ విలువకు ఆ సరళరేఖల ఖండన బిందువును, వాటి మధ్యకోణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన. దత్త సమీకరణము

$$2x^2+kxy-6y^2+3x+y+1=0$$

$$a=2 \quad 2f=1 \quad \Rightarrow f=\frac{1}{2}$$

$$b=-6 \quad 2g=3 \quad \Rightarrow g=\frac{3}{2}$$

$$c=1 \quad 2h=k \quad \Rightarrow h=\frac{k}{2}$$

దత్త సమీకరణము రేఖాయుగ్మాన్ని సూచిస్తే

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$$

$$-12+2.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}\left(+\frac{k}{2}\right)-2.\frac{1}{4}+6.\frac{9}{4}-\frac{k^2}{4}=0$$

$$-48+3k-2+54-k^2=0$$

$$-k^2+3k+4=0 \Rightarrow k^2-3k-4=0$$

$$(k-4)(k+1)=0$$

$k=4$ లేదా -1

సందర్భం (i): $k=-1$

ఖండన బిందువు $\left(\frac{hf-bg}{ab-h^2},\frac{gh-af}{ab-h^2}\right)$

$$\frac{hf-bg}{ab-h^2}=\frac{+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}+6.\frac{3}{2}}{-12-\frac{1}{4}}=\frac{-1+36}{-49}$$

$$=\frac{35}{-49}=\frac{-5}{7}$$

$$\frac{gh-af}{ab-h^2}=\frac{\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)-2.\frac{1}{2}}{-12-\frac{1}{4}}=\frac{-3-4}{-49} \qquad =\frac{-7}{-49}=\frac{1}{7}$$

ఖండన బిందువు $\left(\frac{-5}{7},\frac{1}{7}\right)$

www.sakshieducation.com

దత్త రేఖల మధ్య కోణము

$$= \cos^{-1} \frac{|a+b|}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}$$

$$= \cos^{-1} \frac{|2-6|}{\sqrt{(2+6)^2 + 4}}$$

$$= \cos^{-1} \left(\frac{4}{\sqrt{65}} \right)$$

సందర్భం $ii): k = 4$

$$\frac{hf - bg}{ab - h^2} = \frac{2.\frac{1}{2} + 6.\frac{3}{2}}{-12-4} = \frac{1+9}{-16} = -\frac{5}{8}$$

$$\frac{gh - af}{ab - h^2} = \frac{\frac{3}{2}.2 - 2.\frac{1}{2}}{-12-4} = \frac{2}{-16} = -\frac{1}{8}$$

ఖండన బిందువు $P\left(-\frac{5}{8}, -\frac{1}{8}\right)$

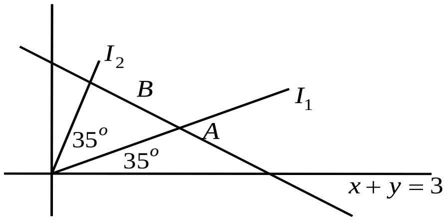
$$\cos\alpha = \frac{|a+b|}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}$$

$$= \frac{|2-6|}{\sqrt{(2+6)^2 + 16}} = \frac{4}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

30. $x^2 - 4xy + y^2 = 0, x + y = 3$ **లతో సూచించే సరళరేఖలు ఒక సమబాహు త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయని చూపండి.**

సాధన. $L = x + y - 3 = 0$ సరళరేఖ వాలు -1 అందువల్ల ఈ సరళరేఖ $X-$ అక్షం ఋణ దిశలో 45° కోణం చేస్తుంది. కనుక L తో 60° కోణం చేసే సరళరేఖకూడా ఊర్ధ్వ రేఖ కాదు.



www.sakshieducation.com

$\sqrt{3} = \tan 60^o = \left|\frac{m+1}{1-m}\right| m$ విలువ

$(m+1)^2 = 3(m-1)^2$ ను తృప్తిపరుస్తుంది.

(లేదా) $m^2 - 4m + 1 = 0$ ...... (1)

'm' వాలు కలిగి మూలబిందువు గుండా పోతూ రేఖా సమీకరణం $y = mx$............(2)

(1), (2) ల నుండి m ను తొలగించగా మూలబిందువు గుండాపోతూ L తో 60° కోణం చేసే రేఖాయుగ్మం సమీకరణాన్ని సూచిస్తుంది.

ఈ రేఖా యుగ్మం ఉమ్మడి సమీకరణము

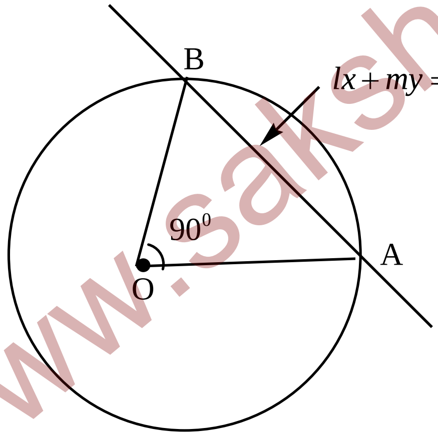
$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 4\left(\frac{y}{x}\right) + 1 = 0 \ (i.e.,) \ x^2 - 4xy + y^2 = 0$

ఇది దత్త రేఖాయుగ్మంతో సమానము.

దత్త రేఖాత్రయము సమబాహు త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తున్నాయి.

31. మూల బిందువు కేంద్రంగా గల వృత్తం $x^2 + y^2 = a^2$ కు $lx + my = 1$ అనేది ఒక జ్యా. ఈ జ్యా మూల బిందువు వద్ద లంబకోణం చేయడానికి నియమాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన.



వృత్త సమీకరణము $x^2 + y^2 = a^2$...............(1)

AB సమీకరణము $lx + my = 1$................(2)

(2) సహాయంతో (1) ని సమఘాతపరిస్తే OA,OB ల ఉమ్మడి సమీకరణం

$x^2 + y^2 = a^2.1^2$

$x^2 + y^2 = a^2(lx + my)^2$

$= a^2(l^2x^2 + m^2y^2 + 2lmxy)$

www.sakshieducation.com

$= a^2l^2x^2 + a^2m^2y^2 + 2a^2lmxy$

i.e., $a^2l^2x^2 + 2a^2lmxy + a^2m^2y^2 - x^2 - y^2 = 0$

$\left(a^2l^2 - 1\right)x^2 + 2a^2lmxy + \left(a^2m^2 - 1\right)y^2 = 0$

OA,OB లు లంబాలు కనుక

x^2 గుణకం y^2 గుణకం $= 0$

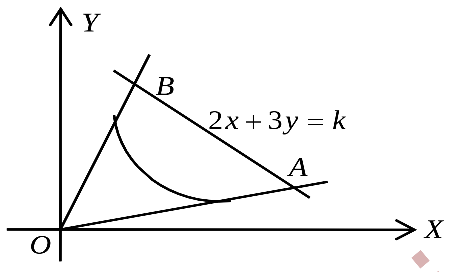
$a^2l^2 - 1 + a^2m^2 - 1 = 0$

$a^2\left(l^2 + m^2\right) = 2$

ఇది కావలసిన నియమము.

32. $x - y - \sqrt{2} = 0$ **అనే సరళరేఖ** $x^2 - xy + y^2 + 3x + 3y - 2 = 0$ **అనే వక్రాన్ని ఖండించే బిందువులను మూలబిందువుకు కలిపితే వచ్చే సరళ రేఖలు పరస్పరం లంబంగా ఉంటాయని చూపండి.**

సాధన.



వక్రం సమీకరణం

$x^2 - xy + y^2 + 3x + 3y - 2 = 0$ ......(1)

AB సమీకరణము $x - y - \sqrt{2} = 0$

$x - y = \sqrt{2}$

$\frac{x-y}{\sqrt{2}} = 1$ ..... (2)

(2) సహాయంతో (1) ని సమఘాతపరిస్తే OA, OB ల ఉమ్మడి సమీకరణం

$x^2 - xy + y^2 + 3x.1 + 3y.1 - 2.1^2 = 0$

$x^2 - xy + y^2 + 3(x+y)\frac{x-y}{\sqrt{2}} - 2\frac{(x-y)^2}{2} = 0$

$x^2 - xy + y^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}\left(x^2 - y^2\right) - \left(x^2 - 2xy + y^2\right) = 0$

www.sakshieducation.com

$$x^2 - xy + y^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}x^2 - \frac{3}{\sqrt{2}}y^2 - x^2 + 2xy - y^2 = 0$$

$$\frac{3}{\sqrt{2}}x^2 + xy - \frac{3}{\sqrt{2}}y^2 = 0$$

$$a + b = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} = 0$$

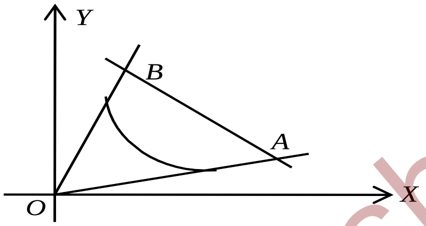
OA, OB లు లంబంగా ఉన్నాయి.

33. $x + 2y = k$ **అనే రేఖ** $2x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - y - 1 = 0$ **అనేక వక్రాన్ని ఖండించే బిందువులను మూలబిందువుకు కలిపితే వచ్చే రేఖలు పరస్పరం లంబంగా ఉంటే,** k **విలువ కనుక్కోండి.**

సాధన. దత్త వక్రం సమీకరణం

$S \equiv 2x^2 + 2xy + 3y^2 = 2x - y - 1 = 0$ ... (1)

AB సమీకరణము $x + 2y = k$



$$\frac{x+2y}{k} = 1 \text{ .... } (2)$$

(2) సహాయంతో (1) ని సమఘాత పరిస్తే OA, OB ల ఉమ్మడి సమీకరణం

$$2x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x.1 - y.1 - 1^2 = 0$$

$$2x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x\frac{(x+2y)}{k} - y\frac{(x+2y)}{k} - \frac{(x+2y)^2}{k^2} = 0$$

k^2 తో గుణించగా

$$2k^2x^2 - 2k^2xy + 3k^2y^2 + 2kx(x+2y) \; - ky(x+2y) - (x+2y)^2 = 0$$

$$2k^2x^2 - 2k^2xy + 3k^2y^2 + 2kx^2 + 4kxy \; - kxy - 2ky^2 - x^2 - 4xy - 4y^2 = 0$$

$$(2k^2 + 2k - 1)x^2 + (-2k^2 + 3k - 4)xy + (3k^2 - 2k - 4)y^2 = 0$$

OA, OB లు లంబంగా ఉన్నాయి కనుక

x^2 గుణకం $+ y^2$ గుణకం $= 0$

www.sakshieducation.com

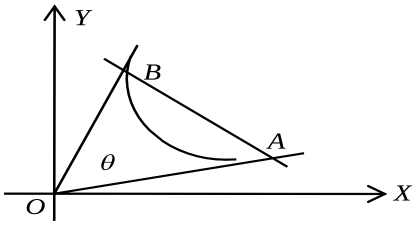
$2k^2+2k-1+3k^2-2k-4=0$

$5k^2=5 \Rightarrow k^2=1$

$k=\pm 1$

34. $3x-y+1=0$ **అనే రేఖ** $x^2+2xy+y^2+2x+2y-5=0$ **అనే వక్రాన్ని ఖండించే బిందువులను మూలబిందువుకు కలిపితే వచ్చే రేఖల మధ్య కోణాన్ని కనుక్కోండి.**

సాధన.



వక్రం సమీకరణం

$x^2+2xy+y^2+2x+2y-5=0$ ...... (1)

AB సమీకరణం $3x-y+1=0$

$y-3x=1$ .... (2)

(2) సహాయంతో (1) ని సమఘాత పరిస్తే OA, OB ల ఉమ్మడి సమీకరణం

$x^2+2xy+y^2+2x.1+2y.1-5.1^2=0$

$x^2+2xy+y^2+2x(y-3x)+2y(y-3x)-5(y-3x)^2=0$

$x^2+2xy+y^2+2xy-6x^2+2y^2-6xy-5(y^2+9x^2-6xy)=0$

$-5x^2-2xy+3y^2-5y^2-45x^2+30xy=0$

$-50x^2+28xy-2y^2=0$

i.e., $25x^2-14xy+y^2=0$

OA, OB ల మధ్య కోణము θ అనుకొందాం

$$\cos\theta=\frac{|a+b|}{\sqrt{(a-b)^2+4h^2}}=\frac{|25+1|}{\sqrt{(25-1)^2+196}}$$

$$=\frac{26}{\sqrt{576+196}}=\frac{26}{\sqrt{772}}$$

$$=\frac{26}{2\sqrt{193}}=\frac{13}{\sqrt{193}}$$

www.sakshieducation.com

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{13}{\sqrt{193}}\right)$$

35. $6x - y + 8 = 0$ **అనే రేఖ** $3x^2 + 4xy - 4y^2 - 11x + 2y + 6 = 0$ **అనే సరళరేఖాయుగ్మాన్ని ఖండించే బిందువులను మూలబిందువుకు కలిపితే వచ్చే రేఖలు నిరూపకాక్షాలతో సమాన కోణాలు చేస్తాయని చూపండి.**

సాధన. దత్త రేఖాయుగ్మం

$3x^2 + 4xy - 4y^2 - 11x + 2y + 6 = 0$ .... (1)

దత్త రేఖ సమీకరణము

$$6x - y + 8 = 0 \Rightarrow \frac{6x - y}{-8} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{y - 6x}{8} = -1$$

(2) సహాయంతో (1) ని సమఘాతపరచగా

$$3x^2 + 4xy - 4y^2 - (11x - 2y)\left(\frac{y - 6x}{8}\right)$$

$$+6\left(\frac{y - 6x}{8}\right)^2 = 0$$

$$64\left[3x^2 + 4xy - 4y^2\right] - 8\left[11xy - 66x^2 - 2y^2 + 12xy\right]$$

$$+6\left[y^2 + 36x^2 - 12xy\right] = 0$$

$936x^2 + 256xy - 256xy - 234y^2 = 0$

$468x^2 - 117y^2 = 0$ ..... (3)

$\Rightarrow 4x^2 - y^2 = 0$

ఖండన బిందువులను మూలబిందువుకు కలిపే రేఖాయుగ్మ సమీకరణం

$h(x^2 - y^2) - (a - b)xy = 0$

$0(x^2 - y^2) - (4 - 1)xy = 0$

$\Rightarrow xy = 0$

$x = 0$ లేదా $y = 0$ (నిరూపకాక్షాల సమీకరణాలు)

దత్త రేఖల నిరూపకాక్షాల సమాన నిమ్నత కలిగి ఉన్నాయి

www.sakshieducation.com