

## బిందుపథం

### అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1.  $A(-3,2)$ ,  $B(0,4)$  బిందువుల నుంచి సమాన దూరంలో ఉండే బిందు పథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి

సాధన.  $A(-3,2)$ ,  $B(0,4)$  లు దత్త బిందువులు

$P(x,y)$  బిందుపథం మీది ఏదేని బిందువు

దత్త నియమము  $PA = PB$

$$PA^2 = PB^2$$

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = (x-0)^2 + (y-4)^2$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + y^2 - 8y + 16$$

$$6x + 4y = 3 \text{ బిందుపథ సమీకరణము}$$

2. మూల బిందువు నుంచి  $P$  దూరం,  $A(1,2)$  బిందువు నుంచి  $P$  దూరానికి రెట్టింపు అయితే బిందువు  $P$  పథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన.  $O(0,0)$ ,  $A(1,2)$  లు దత్త బిందువులు

$P(x,y)$  బిందుపథం మీది ఏదేని బిందువు.

దత్త నియమము  $OP = 2AP$

$$OP^2 = 4AP^2$$

$$x^2 + y^2 = 4[(x-1)^2 + (y-2)^2]$$

$$= 4(x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4)$$

$$x^2 + y^2 = 4x^2 + 4y^2 - 8x - 16y + 20$$

యొక్క బిందుపథ సమీకరణము

$$3x^2 + 3y^2 - 8x - 16y + 20 = 0$$

3. మూల బిందువు నుంచి  $P$  బిందువు దూరానికి వర్గం  $P$ -బిందువు  $Y$ -నిరూపకానికి నాలుగురెట్లుంటే బిందువు  $P$ -పథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి

సాధన.  $P(x,y)$  బిందుపథం మీది ఏదేని బిందువు

దత్త నియమము  $OP^2 = 4y \Rightarrow x^2 + y^2 = 4y$

$P$  బిందుపథ సమీకరణము  $x^2 + y^2 - 4y = 0$

4.  $A = (a, 0)$ ,  $B = (-a, 0)$ ,  $0 < |a| < |c|$ .  $PA^2 + PB^2 = 2C^2$  అయ్యేటట్లు బిందువు  $P$  వధ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి

సాధన.  $P(x, y)$  బిందుపథము మీది ఏదేని బిందువు

$$A = (a, 0)$$

$$B = (-a, 0)$$

దత్త నియమము

$$PA^2 + PB^2 = 2C^2$$

$$(x-a)^2 + (y-0)^2 + (x+a)^2 + (y-0)^2 = 2c^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 + x^2 + 2ax + a^2 + y^2 = 2c^2$$

$$2x^2 + 2y^2 = 2c^2 - 2a^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 = c^2 - a^2 \text{ బిందుపథ సమీకరణము}$$

### స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. బిందువు  $A(3, 0)$  నుంచి  $P$  బిందువు దూరం,  $B(-3, 0)$  బిందువు నుంచి  $P$  బిందువు దూరానికి రెట్టింపు అయితే  $P$  బిందుపథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన. బిందుపథం మీద  $P(x, y)$  ఒక బిందువనుకొందాం. అప్పుడు  $P$  తృప్తిపరిచే జ్యామితీయ నియమం

$$PA = 2PB$$

$$\text{అంటే } PA^2 = 4PB^2$$

$$\text{అంటే } (x-3)^2 + y^2 = 4[(x+3)^2 + y^2]$$

$$\text{అంటే } x^2 - 6x + 9 + y^2 = 4[x^2 + 6x + 9 + y^2]$$

$$\text{అంటే } 3x^2 + 3y^2 + 30x + 27 = 0$$

$$\text{అంటే } x^2 + y^2 + 10x + 9 = 0 \rightarrow (2)$$

సమీకరణం (2) ను  $Q(x_1, y_1)$  బిందువు తృప్తిపరుస్తుందనుకొందాం.

అప్పుడు

ఇప్పుడు

ను ఉపయోగిస్తే)

అందువల్ల అంటే బిందువు ని తృప్తిపరుస్తుంది

అందువల్ల కావలసిన బిందుపథ సమీకరణం

2.  $(4, 0)$ ,  $(0, 4)$  కర్ణాగ్రాలుగా గల లంబకోణ త్రిభుజం మూడో శీర్షం బిందుపథం కనుక్కోండి

సాధన.  $A = (4, 0)$ ,  $B = (0, 4)$  అనుకుందాం

$PA, PB$  లు లంబంగా ఉండేటట్లు  $P(x, y)$  ని తీసుకొందాం

$$\text{అప్పుడు } PA^2 + PB^2 = AB^2 \rightarrow (1)$$

$P, A, B$  లు సరేఖీయాలు కావు.

$$\text{అంటే } (x-4)^2 + y^2 + x^2 + (y-4)^2 = 16+16,$$

$$P \neq A, P \neq B$$

$$\text{లేదా } x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0,$$

$$(x, y) \neq (4, 0), (x, y) \neq (0, 4) \rightarrow (2)$$

$Q(x_1, y_1)$  బిందువు (2) ను తృప్తిపరుస్తుందని,  $Q$  బిందువు  $A, B$  లకు భిన్నమైందని అనుకొందాం

$$\text{అప్పుడు } x_1^2 + y_1^2 - 4x_1 - 4y_1 = 0,$$

$$(x_1, y_1) \neq (4, 0), (x_1, y_1) \neq (0, 4) \rightarrow (3)$$

$$\text{ఇప్పుడు } QA^2 + QB^2$$

$$= (x_1 - 4)^2 + y_1^2 + x_1^2 + (y_1 - 4)^2$$

$$= x_1^2 - 8x_1 + 16 + y_1^2 + x_1^2 + y_1^2 - 8y_1 + 16$$

$$= 2(x_1^2 + y_1^2 - 4x_1 - 4y_1) + 32$$

$$= 32 \text{ (3) ను ఉపయోగిస్తే)}$$

$$= AB^2$$

$$\text{అందువల్ల } QA^2 + QB^2 = AB^2, Q \neq A, Q \neq B$$

అంటే  $Q(x_1, y_1)$  బిందువు (1)ని తృప్తిపరుస్తుంది. అందువల్ల (2) కావలసిన బిందుపథం సమీకరణం, ఇది  $A, B$  లు మినహా,  $\overline{AB}$  ని వ్యాసంగా గల వృత్తాన్ని సూచిస్తుంది.

3.  $A(2, 3)$ ,  $B(-3, 4)$  లు దత్త బిందువులు. త్రిభుజం  $PAB$  వైశాల్యం, 8.5 ఉండేటట్లుగా  $P$  బిందుపథం సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన. బిందుపథం మీది ఒక బిందువును  $P(x, y)$  అనుకుందాం.  $P$  ని తృప్తిపరచే జ్యామితీయ నియమం

$$\Delta PAB \text{ వైశాల్యం } = 8.5 \rightarrow (1)$$

$$\text{అంటే } \frac{1}{2} |x(3-4) + 2(4-y) - 3(y-3)| = 8.5$$

$$\text{అంటే } |-x + 8 - 2y - 3y + 9| = 17$$

$$\text{అంటే } |-x - 5y + 17| = 17$$

$$\text{అంటే } -x-5y+17=17 \text{ లేదా}$$

$$-x-5y+17=-17$$

$$\text{అంటే } x+5y=0 \text{ లేదా } x+5y=34$$

$$\text{అందువల్ల } (x+5y)(x+5y-34)=0$$

అంటే

$$x^2+10xy+25y^2-34x-170y=0 \rightarrow (2)$$

$Q(x_1, y_1)$  బిందువు (2) ని తృప్తిపరుసుందనుకొందాం

$$\text{అప్పుడు } x_1+5y_1=0 \text{ లేదా}$$

$$x_1+5y_1=34 \rightarrow (3)$$

ఇప్పుడు  $\Delta QAB$  వైశాల్యం

$$= \frac{1}{2} |(x_1(3-4) + 2(4-y_1) - 3(y_1-3))|$$

$$= \frac{1}{2} |-x_1 + 8 - 2y_1 - 3y_1 + 9|$$

$$= \frac{1}{2} |-x_1 - 5y_1 + 17|$$

$$= \frac{17}{2} = 8.5 \text{ (3) ను ఉపయోగిస్తే)}$$

అంటే  $Q(x_1, y_1)$  బిందువు (1) ని తృప్తిపరుస్తుంది

అందువల్ల కావలసిన బిందుపథ సమీకరణం

$$(x+5y)(x+5y-34)=0 \text{ లేదా}$$

$$x^2+10xy+25y^2-34x-170y=0$$

4.  $(2, 3), (-1, 5)$  బిందువులను కలిపే రేఖాఖండం,  $P$  వద్ద లంబకోణం చేస్తే,  $P$  బిందుపథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన.  $A(2, 3), B(-1, 5)$  లు దత్త బిందువులు

$P(x, y)$  బిందుపథం మీది ఏదేని బిందువు

దత్త నియమము  $\angle APB = 90^\circ$

$$AP^2 + PB^2 = AB^2$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (x+1)^2 + (y-5)^2$$

$$= (2+1)^2 + (3-5)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 + x^2 + 2x + 1 + y^2$$

$$-10y + 25 = 9 + 4$$

$$2x^2 + 2y^2 - 2x - 16y + 26 = 0$$

$$P \text{ యొక్క బిందుపథం } x^2 + y^2 - x - 8y + 13 = 0$$

$$(x, y) \neq (2, 3) \text{ మరియు } (x, y) \neq (-1, 5)$$

5.  $(-5, 0), (5, 0)$  బిందువుల నుంచి దూరాల భేదం 8 గా గల బిందుపథం సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన.  $A(5, 0), B(-5, 0)$  లు దత్త బిందువులు

$P(x, y)$  బిందుపథం మీది ఏదేని బిందువు

$$\text{దత్త నియమము } |PA - PB| = 8$$

$$PA - PB = 8 \dots \dots \dots (1)$$

$$PA^2 - PB^2 = [(x-5)^2 + (y-0)^2]$$

$$-[(x+5)^2 + (y-0)^2]$$

$$= x^2 - 10x + 25 + y^2 - x^2 - 10x - 25 - y^2$$

$$= -20x$$

$$(PA + PB)(PA - PB) = -20x$$

$$(PA + PB)8 = -20x$$

$$PA + PB = -\frac{5}{2} \rightarrow (2)$$

(1), (2) లను కూడగా

$$2PA = \frac{5x}{2} + 8 = \frac{-5x + 16}{2}$$

$$4PA = -5x + 16$$

$$16PA^2 = (-5x + 16)^2$$

$$16[(x-5)^2 + y^2] = (-5x + 16)^2$$

$$16[x^2 - 10x + 25 + y^2] = [-5x + 16]^2$$

$$16x^2 + 16y^2 - 160x + 400$$

$$= 25x^2 + 256 - 160x$$

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

144 తో భాగించగా,  $P$  బిందుపథం

$$\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = 1$$

$$\text{కనుక } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

6.  $A = (4, 0)$ ,  $B = (-4, 0)$ ,  $|PA - PB| = 4$  అయితే  $P$  బిందుపథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి

సాధన.  $A = (4, 0)$ ,  $B = (-4, 0)$  లు దత్త బిందువులు

$P(x, y)$  బిందుపథం మీది ఏదేని బిందువు

దత్త నియమము  $|PA - PB| = 4 \rightarrow (1)$

$$PA^2 - PB^2 = [(x-4)^2 + (y-0)^2]$$

$$-[(x+4)^2 + y^2]$$

$$= x^2 - 8x + 16x + y^2 - x^2 - 8x - 16 - y^2$$

$$= -16x$$

$$(PA + PB)(PA - PB) = -16x$$

$$(PA + PB)4 = -16x$$

$$PA + PB = -4x \rightarrow (2)$$

(1), (2) లను కూడగా

$$2PA = 4 - 4x$$

$$PA = 2 - 2x$$

$$PA^2 = (2 - 2x)^2$$

$$(x-4)^2 + (y-0)^2 = (2-2x)^2$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 = 4 + 4x^2 - 8x$$

$$3x^2 - y^2 = 12$$

12 తో భాగించగా,  $P$  బిందుపథం  $\frac{3x^2}{12} - \frac{y^2}{12} = 1$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

7.  $(0, 2)$ ,  $(0, -2)$  బిందువుల నుంచి దూరాల మొత్తం 6 గా గల బిందుపథ సమీకరణాన్ని

కనుక్కోండి

సాధన.  $A(0, 2)$ ,  $B(0, -2)$  లు దత్త బిందువులు

$P(x, y)$  బిందుపథం మీది ఏదేని బిందువు

దత్త నియమము  $PA + PB = 6 \rightarrow (1)$

$$PA^2 - PB^2 = [(x-0)^2 + (y-2)^2]$$

$$-[(x-0)^2 + (y+2)^2]$$

$$= x^2 + y^2 - 4y + 4 - x^2 - y^2 - 4y - 4 = -8y$$

$$(PA + PB)(PA - PB) = -8y$$

$$6(PA - PB) = -8y$$

$$PA - PB = -\frac{8y}{6}$$

$$PA - PB = -\frac{4y}{3} \rightarrow (2)$$

$$(1), (2) \text{ అను కూడగా } 2PA = 6 - \frac{4y}{3}$$

$$PA = 3 - \frac{2y}{3}$$

$$PA^2 = \left(3 - \frac{2y}{3}\right)^2$$

$$x^2 + (y-2)^2 = \left(3 - \frac{2y}{3}\right)^2$$

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = 9 + \frac{4y^2}{9} - 4y$$

$$9x^2 + 9y^2 + 36 = 81 + 4y^2$$

$$9x^2 + 5y^2 = 45$$

$$P \text{ యొక్క బిందుపథము } \frac{9x^2}{45} + \frac{5y^2}{45} = 1$$

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

8.  $A = (2, 3), B(2, -3), PA + PB = 8$  అయితే  $P$  బిందుపథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి

సాధన.  $A = (2, 3), B(2, -3)$  లు దత్త బిందువులు

$P(x, y)$  బిందుపథము మీది ఏదేని బిందువు

దత్త నియమము  $PA + PB = 8 \rightarrow (1)$

$$A^2 - PB^2 = [(x-2)^2 + (y-3)^2]$$

$$-[(x-2)^2 + (y+3)^2]$$

$$= (x-2)^2 + (y-3)^2 - (x-2)^2 - (y+3)^2$$

$$= (y-3)^2 - (y+3)^2 = -12y$$

$$(PA + PB)(PA - PB) = -12y$$

$$8(PA - PB) = -12y$$

$$PA - PB = \frac{-12y}{8}$$

$$PA - PB = \frac{-3y}{2}$$

(1),(2) లను కూడగా

$$2PA = 8 - \frac{3y}{2} = \frac{16-3y}{2}$$

$$4PA = 16 - 3y$$

$$16PA^2 = (16-3y)^2$$

$$16[(x-2)^2 + (y-3)^2] = (16-3y)^2$$

$$16(x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9) = (16-3y)^2$$

$$16x^2 + 16y^2 - 64x - 96y + 208$$

$$= 256 + 9y^2 - 96y$$

$$16x^2 + 7y^2 - 64x - 48 = 0$$

$$P \text{ బిందుపథం } 16x^2 + 7y^2 - 64x - 48 = 0$$

9.  $A(5,3)$ ,  $B(3,-2)$  లు రెండు స్థిర బిందువులు. త్రిభుజం  $PAB$  వైశాల్యం 9గా ఉండేటట్లు  $P$  బిందుపథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన.  $A(5,3)$ ,  $B(3,-2)$  లు దత్త బిందువులు

$P(x, y)$  బిందుపథం మీది ఏదేని బిందువు

దత్త నియమము  $\Delta PAB = 9$

$$\frac{1}{2}|5(-2-y) + 3(y-3) + x(3+2)| = 9$$

$$|-10 - 5y + 3y - 9 + 5x| = 18$$

$$5x - 2y - 19 = \pm 18$$

$$5x - 2y - 19 = 18 \text{ లేదా } 5x - 2y - 19 = -18$$

$$5x - 2y - 37 = 0 \text{ లేదా } 5x - 2y - 1 = 0$$

$P$  యొక్క బిందుపథము

$$(5x - 2y - 37)(5x - 2y - 1) = 0$$

10.  $A(1,2)$ ,  $B(2,-3)$ ,  $C(-2,3)$  లు మూడు బిందువులు.  $PA^2 + PB^2 = 2PC^2$  అయ్యేటట్లు  $P$  చరిస్తుంది.  $P$  బిందుపథం సమీకరణం  $7x - 7y + 4 = 0$  అని చూపండి.

సాధన.  $P(x, y)$  బిందుపథం మీది ఏదేని బిందువు

$A = (1,2)$ ,  $B = (2,-3)$ ,  $C = (-2,3)$  లు దత్త బిందువులు.

దత్త నియమము  $PA^2 + PB^2 = 2PC^2$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (x-2)^2 + (y+3)^2$$

$$= 2[(x+2)^2 + (y-3)^2]$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 6x + 2y + 18$$



$$= 2x^2 + 2y^2 + 8x - 12y + 26$$

$$\Rightarrow 14x - 14y + 8 = 0$$

$$\therefore 7x - 7y + 4 = 0 \text{ బిందుపథ సమీకరణం}$$

11. (4, 0), (0, 4). లు కర్ణాగ్రాలు గా గ లంబ కోణ త్రిభుజ మూడో శీర్షం బిందు పథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన. A(4, 0), B(0, 4)

P(x, y) బిందు పథం పై ఏదేని బిందువు అనుకోండి.

PA, PB లు లంబంగా ఉన్నాయి

$$PA^2 + PB^2 = AB^2$$

$$(x-4)^2 + y^2 + x^2 + (y-4)^2 = (4-0)^2 + (0-4)^2$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + x^2 + y^2 - 8y + 16 = 16 + 16$$

$$2x^2 + 2y^2 - 8x - 8y = 0$$

$$P(x, y) \text{ బిందు పథం } x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$$

12. (2, 3), (2, -3) బిందు వు లనుంచి P. దూరం 2 : 3 నిష్పత్తి లో ఉంటే బిందు పథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన.

P(x, y) బిందు పథం పై ఏదేని బిందువు అనుకోండి.

$$A(2, 3), B(2, -3)$$

$$PA : PB = 2 : 3$$

$$\Rightarrow 3PA = 2PB$$

$$\Rightarrow 9PA^2 = 4PB^2$$

$$\Rightarrow 9[(x-2)^2 + (y-3)^2] = 4[(x-2)^2 + (y+3)^2]$$

$$\Rightarrow 9[x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9]$$

$$= 4[x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9]$$

$$\therefore P(x, y) \text{ బిందు పథం } 5x^2 + 5y^2 - 20x - 78y + 65 = 0 .$$

13.  $(2, 3), (-1, 5)$  బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండం P వద్ద లంబకోణం చేస్తే బిందు పథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి

Sol.  $A(2, 3), B(-1, 5)$ .

$P(x, y), A(2, 3), B(-1, 5)$

$P(x, y)$  బిందు పథం పై ఏదేని బిందువు అనుకోండి

$$\therefore \angle APB = 90^\circ$$

$$\Rightarrow (\overline{AP} \text{ వాలు}) (\overline{BP} \text{ వాలు}) = -1$$

$$\Rightarrow \frac{y-3}{x-2} \cdot \frac{y-5}{x+1} = -1$$

$$(y-3)(y-5) + (x-2)(x+1) = 0$$

$$x^2 + y^2 - x - 8y + 13 = 0$$

$$\therefore P(x, y) \text{ బిందు పథం } x^2 + y^2 - x - 8y + 13 = 0$$

www.sakshieducation.com