

అక్ష పరివర్తన

అతిస్యలు సమాధాన ప్రశ్నలు

1. అక్షాల సమాంతరపరీక్ష ద్వారా మూలబిందువును (4, -5) జ మారిస్తే కొత్త అక్షాల దృష్టి క్రింది బిందువుల నిరూపకాలు కనుకోండి

i) (0,3) ii) (-2,4)

సాధన. i) కొత్త మూలబిందువు (4,-5); $h = 4, k = -5$

పాత నిరూపకాలు (0, 3)

నిరూపకాక్షాలకు θ కోణం భ్రమణం చేయవలెను

$$\tan 2\theta = \frac{2h}{a-b}; x=0, y=3$$

$$x' = x - h = 0 - 4 = -4$$

$$y' = y - k = 3 + 5 = 8$$

మాతన నిరూపకాలు (-4,8)

ii) పాత నిరూపకాలు (-2,4)

$$x = -2, y = 4$$

$$x' = x - h = -2 - 4 = -6$$

$$y' = y - k = 4 + 5 = 9$$

మాతన నిరూపకాలు (-6,9)

iii) పాత నిరూపకాలు (4,-5)

$$x = 4, y = -5$$

$$x' = x - h = 4 - 4 = 0$$

$$y' = y - k = -5 + 5 = 0$$

మాతన నిరూపకాలు (0, 0)

2. అక్షాల సమాంతర పరివర్తన ద్వారా మూలబిందువు (2, 3) కు మారింది. P బిందువు నిరూపకాలు క్రింది విధంగా మారితే, మూల వ్యవస్థలో P నిరూపకాలు కనుకోండి.

i)(4,5) ii)(4,-3)

సాధన. i) మాతన నిరూపకాలు (4, 5)

$$x' = 4, y' = 5$$

$$x = x' + h = 4 + 2 = 6$$

$$y = y' + k = 5 + 3 = 8$$

పాత నిరూపకాలు

ii) నూతన నిరూపకాలు (-4, 3)

$$x' = -4, y' = 3$$

$$x = x' + h = -4 + 2 = -2$$

$$y = y' + k = 3 + 3 = 6$$

పాత నిరూపకాలు (-2, 6)

iii) నూతన నిరూపకాలు

$$x' = 0, y' = 0$$

$$x = x' + h = 0 + 2 = 2$$

$$y = y' + k = 0 + 3 = 3$$

పాత నిరూపకాలు (2, 3)

3. అక్షాల సమాంతర పరివర్తన ద్వారా బిందువు (3, 0) ను (2, -3) కు మార్చడానికి మూలబిందువును ఏ బిందువుకు మార్చాలో తెలపండి.

సాధన. $(x, y) = (3, 0)$

$$(x', y') = (2, -3)$$

మూల బిందువు (h, k) కు మార్చాలను

$$h = x - x' = 3 - 2 = 1$$

$$k = y - y' = 0 + 3 = 3$$

$$\therefore (h, k) = (1, 3)$$

4. $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$ సమీకరణంలో మొదటి తరగతి పదాలు లోపింపజేయడానికి మూల బిందువును ఏ బిందువుకు మార్చాలో కనుక్కొండి.

సాధన. దత్త సమీకరణము

$$4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$$

$$a = 4 \quad g = -4$$

$$b = 9 \quad f = 18$$

$$-\frac{g}{a} = \frac{4}{4} = 1, \quad -\frac{f}{b} = -\frac{18}{9} = -2$$

మూలబిందువు (1, -2) కు పరివర్తన జేయవలను.

5. $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$ సమికరణం లో మొదటి తరగతి పదాలు లోపింప చేయడానికి మూలబిందువును ఏ బిందువుకు మార్చలో కనుక్కొండి.

సాధన.

$$\text{సమికరణం } 4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$$

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \text{తో పోల్చగా}$$

$$a = 4, b = 9, g = -4, f = 18, c = 4$$

$$\text{మూతన బిందువు} = \left(\frac{-g}{a}, \frac{-f}{a} \right) = \left(\frac{-(-4)}{4}, \frac{-18}{4} \right) = (1, -2)$$

6. అక్షాల నమాంతర పరివర్తన ద్వారా మూలబిందువును (2,3) బిందువుకు మార్చి నప్పుడు, ఒకవక్తం రూపొంతరం చెందిన సమికరణం $x^2 + 3xy - 2y^2 + 17x - 7y - 11 = 0$ అయితే ఆ వక్తం యక్కి మూల సమికరణం కనుక్కొండి.

సాధన.

సాధన.

$$\text{మూల బిందువు} = (2,3) = (h,k)$$

పరివర్తనసమికరణాలు

$$X = x + h, y = Y + k \quad \& \quad X = x - h = x - 2, Y = y - k = y - 3$$

రూపొంతం సమికరణం

$$x^2 + 3xy - 2y^2 + 17x - 7y - 11 = 0$$

$$\text{మూల సమికరణం} (x-2)^2 + 3(x-2)(y-3) - 2(y-3)^2 + 17(x-2) - 7(y-3) - 11 = 0$$

$$x^2 + 4x + 4 + 3xy - 9x - 6y + 18 - 2y^2 + 12y - 18 + 17x - 34 - 7y + 21 - 11 = 0$$

$$\text{మూల సమికరణం} x^2 + 3xy - 2y^2 + 4x - y - 20 = 0$$

7. $x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y - 6 = 0$ సమికరణం లో xy పదం లోపింప చేయడానికి అక్షాలను ఏ కోణం తో భ్రమణ పరివర్తన చేయాలో కనుక్కొండి.

సాధన.

$$x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y - 6 = 0 \text{ ను } ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \text{ తో పోల్చగా}$$

$$a = 1, h = 2, b = 1, g = -1, f = 1, c = -6$$

' θ ' భ్రమణ కోణం అనుకోండి

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2h}{a-b} \right) = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{4}{1-1} \right) = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{4}{0} \right) = \frac{1}{2} \tan^{-1} (\infty) = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$$

8. 30° కోణంతో అక్షాలను భ్రమణం చేసినప్పుడు, క్రింది బిందువుల కొత్త నిరూపకాలను కనుక్కోండి
 i) $(0, 5)$ ii) $(-2, 4)$

సాధన. i) $\theta = 30^\circ$ అని ఇవ్వబడింది

పొత నిరూపకాలు $(0, 5)$

$$x = 0, y = 5$$

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$= 0 \cdot \cos 30^\circ + 5 \cdot \sin 30^\circ = \frac{5}{2}$$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

$$= -0 \cdot \sin 30^\circ + 5 \cos 30^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{పరివర్తన నిరూపకాలు } \left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2} \right)$$

ii) పొత నిరూపకాలు $(-2, 4)$

$$x = -2, y = 4$$

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$= (-2) \cdot \cos 30^\circ + 4 \cdot \sin 30^\circ$$

$$= -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} = -\sqrt{3} + 2$$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

$$= (-2) \cdot \sin 30^\circ + 4 \cdot \cos 30^\circ$$

$$= -2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 1 + 2\sqrt{3}$$

$$\therefore \text{పరివర్తన నిరూపకాలు } (-\sqrt{3} + 2, 1 + 2\sqrt{3})$$

9. 60° కోణంతో అక్కాలను భ్రమణం చేసినప్పుడు, మూల బిందువుల కొత్త నిరూపకాలను ఇవ్వడమైంది.

i) $(3, 4)$ ii) $(-7, 2)$ మూల వ్యవస్థలో ఈ బిందువుల నిరూపకాలు కనుక్కోండి సాధన.

$$i) \theta = 60^\circ \text{ అని ఇవ్వబడింది}$$

మూతన నిరూపకాలు $(3, 4)$

$$x' = 3, y' = 4$$

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$= 3 \cdot \cos 60^\circ - 4 \cdot \sin 60^\circ$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{2} - \frac{4\sqrt{3}}{2} = \frac{3-4\sqrt{3}}{2}$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

$$= 3 \sin 60^\circ + 4 \cos 60^\circ$$

$$= 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{4+3\sqrt{3}}{2}$$

$$P \text{ తొలి నిరూపకాలు } \left(\frac{3-4\sqrt{3}}{2}, \frac{4+3\sqrt{3}}{2} \right)$$

ii) మూతన నిరూపకాలు $(-7, 2)$

$$x' = 7, y' = 2$$

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$= (-7) \cos 60^\circ - 2 \sin 60^\circ$$

$$= -7 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-7-2\sqrt{3}}{2}$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

$$= -7 \sin 60^\circ + 2 \cos 60^\circ$$

$$= -7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2-7\sqrt{3}}{2}$$

$$Q \text{ తొలి నిరూపకాలు } \left(\frac{-7-2\sqrt{3}}{2}, \frac{2-7\sqrt{3}}{2} \right)$$

స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. అక్షాల సమాంతర పరివర్తన ద్వారా మూల బిందువును (-1, 2) కు మారిస్తే క్రింది సమీకరణాలను కనుకొండి.

i) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

సాధన. i) దత్త సమీకరణము

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$$

మూలబిందువు (-1, 2) కు మార్చివలెను

$$h = -1, k = 2$$

పరివర్తన సమీకరణాలు

$$x = x' + h, \quad y = y' + k$$

$$i.e., \quad x = x' - 1, \quad y = y' + 2$$

$$\text{రూపాంతర సమీకరణము} \quad (x' - 1)^2 + (y' + 2)^2$$

$$+ 2(x' - 1) - 4(y' + 2) + 1 = 0$$

$$(x')^2 + 1 - 2x' + (y')^2 + 4 + 4y'$$

$$+ 2x' - 2 - 4y' - 8 + 1 = 0$$

$$(x')^2 + (y')^2 - 4 = 0$$

2. అక్షాల సమాంతర పరివర్తన ద్వారా మూలబిందువును ఏ బిందువుకు మార్చింది, తద్వారా రూపాంతరం చెందిన సమీకరణము క్రింద ఇవ్వడమైంది. మూల సమీకరణాన్ని కనుకొండి

i) (-1, 2); $x^2 + 2y^2 + 16 = 0$

సాధన. i) మూల బిందువును $= (h, k) = (-1, 2)$ కు మార్చివలెను

$$x' = x - h, \quad y' = y - k$$

$$= x + 1 \quad = y - 2$$

$$x'^2 + 2y'^2 + 16 = 0 \quad \text{యొక్క మూల సమీకరణము}$$

$$(x + 1)^2 + 2(y - 2)^2 + 16 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 + 2y^2 - 8y + 8 + 16 = 0$$

$$x^2 + 2y^2 + 2x - 8y + 25 = 0$$

3. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ $h^2 \neq ab$ నీచికరణంలో మొదటి తరగతి పదాలు లోపించు చేయడానికి, మూల బిందువును అక్షాల సమాంతర పరివర్తన ద్వారా ఏ బిందువుకు మార్చాలో కనుక్కొండి

సాధన. సమాంతర అక్ష పరివర్తనలో మూల బిందువును (α, β) కు మార్చితే $x = x' + \alpha$,

$$y = y' + \beta$$

దత్త సమికరణములో ప్రతిక్షేపించగా

$$a(x' + \alpha)^2 + 2h(x' + \alpha)(y' + \beta) + b(y' + \beta)^2$$

$$+ 2g(x' + \alpha) + 2f(y' + \beta) + c = 0$$

ఇచ్చిన దాని ప్రకారం

$$ax'^2 + 2hx'y' + by'^2 + 2x'(a\alpha + h\beta + g)$$

$$+ 2y'(h\alpha + b\beta + f)$$

$$+ a\alpha^2 + 2h\alpha\beta + b\beta^2 + 2g\alpha + 2f\beta + c = 0 \dots (1)$$

(1) లో మొదటి తరగతి పదాలు లుఫ్తం కావలెను

$$a\alpha + h\beta + g = 0 \text{ మరియు } h\alpha + b\beta + f = 0$$

ఈ సమీకరణాలను α, β ల కొకు సాధించగా

$$\alpha = \frac{hf - bg}{ab - h^2}, \quad \beta = \frac{gh - af}{ab - h^2}$$

మూల బిందువును మార్చువలసిన బిందువు

$$\left(\frac{hf - bg}{ab - h^2}, \frac{gh - af}{ab - h^2} \right)$$

4. 135° కోణంలో అక్షాలను భ్రమణం చేసినప్పుడు P బిందువు $(4, -3)$ గా మారితే మూల వ్యవస్థ దృష్టిలో P నిరూపకాలు కనుక్కొండి

సాధన. ఇక్కడ $(x', y') = (4, -3)$; $\theta = 135^\circ$

(x, y) కు P యొక్క నిరూపకాలు

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$= 4 \cos 135^\circ - (-3) \sin 135^\circ$$

$$= 4 \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \right) + 3 \left(\frac{+1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{-4}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

$$= 4 \sin 135^\circ + (-3) \cos 135^\circ$$

$$= 4 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - 3 \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}$$

తొలి వ్యవస్థలో P నిరూపకాలు $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{2}} \right)$

5. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$, $a \neq b$ సమికరణం లో xy పదం లోపింప చేయడానికి
అళ్ళాలను $\frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2h}{a-b} \right)$ కోణం తో భ్రమణ పరివర్తన చేయాలని చూపుము
మరియు $a = b$ అయితే భ్రమణ కోణం $\frac{\pi}{4}$ అనిచూపుము

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$$

‘θ’ భ్రమణ కోణం అనుకోండి.

$$\text{ಅಪ್ಲಿಕೇಶನ್} \quad x = X \cos \theta - Y \sin \theta, \quad y = X \sin \theta + Y \cos \theta$$

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ యొక్క రూపాంతర సమికరణాను

$$a(X \cos \theta - Y \sin \theta)^2 + 2h(X \cos \theta - Y \sin \theta)(X \sin \theta + Y \cos \theta) + b(X \sin \theta + Y \cos \theta)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a(X^2 \cos^2 \theta + Y^2 \sin^2 \theta - 2XY \cos \theta \sin \theta) +$$

$$2h \left[X^2 \cos \theta \sin \theta + XY (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - Y^2 \sin \theta \cos \theta \right] +$$

$$b(X^2 \sin^2 \theta + Y^2 \cos^2 \theta + 2XY \cos \theta \sin \theta) = 0$$

పై సమికరణం క్రింది రూపం లో ఉంది.

$$AX^2 + 2XY \left[-a\cos\theta\sin\theta + h(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + b\cos\theta\sin\theta \right] + BY^2 = 0$$

$$\text{xy పదం } \cancel{\text{లోపించ చేయడానికి} \quad (b-a)\cos\theta\sin\theta + h(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0}$$

$$\Rightarrow 2h \cos 2\theta = 2(a-b) \sin \theta \cos \theta = (a-b) \sin 2\theta \dots \dots \dots \quad (1)$$

$$\Rightarrow \tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{2h}{a-b}$$

$$\Rightarrow \text{ప్రమణ సెఱా} \quad \theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2h}{a-b} \right).$$

$$a = b \text{ അയാൽ } .(1) \quad \text{നുംഡി}$$

$$\Rightarrow 2h \cos 2\theta = 0 \Rightarrow \cos 2\theta = 0$$

$$\Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

6. 45° కోణం తో అక్షాలను భ్రమణ పరివర్తన చేసినప్పుడు వక్ర సమికరణం $17x^2 - 16xy + 17y^2 = 225$. వక్రం యొక్క మూల సమికరణం కనుక్కోండి.

సాధన. భ్రమణకోణం $\theta = 45^\circ$.

(X, Y) లను (x, y) యొక్క క్రొత్త నిరూపకములు అనుకోండి.

$$X = x \cos \theta + y \sin \theta = x \cos 45 + y \sin 45 = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$$

$$Y = -x \sin \theta + y \cos \theta = -x \sin 45 + y \cos 45 = \frac{-x+y}{\sqrt{2}}$$

$$17X^2 - 16XY + 17Y^2 = 225 \text{ యొక్క మూల సమికరణం}$$

$$\therefore 17\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 - 16\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{-x+y}{\sqrt{2}}\right) + 17\left(\frac{-x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 225$$

$$17\frac{(x^2 + y^2 + 2xy)}{2} - 16\frac{(y^2 - x^2)}{2} + 17\frac{(x^2 + y^2 - 2xy)}{2} = 225$$

$$17x^2 + 17y^2 + 34xy - 16y^2 + 16x^2 + 17x^2 + 17y^2 - 34xy = 450$$

$$50x^2 + 18y^2 = 450$$

$$\text{మూల సమికరణం} \quad \therefore 25x^2 + 9y^2 = 225$$

7. α కోణం తో అక్షాలను భ్రమణ పరివర్తన చేసినప్పుడు $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ యొక్క రూపాంతర సమికరణం కనుక్కోండి.

సాధన. ఇచ్చిన సమికరణం $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$

$\therefore \alpha$ కోణం తో అక్షాలను భ్రమణ పరివర్తన చేసినప్పుడు

(x^1, y^1) లను (x, y) యొక్క క్రొత్త నిరూపకములు అనుకోండి.

$$x = x^1 \cos \alpha - y^1 \sin \alpha \text{ and } y = x^1 \sin \alpha + y^1 \cos \alpha$$

$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ యొక్క రూపాంతర సమికరణం

$$(x^1 \cos \alpha - y^1 \sin \alpha) \cos \alpha + (x^1 \sin \alpha + y^1 \cos \alpha) \sin \alpha = p$$

$$\Rightarrow x^1 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = p \Rightarrow x^1 = p$$

$$\text{రూపాంతర సమికరణం} \quad x = p$$

8. $\pi/6$ కోణం తో అక్షాలను భ్రమణ పరివర్తన చేసినప్పుడు $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 = 2a^2$ యొక్క రూపాంతర సమికరణం కనుక్కోండి.

సాధన. (X, Y) లను (x, y) యొక్క కొత్త నిరూపకములు అనుకోండి.
భ్రమణ కోణం $\pi/6$.

$$\theta = \frac{\pi}{6}, x = X \cos \alpha - Y \sin \alpha \Rightarrow ! X = X \cos \frac{\pi}{6} - Y \sin \frac{\pi}{6}, ! X \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - Y \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}X - Y}{2}$$

$$\text{And } y = X \sin \alpha + Y \cos \theta = X \cdot \sin \frac{\pi}{6} + Y \cos \frac{\pi}{6} = X \cdot \frac{1}{2} + Y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{X + \sqrt{3}Y}{2}$$

$$x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 = 2a^2 \quad \text{యొక్క రూపాంతర సమికరణం}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}X - Y}{2} \right)^2 + 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}X - Y}{2} \right) \left(\frac{X + \sqrt{3}Y}{2} \right) - \left(\frac{X + \sqrt{3}Y}{2} \right)^2 = 2a^2$$

$$\Rightarrow \frac{3X^2 - 2\sqrt{3}XY + Y^2}{4} + \frac{2\sqrt{3}[\sqrt{3}X^2 - XY + 3XY - \sqrt{3}Y^2]}{4} = \frac{X^2 + 3Y^2 + 2\sqrt{3}XY}{4} = 2a^2$$

$$3X^2 - 2\sqrt{3}XY + Y^2 + 2\sqrt{3}[\sqrt{3}X^2 + 2XY + \sqrt{3}Y^2] - (X^2 + 3Y^2 + \sqrt{3}XY) = 8a^2$$

$$\Rightarrow 3X^2 - 2\sqrt{3} + Y^2 + 6X^2 + 4\sqrt{3}XY - 6Y^2 - X^2 - 3Y^2 - 2\sqrt{3}XY = 8a^2$$

$$\Rightarrow 8X^2 - 8Y^2 = 8a^2 \Rightarrow X^2 - Y^2 = a^2$$

9. $\frac{\pi}{4}$ కోణం తో అక్షాలను భ్రమణ పరివర్తన చేసినప్పుడు $3x^2 + 10xy + 3y^2 = 9$ యొక్క రూపాంతర సమికరణం కనుక్కోండి.

సాధన. భ్రమణ కోణం $\theta = 45^\circ$.

(X, Y) లను (x, y) యొక్క కొత్త నిరూపకములు అనుకోండి.

$$x = X \cos \theta - Y \sin \theta = X \cos \frac{\pi}{4} - Y \sin \frac{\pi}{4} = \frac{X - Y}{\sqrt{2}}$$

$$y = X \sin \theta + Y \cos \theta = X \sin \frac{\pi}{4} + Y \cos \frac{\pi}{4} = \frac{X + Y}{\sqrt{2}}$$

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 = 9 \dots \text{యొక్క రూపాంతర సమికరణం}$$

$$3 \left(\frac{X - Y}{\sqrt{2}} \right)^2 + 10 \left(\frac{X - Y}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{X + Y}{\sqrt{2}} \right) + 3 \left(\frac{X + Y}{\sqrt{2}} \right)^2 - 9 = 0$$

$$3\frac{(X^2 - 2XY + Y^2)}{2} + 10\frac{(X^2 - Y^2)}{2} + 3\frac{(X^2 + 2XY + Y^2)}{2} - 9 = 0$$
$$3X^2 - 6XY + 3Y^2 + 10X^2 - 10Y^2 + 3X^2 + 6XY + 3Y^2 - 18 = 0$$
$$\Rightarrow 16X^2 - 4Y^2 - 18 = 0$$
$$\therefore 8X^2 - 2Y^2 = 9$$