

అవకలజాల అనువర్తనాలు

ఉజ్జ్వల్యంపులు, దోషాలు

1. కింది ప్రమేయాలకు ఎదురుగా సూచించిన $x, \Delta x$ విలవులకు $\Delta y, y$ లను కనుక్కొండి

i) $y = x^2 + 3x + 6, x = 10, \Delta x = 0.01$

$\therefore \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$$= f(10.01) - f(10)$$

$$= [(10.01)^2 + 3(10.01) + 6] - [10^2 + 3(10) + 6]$$

$$= 100.2001 + 30.03 + 6 - 100 - 30 - 6$$

$$= 0.2001 + 0.03$$

$$= 0.2301$$

$$y = x^2 + 3x + 6$$

$$dy = (2x + 3)dx$$

$$= (2 \cdot 10 + 3)(0.01) = 0.23$$

ii) $y = e^x + x, x = 5, \Delta x = 0.02$

$\therefore \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$$= f(5 + 0.02) - f(5)$$

$$= f(5.02) - f(5)$$

$$= e^{5.02} - e^5 - 5$$

$$= e^{5.02} - e^5 + 0.02$$

$$= e^5(e^{0.02} - 1) + 0.02$$

$$dy = f'(x)\Delta x = (e^x + 1)\Delta x$$

$$= (e^5 + 1)(0.02)$$

iii) $y = \cos x, x = 60^\circ, \Delta x = 1^\circ$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$= \cos(x + \Delta x) - \cos x$$

$$= \cos(60^\circ + 1^\circ) - \cos 60^\circ$$

$$= \cos 61^\circ - \cos 60^\circ$$

$$= 0.4848 - \frac{1}{2}$$

$$= 0.4848 - 0.5^\circ = -0.0152$$

$$dy = f'(x)\Delta x$$

$$= -\sin x \Delta x$$

$$= -\sin 60^\circ (1^\circ) = \frac{-\sqrt{3}}{2} (0.0174)$$

$$= -(0.8660)(0.0174) = -0.0151$$

2. కింది వాటికి ఉజ్జ్వలింపు విలువలు కనుక్కోండి

i) $\sqrt{25.001}$

$$x = 25$$

$$\Delta x = 0.001$$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad dy = f'(x)\Delta x$$

$$dy = f'(x)\Delta x$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{25}}(0.001) = \frac{0.001}{10}$$

$$= 0.0001$$

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy$$

$$\approx \sqrt{25} + 0.0001$$

$$\approx 5.0001$$

ii) $\cos(60^\circ 5')$

$$x = 60^\circ, \Delta x = 5'$$

$$= \frac{5}{60} \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{2160}$$

$$= 0.001453$$

$$f(x) = \cos x$$

$$dy = f'(x)\Delta x = -\sin x \Delta x$$

$$= -\sin 60^\circ (0.001453)$$

$$= \frac{-\sqrt{3}}{2}(0.001453)$$

$$= -0.8660(0.001453)$$

$$= -0.001258$$

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy$$

$$\approx \cos x + dy$$

$$\approx \cos 60^\circ + 0.001258$$

$$\approx 0.5 - 0.001258$$

$$\approx 0.4987$$

iii) $\sqrt[4]{17}$

$$x = 16, \Delta x = 1$$

$$f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$$

$$dy = f'(x)\Delta x$$

$$= \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1}\Delta x$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} x^{-3/4} \Delta x \\
&= \frac{1}{4} (16)^{-3/4} (1) \\
&= \frac{1}{32} = 0.0312 \\
f(x + \Delta x) &\cong f(x) + dy \\
&\cong \sqrt[4]{x} + 0.0312 \\
&\cong 2 + 0.0312 \\
&\cong 2.0312
\end{aligned}$$

3. ఒక చతురంగ భజంలో పెరుగుదల 4% అయితే ఆ చతురంగపు వైశాల్యంలో ఉజ్జ్వాలుంపు పెరుగుదల శాతాన్ని కనుకోండి.

జి: చతురంగ భజం పాడవ x , వైశాల్యం $A = x^2$ అనుకుంటే ఇచ్చినది $\frac{\Delta x}{x} \times 100 = 4$

$$\begin{aligned}
A &= x^2 \\
\Delta A &= 2x\Delta x \\
\frac{\Delta A}{A} \times 100 &= \frac{2x\Delta x}{x^2} \times 100 \\
&= \frac{2\Delta x}{x} \times 100 \\
&= 2(4) \\
&= 8
\end{aligned}$$

4. ఒక గోళ వ్యాసార్థం 14 సెం.మీ.గా కొలిచారు. తరవాత ఈ వ్యాసార్థం కొలవడంలో 0.02 సెం.మీ. దోషం ఉన్నట్లుగా గమనించారు. గోళ ఉపరితల వైశాల్యంలో ఉజ్జ్వాలుంపు దోషాన్ని కనుకోండి.

జి: గోళ ఉపరితల వైశాల్యం s అనుకుంటే

$$\begin{aligned}
r &= 14, \Delta r = 0.02 \\
s &= 4\pi r^2 \\
\Delta s &= 4\pi 2r \Delta r \\
\Delta s &= 3\pi(14)(0.02) \\
&= 2.24\pi \\
&= 2.24(3.14) \\
&= 7.0336
\end{aligned}$$

5. ఒక గోళ వ్యాసం 40 సెం.మీ.గా కొలిచారు. దీనిని కొలవడంలో 0.02 సెం.మీ. దోషం ఉంటే గోళపు ఘనపరిమాణం, ఉపరితల వైశాల్యాలలో ఉజ్జ్వలింపు దోషాలను కనుక్కొండి.

జా: గోళపు ఘనపరిమాణం ν అనుకొనుము.

$$\nu = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\pi}{3} \left[\frac{d}{2} \right]^2$$

$$= \frac{4\pi}{3} \frac{d^3}{8}$$

$$= \frac{\pi d^3}{6}$$

$$\Delta\nu = \frac{\pi}{6} 3d^2 \Delta d$$

$$= \frac{\pi}{2} (40)^2 (0.02)$$

$$= \pi (1600) (0.01)$$

$$= 16\pi$$

గోళపు ఉపరితలం వైశాల్యం అనుకుంటే

$$s = 4\pi \left[\frac{d}{2} \right]^2$$

$$s = 4\pi \frac{d^2}{4}$$

$$s = \pi d^2$$

$$\Delta s = \pi 2d \Delta d$$

$$= \pi 2(40)(0.02)$$

$$= 1.6\pi$$

6. గురుత్వార్థికాంకం g , లోలకం పొడవు l , దోలనావర్తన కాలం t ల మధ్య నంబంధం $t = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

l ను గణించండంలో దోష శాతం 1 అయితే t లో ఉజ్జ్వలింపు దోష శాతాన్ని కనుక్కొండి.

జా: $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

$$\log t = \log(2\pi) + \frac{1}{2} \{ (\log(l) - \log g) \}$$

$$\frac{1}{t}(\Delta t) = 0 + \frac{1}{2} \left\{ 0 - \frac{1}{2} \cdot (\Delta g) \right\}$$

$$\frac{\Delta t}{t} \times 100 = -\frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g} \times 100$$

$$\frac{\Delta t}{t} \times 100 = 0.01$$

$$\frac{\Delta g}{g} \times 100 = ?$$

$$\Rightarrow 0.01 = -\frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g} \times 100 \Rightarrow \frac{\Delta g}{g} \times 100 = -0.02$$

$\therefore g$ లో దోషము = -0.02% (లేదా)

g లో దోష శాతము = -0.02

7. ఒక చతురస్ర భుజం 3సెం.మీ. నుంచి 3.01సెం.మీ. లకు పెరిగింది. ఆ చతురస్రపు ఉజ్జ్వాలుంపు పెరుగుదల వైశాల్యాన్ని కనుకోండి.

జా: చతురస్ర భుజం x , వైశాల్యం A అనుకొందాం. అప్పుడు

$$A = x^2 \rightarrow (1)$$

A అనేది x లో ప్రమేయం అనేది స్పష్టం. చతురస్ర భుజం 3సె.మీ. నుంచి 3.01 సెం.మీలకు పెరిగింది. కనవక $x = 3$, $\Delta x = 0.01$ గా తీసుకొందాం. చతురస్రపు ఉజ్జ్వాలుంపు పెరుగుదల వైశాల్యం

$$\Delta A \approx \frac{dA}{dx} \Delta x \rightarrow (2)$$

సమికరణం (1) ని అనుసరించి, (2)ను $\Delta A \approx 2x\Delta x$ గా రాయవచ్చు. కాబట్టి చతురస్రపు భుజం 3 నుంచి 3.01కు పెరిగినట్లుయితే ఆ చతురస్రపు ఉజ్జ్వాలుంపు పెరుగుదల వైశాల్యం

$$\Delta A \approx 2(3)(0.01) = 0.06 \text{ సెం.మీ}^2$$

8. n, k లు స్థిర సంఖ్యలు అయి $y = f(x) = kx^n$ అయితే y లో ఉజ్జ్వాలుంపు సాపేక్ష దోషం (పెరుగుదల) x లోని సాపేక్ష దోషానికి (పెరుగుదల) n రెట్లు అని చూపండి

జా: A సంఖ్య B సంఖ్యకు దగ్గరగా ఉంటూ B కి సమానం కానట్లయితే A ను B కి ఉజ్జ్వాలుంపు సంఖ్య అంటారు.

$$\left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right) \Delta x = \frac{k n x^{n-1}}{k x^n} \Delta x = n \left(\frac{\Delta x}{x} = n \right)$$

$$= n (x \text{ లో సాపేక్ష దోషం (పెరుగుదల)})$$

కాబట్టి $y = kx^n$ లోని ఉజ్జ్వాలుంపు సాపేక్ష దోషం (పెరుగుదల) x లోని సాపేక్ష దోషానికి (పెరుగుదల) n రెట్లు.

9. ఒక చతురంపు భజం పెరుగుదల 2% అయితే దీని వైశాల్యంలో ఉజ్జ్వాయింపు పెరుగుదల శాతాన్ని కనుకోండి

జా: చతురంపు భజం x , వైశాల్యం A అనుకోండి. అప్పుడు $A = x^2$ వైశాల్యం A లో ఉజ్జ్వాయింపు దోష శాతం

$$= \left(\frac{dA}{dx} \right) \times 100 \times \Delta x (f = A \text{ తో } A \text{ సంఖ్య } B)$$

సంఖ్యకు దగ్గరగా ఉంటూ B కి సమానం కొనటల్లయితే A ను B కి ఉజ్జ్వాయింపు సంఖ్య అంటారు

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{y} \times 100 &\approx \left[\frac{f'(x)}{f(x)} \right] \times 100 \times \Delta x \\ &= \frac{100(2x)\Delta x}{x^2} = \frac{200\Delta x}{x} = 2(2) = 4 \\ (\because \text{ దత్తాంశం నుంచి } \frac{\Delta x}{x} \times 100 = 2) \end{aligned}$$