

## తెలుగు సమీకరణాల

### అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. కింది సమీకరణాలకు ప్రథాన సాధనలు కనుక్కోండి?

i)  $2\cos^2 \theta = 1$ .

సాధన.

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 45^\circ, 135^\circ$$

ii)  $\sqrt{3} \sec \theta + 2 = 0$

సాధన.

$$\sec \theta = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = 150^\circ$$

2. కింది సమీకరణాలను సాధించండి?

i)  $\cos 2\theta = \frac{\sqrt{5}+1}{4}, \theta \in [0, 2\pi]$

సాధన.

$$\cos 2\theta = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$\Rightarrow \cos 2\theta = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \cos 36^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

మరియు  $\frac{\pi}{5} \in [0, 2\pi]$

$$\therefore 2\theta = \frac{\pi}{5} \Rightarrow \text{ప్రథాన సాధన } \theta = \frac{\pi}{10},$$

$$\text{సార్యోత్తమిక సాధన } 2\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{10} [0, 2\pi] \text{ అంతరంలో}$$

$$\theta = \left\{ \frac{\pi}{10}, \frac{9\pi}{10}, \frac{11\pi}{10}, \frac{19\pi}{10} \right\}$$

**ii)**  $\tan^2 \theta = 1, \theta \in [-\pi, +\pi].$

సాధన.

$$\tan^2 \theta = 1$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \pm 1 = \tan \left( \pm \frac{\pi}{4} \right) \text{ ప్రధాన సాధన } \theta = \pm \frac{\pi}{4}$$

$$\text{సార్యోత్తమిక సాధన } n\pi \pm \frac{\pi}{4} n \in \mathbb{Z}$$

$$n = 1, 0, -1$$

$$\left\{ \frac{-3\pi}{4}, \frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\} [-\pi, +\pi] \text{ అంతరంలో$$

$$\theta = \left\{ \frac{-3\pi}{4}, \frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$$

**iii)**  $\sin 3\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \theta \in [-\pi, +\pi].$

సాధన.

$$\sin 3\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\text{మరియు } \frac{\pi}{3} \in [-\pi, \pi]$$

$$\therefore 3\theta = \frac{\pi}{3} \text{ ప్రధాన సాధన}$$

$$\text{సార్యోత్తమిక సాధన } 3\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{n\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{9}, n \in \mathbb{Z} [-\pi, \pi] \text{ అంతరంలో}$$

$$\theta = \left\{ \frac{-5\pi}{9}, \frac{-4\pi}{9}, \frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}, \frac{8\pi}{9} \right\}$$

**iv)**  $2\sin^2 \theta - \sin \theta, \theta \in (0, \pi).$

సాధన.

$$2\sin^2 \theta - \sin \theta = 0$$

$$\sin \theta (2\sin \theta - 1) = 0$$

$$\sin \theta = 0 \text{ మరియు } \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta \in (0, \pi)$$

$$\therefore \theta = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$$

**3.** కింది సమీకరణాలకు సార్యాత్మిక సాధనాలకు కనుక్కోండి?

i)  $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \theta = -\frac{1}{2}$

సాధన.  $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \theta = -\frac{1}{2}$

$$\therefore \sin \theta + ve, \cos \theta - ve$$

$$\Rightarrow \theta \text{ రెండో పాదంలో ఉంటుంది}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\cos \theta = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

సార్యాత్మిక సాధన

$$\Rightarrow \theta = 2n\pi + \frac{2\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

ii)  $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \sec x = \frac{2}{\sqrt{3}}$

సాధన.  $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \sec x = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow x, \text{ నాల్గవ పాదంలో ఉంటుంది.}$$

$$\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sec x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sec\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

సార్యాత్మిక సాధన  $\therefore \theta = 2n\pi + \left(-\frac{\pi}{6}\right), n \in \mathbb{Z}$

iii)  $\csc \theta = -2, \cot \theta = -\sqrt{3}$ .

సాధన.  $\csc \theta = -2, \cot \theta = -\sqrt{3}$

$\Rightarrow \theta$  నాల్గవ పాదలో ఉంటుంది.

$$\csc \theta = -2$$

$$\Rightarrow \sin \theta = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\cot \theta = -\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

సార్యోత్తమిక సాధన

$$\therefore \theta = 2n\pi + \left(-\frac{\pi}{6}\right), n \in Z$$

4. i)  $\sin(270^\circ - x) = \cos 292^\circ$  అయితే  $(0^\circ, 360^\circ)$ లోని

$x$  విలువను కనుక్కొండి.

సాధన.  $\sin(270^\circ - x) = \cos(292^\circ)$

$$\Rightarrow -\cos x = \cos(180^\circ + 112^\circ)$$

$$-\cos x = -\cos 112^\circ$$

$$\cos x = \cos 112^\circ$$

$$\therefore x = 112^\circ \text{ or } x = 360^\circ - 112^\circ$$

$$= 248^\circ$$

ii)  $x < 90^\circ, \sin(x + 28^\circ) = \cos(3x - 78^\circ)$  అయితే  $x$  విలువను కనుక్కొండి.

సాధన.  $x < 90^\circ, \sin(x + 28^\circ) = \cos(3x - 78^\circ)$

$$= \sin(90^\circ - 3x + 78^\circ)$$

$$= \sin(168^\circ - 3x)$$

$$x + 28 = 168^\circ - 3x + 28^\circ (180^\circ) \text{ or}$$

$$= 180^\circ - (168^\circ - 3x) + 3x (180^\circ)$$

$$\Leftrightarrow \exists n \in Z \text{ అయిన}$$

$$4x = 140^\circ + 2x (180^\circ)$$

$$2x = 16^\circ - 2x (180^\circ)$$

$$\Leftrightarrow \exists n \in Z \text{ అయిన}$$

$$x = 35^\circ + x (90^\circ) \text{ or } x = 8^\circ - x (180^\circ)$$

$x = 8^\circ$  మరియు  $x = 35^\circ$  విలువలు  $(0, 90^\circ)$  మధ్య ఉండి ఇచ్చన సమికరణాన్ని సంతృప్తిపరుస్తుంది.

5. కింది సమికరణాలకు సార్యాత్మిక సాధనాలను రాయండి.

i)  $2\sin^2 \theta = 3\cos \theta$

సాధన.  $2\sin^2 \theta = 3\cos \theta$

$$\Rightarrow 2\cos^2 \theta + 3\cos \theta - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 \theta + 4\cos \theta - \cos \theta - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos \theta (\cos \theta + 2) - 1(\cos \theta + 2) = 0$$

$$\Rightarrow (2\cos \theta - 1)(\cos \theta + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \text{ (or) } \cos \theta = -2$$

$\therefore \cos \theta \in [-1, 1]$

$\cos \theta = -2$  అసాధ్యం

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \text{ప్రథాన సాధన } \theta = \frac{\pi}{3}$$

సార్యాత్మిక సాధన  $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$

ii)  $\sin^2 \theta - \cos \theta = \frac{1}{4}$

సాధన.  $\sin^2 \theta - \cos \theta = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow 4(1 - \cos^2 \theta) - 4\cos \theta = 1$$

$$\Rightarrow 4\cos^2 \theta + 4\cos \theta - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 4\cos^2 \theta + 6\cos \theta - 2\cos \theta - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos \theta (2\cos \theta + 3) - (2\cos \theta + 3) = 0$$

$$\Rightarrow (2\cos \theta - 1)(2\cos \theta + 3) = 0$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{2} \text{ (or) } \cos \theta = -\frac{3}{2}$$

$\therefore \cos \theta \in [-1, 1]$

$$\cos \theta = -\frac{3}{2} \text{ అసాధ్యం}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{2} = \cos \left( \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\text{ప్రధాన సాధన } \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{సార్యోత్తమిక సాధన } \theta = 2n \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

**iii)**  $5\cos^2 \theta + 7\sin^2 \theta = 6$

సాధన.

$$5\cos^2 \theta + 7\sin^2 \theta = 6$$

$\cos^2 \theta$  చే భాగిస్తే,

$$\Rightarrow 5 + 7\tan^2 \theta = 6\sec^2 \theta$$

$$\Rightarrow 5 + 7\tan^2 \theta = 6\sec^2 \theta$$

$$\Rightarrow 5 + 7\tan^2 \theta = 6(1 + \tan^2 \theta)$$

$$\Rightarrow \tan^2 \theta = 1$$

$$\Rightarrow \tan^2 \theta = \pm 1$$

$$\therefore \text{సార్యోత్తమిక సాధన } \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$$

**iv)**  $3\sin^4 x + \cos^4 x = 1$

సాధన.  $3\sin^4 x + \cos^4 x = 1$

$$\Rightarrow 3\sin^4 x + (\cos^2 x)^2 = 1$$

$$\Rightarrow 3\sin^4 x + (\cos^2 x)^2 = 1$$

$$\Rightarrow 3\sin^4 x + 1 + \sin^4 x - 2\sin^2 x = 1$$

$$\Rightarrow 4\sin^4 x - 2\sin^2 x = 0$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 x(2\sin^2 x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = 0 \text{ (or)} \quad \sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin x = 0$$

$$\text{సార్యోత్తమిక సాధన } x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{అయిన}$$

$$\text{సార్యోత్తమిక సాధన } x = n\pi \pm \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$$

$\therefore$  సార్యోత్తమిక సాధనలు

$$x = n\pi \quad (\text{or}) \quad n\pi \pm \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$$

6.  $\sin 2\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$  ని సాదించండి.

సాధన.  $\sin 2\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \sin 18^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$

$$\frac{\pi}{10} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{కనుక}$$

ప్రదాన సాధన

$$2\theta = \frac{\pi}{10}, \theta = \frac{\pi}{20}$$

సార్యాత్మిక సాధన

$$2\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{10}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\theta = n\frac{\pi}{2}(-1)^n \frac{\pi}{20}, n \in \mathbb{Z}$$

7.  $\tan^2 \theta = 3$  ను సాదించండి.

సాధన.

$$\tan^2 \theta = 3 \Rightarrow \tan \theta = \pm \sqrt{3} = \tan\left(\pm \frac{\pi}{3}\right), \pm \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore \text{ప్రదాన సాధనలు } \theta = \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\text{సార్యాత్మిక సాధన } n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

8. ఒక లఘుకోణం,  $\sin(x+10^\circ) = \cos(3x - 68^\circ)$  అయితే  $x$  విలువ కనుకొండి.

సాధన.

$$\sin(x+10^\circ) = \cos(3x - 68^\circ)$$

$$\Leftrightarrow \sin(x+10^\circ) = \sin(90^\circ + 3x - 68^\circ) = \sin(22^\circ + 3x)$$

$$\therefore x+10^\circ = n(180^\circ) + (-1)^n(22^\circ + 3x)$$

$$n = 2k, k \in \mathbb{Z} \text{ అయితే}$$

$$x+10^\circ = (2k)(180^\circ) + (22^\circ + 3x)$$

$$\Rightarrow 2x = -k(360^\circ) - 12^\circ$$

$$\Rightarrow x = \frac{-k(360^\circ) - 12^\circ}{2}$$

$$= -k(180^\circ) - 6^\circ$$

ఇది అసంభవం ఎందుకంటే ఏ పూర్తాకం  $k$  తీసుకున్నా,  $x$  అల్గోరియం కాదు

$$n = 2k+1, \text{ అయితే}$$

$$x + 10^\circ = (2k+1)180^\circ - (22^\circ + 3x)$$

$$\Rightarrow 4x = (2k+1)180^\circ - 32^\circ$$

$$\Rightarrow x = (2k+1)45^\circ - 8^\circ$$

$$k = 0 \Rightarrow x = 37^\circ$$

$k$  కి ఇతరపూర్తాంకాలు ఇచ్చినపుడు

$$\therefore x = 37^\circ \text{ మాత్రమే దత్త సమీకరణానికి}$$

9.  $\cos 3\theta = \sin 2\theta$  ను సాదించండి.

$$\text{సాధన. } \cos 3\theta = \sin 2\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)$$

$$\Rightarrow 3\theta = 2n\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right), n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 3\theta = 2n\pi + \left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) \text{ (లేదా)}$$

$$3\theta = 2n\pi - \left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)$$

$$\Rightarrow 5\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \text{ (లేదా)} \theta = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = (4n+1)\frac{\pi}{10}, n \in \mathbb{Z} \text{ (లేదా)}$$

$$\theta = (4n-1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

10.  $7\sin^2 \theta + 3\cos^2 \theta = 4$  ను సాదించండి.

$$\text{సాధన. } 7\sin^2 \theta + 3\cos^2 \theta = 4$$

$$\Rightarrow 7\sin^2 \theta + 3(1 - \sin^2 \theta) = 4$$

$$\Rightarrow 4\sin^2 \theta = 1$$

$$\therefore \text{ప్రదాన సాధనలు } \theta = \pm \frac{1}{2}$$

సార్యోతిక సాధన

$$\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$$

## స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

**i)** ఈ కింది సమీకరణాలను సాధించి సార్యోత్తమ సాధనలను రాయండి.

$$2\sin^2 \theta - 4 = 5\cos \theta$$

$$\text{సాధన. } 2(1 - \cos^2 \theta) - 4 = 5\cos \theta$$

$$2 - 2\cos^2 \theta - 4 = 5\cos \theta$$

$$2\cos^2 \theta + 5\cos \theta + 2 = 0$$

$$2\cos^2 \theta + 4\cos \theta + \cos \theta + 2 = 0$$

$$2\cos \theta (\cos \theta + 2) + 1(\cos \theta + 2) = 0$$

$$(\cos \theta + 2)(2\cos \theta + 1) = 0$$

$$\cos \theta = -2 \text{ (or)} \quad \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

$\cos \theta = -2$  సాధ్యపడదు

$$\therefore \cos \theta = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore \text{సార్యోత్తమ సాధన } \theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

**ii)**  $2 + \sqrt{3} \sec x - 4\cos x = 2\sqrt{3}$

$$\text{సాధన. } 2 + \frac{\sqrt{3}}{\cos x} - 4\cos x = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{2\cos x + \sqrt{3} - 4\cos^2 x}{\cos x} = 2\sqrt{3}$$

$$2\cos x + \sqrt{3} - 4\cos^2 x = 2\sqrt{3}\cos x$$

$$4\cos^2 x + 2\sqrt{3}\cos x - 2\cos x - \sqrt{3} = 0$$

$$2\cos x (2\cos x + \sqrt{3}) - 1(2\cos x + \sqrt{3}) = 0$$

$$(2\cos x - 1)(2\cos x + \sqrt{3}) = 0$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \text{ (or)} \quad \cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{if } \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ప్రధాన సాధన } x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

ప్రథాన సాధన  $x = 2n\pi \pm \frac{5\pi}{3}$ ,  $n \in Z$

$$\text{if } \cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{5\pi}{3}$$

**iii)**  $2\cos^2 \theta + 11\sin \theta = 7$

సాధన.

$$2(1 - \sin^2 \theta) + 11\sin \theta = 7$$

$$2\sin^2 \theta - 11\sin \theta + 5 = 0$$

$$2\sin^2 \theta - 10\sin \theta - \sin \theta + 5 = 0$$

$$2\sin \theta (\sin \theta - 5) - 1(\sin \theta - 5) = 0$$

$$(\sin \theta - 5) - 1(\sin \theta - 5) = 0$$

$$\sin \theta = 5 \text{ or } \sin \theta = 1/2$$

if  $\sin \theta = 5$  సాధ్యపడదు.

$$\therefore \sin \theta = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \text{సార్వత్రిక సాధన } \theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}, n \in Z$$

**iv)**  $6\tan^2 x - 2\cos^2 x = \cos 2x$

సాధన.

$$6\tan^2 x - 2\cos^2 x = \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 6(\sec^2 x - 1) - 2\cos^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\Rightarrow 6\sec^2 x - 6 - 4\cos^2 x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 6\sec^2 x - 4\cos^2 x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 6\sec^2 x - 6 - 4\cos^2 x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 6\sec^2 x - 4\cos^2 x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{6}{\cos^2 x} - 4\cos^2 x - 5\cos^2 x = 0$$

$$\Rightarrow 6 - 4\cos^4 x - 5\cos^2 x = 0$$

$$\Rightarrow 4\cos^4 x + 5\cos^2 x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow 4\cos^4 x + 8\cos^2 x - 3\cos^2 x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow 4\cos^4 x (\cos^2 x + 2) - 3(\cos^2 x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow (4\cos^2 x - 3)(\cos^2 x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow 4\cos^2 x = 3, \quad \because \cos^2 x \neq -2$$

సార్వత్రిక సాధన

$$\Rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n \in Z$$

**v)**  $1 + \sin 2x = (\sin 3x - \cos 3x)^2$

ಸಾಧನ.  $1 + \sin 2x = (\sin 3x - \cos 3x)^2$

$$\Rightarrow 1 + \sin 2x = \sin^2 3x + \cos^2 3x - 2 \sin 3x \cos 3x$$

$$\Rightarrow 1 + \sin 2x = 1 - \sin(2x) \cos 3x$$

$$\Rightarrow \sin 6x + \sin 2x = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin\left(\frac{6x+2x}{2}\right) \cos\left(\frac{6x-2x}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sin(4x) \cdot \cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow \cos 2x = 0 \text{ (or)} \quad \sin 4x = 0$$

$$\cos 2x = 0 = \cos \frac{\pi}{2}$$

ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ  $(2x) = \frac{\pi}{2}$

ಸಾರ್ಯಾತ್ಮಕ ಸಾಧನ

$$2x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in Z$$

$$x = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, n \in Z$$

$$\sin 4x = 0 = \sin(n\pi), n \in Z$$

ಸಾರ್ಯಾತ್ಮಕ ಸಾಧನ  $4x = n\pi, n \in Z$

$$\Rightarrow x = \frac{n\pi}{4}, n \in Z$$

ಸಾರ್ಯಾತ್ಮಕ ಸಾಧನ

$$\therefore x = \frac{n\pi}{4}; \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, n \in Z$$

vii)  $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$

సాధన.

$$\begin{aligned}2\sin^2 x + \sin^2(2x) &= 2 \\ \Rightarrow 2\sin^2 x + (2\sin x \cos x)^2 - 2 &= 0 \\ \Rightarrow \sin^2 x + 2\sin^2 x \cos^2 x - 1 &= 0 \\ \Rightarrow 2\sin^2 x \cos^2 x - (1 - \sin^2 x) &= 0 \\ \Rightarrow 2\sin^2 x \cos^2 x - \cos^2 x &= 0 \\ \Rightarrow \cos^2 x(2\sin^2 x - 1) &= 0 \\ \Rightarrow \cos x = 0 \quad (\text{or}) \quad \sin^2 x &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\cos x = 0 = \cos \frac{\pi}{2}$$

ప్రథమ సాధన

$$\begin{aligned}\Rightarrow x &= \frac{\pi}{2} \\ \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{2} &= n\pi, n \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow x &= (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

సార్యోతిక సాధన

$$x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(\pm \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{ప్రథమ సాధన } x = \pm \frac{\pi}{4}$$

$$\text{సార్యోతిక సాధన} \quad x = n\pi \pm \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$$

$\therefore$  సార్యోతిక సాధనలు

$$\left[ \left\{ (2n+1) \frac{\pi}{2} \right\}, \left\{ n\pi \pm \frac{\pi}{4} \right\} n \in Z \right]$$

2. కింది సమీకరణాలను సాధించండి.

i)  $\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2}$

సాధన.

$$\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2}$$

ఇట్లు వైపులా  $\sqrt{3+1} = 2$  చే భాగిస్తే

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{6} \sin \theta - \sin \frac{\pi}{6} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \left[ \theta - \frac{\pi}{6} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin = \frac{\pi}{4}$$

సార్యాత్మిక సాధన

$$\theta - \frac{\pi}{6} = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$$

$$\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}, n \in Z$$

ii)  $\cot x + \cos ec = \sqrt{3}$

సాధన.  $\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\sin x} = \sqrt{3}$

$$\sqrt{3} \sin x - \cos x = 1$$

ఇట్లు వైపులా  $\sqrt{3+1} = 2$  చే భాగిస్తే

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{6} \sin x - \sin \frac{\pi}{6} \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x \left[ x - \frac{1}{2} \right] = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$x - \frac{\pi}{6} n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$$

$$x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}, n \in Z$$

iii)  $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$

సాధన.  $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$

జరువైపులా  $\sqrt{1+3} = 2$  చే భాగిస్తూ

$$\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin x + \cos \frac{\pi}{6} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos \left( x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \left( \frac{\pi}{4} \right)$$

$\therefore$  ప్రథమ సాధన

$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} \quad (\text{or}) \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$$

సార్యోత్తమిక సాధన

$$x - \frac{\pi}{6} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

$$x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2n\pi + \frac{5\pi}{12}$$

$$(\text{or}) x = 2n\pi - \frac{\pi}{12}, n \in \mathbb{Z}$$

3.కింది సమీకరణాలను సాధించండి.

i)  $\cos 3x + \cos 2x = \sin \frac{3x}{2} + \sin \frac{x}{2}, 0 \leq x \leq 2x$

సాధన.  $\cos 3x + \cos 2x = \sin \frac{3x}{2} + \sin \frac{x}{2}$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \cos \left( \frac{3x+2x}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{3x-2x}{2} \right)$$

$$= 2 \sin \left( \frac{\frac{3x}{2} + \frac{x}{2}}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\frac{3x}{2} - \frac{x}{2}}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \cos \left( \frac{5x}{2} \right) \cdot \cos \frac{x}{2} = 2 \cdot \sin(x) \cos \frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} \left[ \cos \left( \frac{5x}{2} \right) - \sin x \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} = 0 \quad (\text{or}) \quad \cos \frac{5x}{2} - \sin x = 0$$

సందర్భం i):  $\cos \frac{x}{2} = 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$

ప్రథమ సాధన  $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \pi$

సార్యాతీక సాధన

$$\frac{x}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in Z$$

$$\Rightarrow (\text{or}) \quad x = (2n+1)\pi, n \in Z$$

$$n=0 \quad \text{సాధనమే}$$

$\{\pi\}$  మాత్రమే  $[0, \pi]$  అంతరంలో ఉంటుంది.

సందర్భం ii):  $\cos \frac{5x}{2} - \sin x = 0$

$$\cos \frac{5x}{2} = \sin x$$

$$\cos \frac{5x}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2} - x$$

$$\Leftrightarrow \frac{7x}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{7}$$

$$\frac{5x}{2} = 2n\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

i.e.,  $\frac{5x}{2} = 2n\pi + \frac{\pi}{2} - x$  (or)  $\frac{5x}{2} = 2n\pi - \frac{\pi}{2} + x$

$$\Leftrightarrow \frac{7x}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \quad (\text{or}) \quad \frac{3x}{2} = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = (4n+1)\frac{\pi}{2} \times \frac{2}{7} \quad (\text{or}) \quad \frac{3x}{2} = (4n-1)\frac{\pi}{2}$$

$$x = (4n+1)\frac{\pi}{7} \quad (\text{or}) \quad x = (4n-1)\frac{\pi}{2} \times \frac{2}{3}$$

$$x = (4n+1)\frac{\pi}{7} \quad (\text{or}) \quad x = (4n-1)\frac{\pi}{3}$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \text{ or } \frac{\pi}{7}$$

$$\left\{ \frac{\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}, \frac{9\pi}{77}, \frac{13\pi}{7} \right\} \text{ (or) } \{\pi\}$$

$\therefore [0, 2\pi]$  அளவுள்ளது

$$x = \left\{ \frac{\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}, \pi, \frac{9\pi}{7}, \frac{13\pi}{7} \right\}$$

$$\text{ii)} \cot^2 x - (\sqrt{3} + 1) \cot x + \sqrt{3} = 0, \left( 0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{சாதன. } \cot^2 x - (\sqrt{3} + 1) \cot x + \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cot^2 x - \sqrt{3} \cot x - \cot x + \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cot x (\cot x - \sqrt{3}) - 1 (\cot x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cot x = \sqrt{3} \text{ (or) } \cot x = 1$$

வாய்ப்பு (i):

$$\cot x = 1$$

$$\Rightarrow \tan x = 1$$

$$\therefore x = \left\{ \frac{\pi}{4} \right\}$$

வாய்ப்பு ii):

$$\cot x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x = \left\{ \frac{\pi}{6} \right\}$$

$$\therefore \text{சாதனம் } \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right\} \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{iii)} \sec x \cos 5x + 1 = 0; 0 < x < 2\pi$$

சாதன.

$$\sec x \cos 5x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 5x}{\cos x} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 5x + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos \left( \frac{5x+x}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{5x-x}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(3x) = 0 \text{ (or) } \cos 2x = 0$$

### సందర్భం (i):

$$\cos 3x = 0$$

$$\cos 3x = 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{6}$$

$$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \text{ రాట్లు}$$

$$\left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$$

ఇచ్చట  $\frac{\pi}{2}, \frac{9\pi}{6}$ . (i.e.,)  $\frac{3\pi}{2}$  లకు  $\sec x$  నిర్వచితం కాదు.

$$x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{సాధనము} \quad \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$$

### సందర్భం (ii): $\cos 2x = 0 = \cos \frac{\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow 2x = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{4}$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \text{ రాట్లు}$$

$$n = 0, 1, 2, 3 \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$$

$$\therefore (0, 2\pi) \text{ అంతరంలో సాధనము}$$

$$\left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{4} \right\}$$

4) i)  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$  మరియు సాధించండి.

సాధన.

$$(\sin 3x + \sin x) + \sin 2x = (\cos 3x + \cos x) + \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \sin\left(\frac{3x+x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3x-x}{2}\right) + \sin 2x$$

$$= 2 \cos\left(\frac{3x+x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3x-x}{2}\right) + \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos x + \sin 2x$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \cdot \cos 2x \cdot \cos x + \cos 2x \\
&\Leftrightarrow 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos x + \sin x \\
&= 2 \cdot \cos 2x \cdot \cos x + \cos 2x \\
&\Leftrightarrow \sin 2x(2 \cos x + 1) = \cos 2x(2 \cos x + 1) \\
&\Leftrightarrow (2 \cos x + 1)(\sin 2x - \cos 2x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \text{ (or)} \quad \sin 2x = \cos 2x \\
&\quad (i.e.,) \tan(2x) = 1
\end{aligned}$$

**పందర్పం (i) :**

$$\cos x = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\text{ప్రధాన సాధన } x = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{సార్యోత్తమిక సాధన } x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

**పందర్పం (ii) :**

$$\tan 2x = 1 = \tan \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \text{ప్రధాన సాధన} \quad 2x = \frac{\pi}{4} \quad (i.e.,) x = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{సార్యోత్తమిక సాధన} \quad 2x = n\pi + \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, n \in \mathbb{Z}$$

$$2x = n\pi + \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\left[ \left\{ 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3} \right\}, \left\{ \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \right\} / n \in \mathbb{Z} \right]$$

**ii)  $\cos 3x - \cos 4x = \cos 5x - \cos 6x$  ను సాధించండి.**

$$\text{సాధన. } -2 \sin 5x \cdot \sin x = -2 \sin 4x \cdot \sin x$$

$$\Rightarrow 2 \sin x [\sin 5x - \sin 4x] = 0$$

$$\Rightarrow 4 \sin x \cdot \cos \frac{9x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2} = 0$$

$$\text{i) } \sin x = 0 \Rightarrow x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ii) } \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = n\pi \Rightarrow x = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{iii) } \cos \frac{9x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{9x}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{9}, n \in Z$$

5. కింది సమీకరణాలను సాధించండి.

i)  $\cos 2\theta + \cos 8\theta = \cos 5\theta$

సాధన.

$$2\cos\left(\frac{2\theta+8\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{2\theta-8\theta}{2}\right) - \cos 5\theta = 0$$

$$2\cos 5\theta \cdot \cos 3\theta - \cos 5\theta = 0$$

$$\cos 5\theta (2\cos 3\theta - 1) = 0$$

if  $\cos 5\theta = 0$

$$\text{సాధన లో } 5\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\theta = (2n+1)\frac{\pi}{10}, n \in Z$$

if  $2\cos 3\theta - 1 = 0$

$$\cos 3\theta = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\text{సార్యాతిక సాధన } 3\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\theta = \frac{2n\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9}, n \in Z$$

ii)  $\sin \theta + \sin 5\theta = \sin 3\theta, 0 < \theta < \pi.$

సాధన.  $\sin \theta + \sin 5\theta = \sin 3\theta$

$$\sin \theta + \sin 5\theta - \sin 3\theta = 0$$

$$\sin \theta + 2\cos\left(\frac{5\theta+3\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{5\theta-3\theta}{2}\right) = 0$$

$$\sin \theta + 2\cos 4\theta \cdot \sin \theta = 0$$

$$\sin \theta (1 + 2\cos 4\theta) = 0$$

$$\sin \theta = 0, \cos 4\theta = \frac{-1}{2}$$

if  $\sin \theta = 0$

$$\text{సార్యాతిక సాధన } \theta = n\pi, n \in Z$$

$$\text{if } \cos 4\theta = \frac{-1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{సార్యాలిక సాధన} \quad 4\theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

$$\theta = \frac{2n\pi}{4} \pm \frac{2\pi}{12}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\theta = \frac{n\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$$

$$0 < \theta < \pi$$

$$\text{జపును } \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$$

**6. i)** ( $p \neq -q$ ),  $\tan p\theta = \cot q\theta$  సమీకరణం సాధనలు, పదాంతరం  $\frac{\pi}{p+2}$  నా కలిగిన అంకశైఫిలో

ఉంటాయని చూపండి.

$$\text{సాధన. } \tan \theta = \cot q\theta = \tan \frac{\pi}{2} = -q\theta$$

$$\theta = \frac{(2n+1)\pi}{p+q} \cdot \frac{1}{2}, n \text{ ఒక పర్యాయం}$$

$$\text{సార్యాలిక సాధనలు } \frac{2\pi}{2(p+q)}, \frac{3\pi}{2(p+q)}$$

$$\frac{5\pi}{2(p+q)} + \dots$$

$$\therefore \text{అంకశైఫిలో సామాన్య బేదము } \frac{2\pi}{2(p+q)} = \frac{\pi}{p+q}$$

**ii)** ( $p \neq \pm q$ ),  $\cos p\theta = \sin q\theta$  సమీకరణం సాధనలు రెండు అంకశైఫలు అవుతాయని చూపి, వాటి పదాంతరాలను కనుక్కొండి.

$$\text{సాధన. } \cos p\theta = \sin q\theta$$

$$\cos p\theta = \sin q\theta = 0$$

$$\cos p\theta + \cos \left[ \frac{\pi}{2} + 9\theta \right] = 0$$

$$2 \cos\left(\frac{p\theta + \frac{\pi}{2} + q\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{p\theta - \frac{\pi}{2} - q\theta}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{(p+q)\theta + \frac{\pi}{2}}{2}\right) = 0 \text{ (or)} \quad \cos\left(\frac{(p-q)\theta - \frac{\pi}{2}}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{2(p+q)\theta + \pi}{4}\right) = 0 \text{ (or)}$$

$$\cos\left(\frac{2(p-q)\theta - \pi}{4}\right)$$

$$\therefore \cos\left(\frac{2(p+q)\theta + \pi}{4}\right) = 0$$

$$\frac{(p+q)\theta}{2} = (2\pi + 1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{(p+q)\theta}{2} = (2\pi + 1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

iii)  $(0, \pi)$  అంతరంలో  $\tan x + \sec x = 2 \cos x; \cos x \neq 0$

సమీకరణానికి సాధనల సంఖ్యను కనుక్కొండి.

**సాధన.**  $\tan x + \sec x = 2 \cos x$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} = 2 \cos x$$

$$\sin x + 1 = 2 \cos^2 x$$

$$\sin x + 1 = 2(1 - \sin^2 x)$$

$$\sin x + 1 = (2 - 2 \sin^2 x)$$

$$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$2 \sin^2 x + 2 \sin x - \sin x - 1 = 0$$

$$2 \sin x (\sin x + 1) - (\sin x + 1) = 0$$

$$(\sin x + 1)(2 \sin x - 1) = 0$$

$$\sin x = -1 \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin x = -1 \quad \text{if } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{-\pi}{2} \text{ (or)} \quad \frac{3\pi}{2} \qquad \qquad x = \frac{\pi}{6} \text{ (or)} \quad \frac{5\pi}{6}$$

$(0, \pi)$  அலையில், ஸாஷ்வத நூலை 2

**iv)  $\alpha \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$  அலைத்  $\sin 3\alpha = 4 \sin \alpha \sin(x + \alpha) \sin(x - \alpha)$  பிரிக்கானால் ஸாஷ்வத நூலை.**

ஸாஷ்வத.

$$3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha = 4 \sin \alpha (\sin^2 x - \sin^2 \alpha) \quad \sin \alpha \text{ தீவிரமாக வருகிறது}$$

$$3 - 4 \sin^2 \alpha = 4(\sin^2 x - \sin^2 \alpha)$$

$$= 4 \sin^2 x - 4 \sin^2 \alpha$$

$$4 \sin^2 x = 3$$

$$2 \sin^2 x = \frac{3}{2}$$

$$1 - \cos 2x = \frac{3}{2}$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$= \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$2x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$x = n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

7) i)  $\tan(\pi \cos \theta) = \cot(\pi \sin \theta)$  அலைத்  $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$  அனி மாபுக்கி.

ஸாஷ்வத.  $\tan(\pi \cos \theta) = \cot(\pi \sin \theta)$

$$\Rightarrow \tan(\pi \cos \theta) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \pi \sin \theta\right)$$

$$(or) \tan(\pi \cos \theta) = \tan\left(\frac{-\pi}{2} - \pi \sin \theta\right)$$

$$\Rightarrow \pi \cos \theta = \pm \frac{\pi}{2} - \pi \sin \theta$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{1}{2} - \sin \theta$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos \theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin \theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \cos(\theta) \cos \frac{\pi}{4} + \sin \theta \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

8) i)  $a \cos \theta + b \sin \theta = c, a, b, c \in R$  సమీకరణానికి  $\alpha, \beta$  లు సాధనలు అయి,

$$a^2 + b^2 > 0, \cos x \neq \cos \beta, \sin \alpha \neq \sin \beta$$

అయితే కింది వాటిని బుజువు చేయండి.

సాధన.  $\cos \theta + \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} [\cos \theta + \sin \theta]$

$$= \sqrt{2} \left[ \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \right]$$

i)  $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{2bc}{a^2 + b^2}$

ii)  $\cos x + \cos \beta = \frac{2ac}{a^2 + b^2}$

iii)  $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{c^2 - b^2}{a^2 + b^2}$

iv)  $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{c^2 - a^2}{a^2 + b^2}$

సాధన.  $a \cos \theta = b \sin \theta = c$

మొదట దీనిని  $\sin \theta$  లో వర్గ సమీకరణంగా వ్రాయాలి

$$\Leftrightarrow a \cos \theta = c - b \sin \theta$$

ఇదు వర్షాపులా వర్గం చేయగా

$$a^2 \cos^2 \theta = (c - \sin \theta)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 (1 - \sin^2 \theta) c^2 = b^2 \sin^2 \theta - 2bc \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2) \sin^2 \theta - 2bc \sin \theta + (c^2 - a^2) = 0$$

ఇది  $\sin \theta$  లో వర్గ సమీకరణం

$\sin \alpha \sin \beta$  మూలాలు

i) మూలాల మొత్తం  $= \sin \alpha + \sin \beta = \frac{2bc}{a^2 + b^2}$

ఇంకా  $a \cos \theta + b \sin \theta = c$

దీనిని  $\cos \theta$  లో వర్గ సమీకరణంగా వ్రాయాలి

$$\Leftrightarrow b \sin \theta = c - a \cos \theta$$

జరువైపులా వర్ధం చేయగా

$$\Leftrightarrow b^2 \sin^2 \theta = (c - a \cos \theta)^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 (1 - \cos^2 \theta) = c^2 \cos^2 \theta - 2ca \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2) \cos^2 \theta - 2ca \cos \theta + (c^2 - b^2) = 0$$

జది  $\cos \theta$  లో వర్ధ సమీకరణం

$\cos \alpha, \cos \beta$  లు మూలాలు

ii) మూలాల మొత్తం  $= \cos \alpha + \cos \beta = \frac{2ca}{a^2 + b^2}$

iii) మూలాల ఉభం  $= \cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{c^2 - b^2}{a^2 + b^2}$

iv) మూలాల ఉభము  $= \sin \alpha \sin \beta = \frac{c^2 - a^2}{a^2 + b^2}$

9) i) కింది సమీకరణాలకు ఉమ్మడి మూలాలు కనుక్కోండి.

$$\cos 2x + \sin 2x = \cot x, 2 \cos^2 x + \cos^2 2x = 1$$

సాధన.

$$\tan x = A \text{ అనుకుండాం}$$

$$\cos 2x + \sin 2x = \cot x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} + \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{\tan x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - A^2}{1 + A^2} + \frac{2A}{1 + A^2} = \frac{1}{A}$$

$$\Leftrightarrow (1 - A^2 + 2A)A = (1 + A^2)$$

$$\Leftrightarrow A - A^3 + 2A^2 = 1 + A^2$$

$$\Leftrightarrow A^3 - A^2 - A + 1 = 0$$

$A = 1$  లై సమీకరణాన్ని తృప్తిపరుస్తుంది

$$A = 1 \left| \begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right.$$

$$\therefore A^3 - A^2 - A + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (A - 1)(A^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (A - 1)(A - 1)(A + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow A = 1, A = -1$$

$$\therefore \tan x = \pm 1$$

$$\Rightarrow x = (2n+1) \left( \frac{\pi}{4} \right), n \in Z$$

$$2\cos^2 x + \cos^2 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow (2\cos^2 x - 1) + \cos^2 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos^2 (2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x (1 + \cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \text{ (లేదా) } \cos 2x = -1$$

**సందర్భము (i) :**

$$\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = (2n+1) \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore x = (2n+1) \frac{\pi}{4}, n \in Z$$

$$\therefore (2n+1) \frac{\pi}{4}, n \in Z \text{ ఉమ్మడి మూలం అవుతుంది.}$$

**ii)**  $|\tan x| = \tan x + \frac{1}{\cos x}, x \in [0, 2\pi]$  అయ్యేటట్లు  $x$  విలువను కనుకోండి.

**పాఠన.**  $|\tan x| = -\tan x,$

$x, 2$  లేదా  $4$ వ పాదాలలో ఉండే

$$\therefore |\tan x| = \tan x + \frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow -\tan x = \tan x + \sec x$$

$$\Rightarrow -2\tan x = \sec x$$

$$\Rightarrow -2 \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x} = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{-1}{2} = \sin \left( \frac{-\pi}{6} \right)$$

$$\Rightarrow \sin \left( 2\pi - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\therefore x = \frac{11\pi}{6}$$

10)  $(-\pi, \pi)$  అంతరంలో  $g^{1+\cos x + \cos^2 x + \dots = 4^3}$  సమీకరణాన్ని తృప్తిపరిచే  $x$

మొక్క శ్వాసేతర విలువను కనక్కొండి.

సాధన.  $\cos x = \pm 1$

$$\text{అయితే } \approx 1 + \cos x + \cos^2 x + \dots \dots \infty$$

అభిసరణ చెందదు  $|\cos x| < 1$  అనుకుందాం

$$\text{అప్పుడు } 1 + \cos x + \cos^2 x + \dots \dots \infty$$

$$= \frac{1}{1 - \cos x}$$

$$\left( \because a + ar + ar^2 + \dots \dots \infty = \frac{a}{1-r}, |r| < 1 \right)$$

$$\therefore 8^{1+\cos x + \cos^2 x + \dots} = 4^3$$

$$\Rightarrow (8)^{\frac{1}{1-\cos x}} = 8^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 - \cos x} = 2 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ (లేదా) } -\frac{\pi}{3} (\because X \in (-\pi, \pi))$$

11)  $1 + \sin^2 \theta = 3 \sin \theta \cos \theta$  ను సాదించండి.

సాధన.  $1 + \sin^2 \theta = 3 \sin \theta \cos \theta$

$\cos^2 \theta$ , చే భాగించగా

$$\sec^2 \theta + \tan^2 \theta = 3 \tan \theta$$

$$\Rightarrow (1 + \tan^2 \theta) + \tan^2 \theta - 3 \tan \theta = 0$$

$$\Rightarrow 2 \tan^2 \theta - 3 \tan \theta + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2 \tan^2 \theta - 2 \tan \theta - \tan \theta + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2 \tan \theta (\tan \theta - 1) - (\tan \theta - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (\tan \theta - 1)(2 \tan \theta - 1) = 0$$

$$\tan \theta = 1 \text{ (లేదా) } \tan \theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{జప్పుడు } \tan \theta = 2 = \tan \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \text{ప్రదాన సాధన } \theta = \frac{\pi}{4}$$

సార్యోత్తమిక సాధన

$$\theta = n\pi + \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$$

$\tan \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha$  ప్రదాన సాధన అనుకుంటే సార్యోతిక సాధన  $\theta = n\pi + \alpha, n \in Z$  అవుతుంది.

12)  $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \sqrt{3}$  ను సాధించండి

సాధన.  $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

జరువైపులా  $\sqrt{2}$  చే భాగించగా

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

ప్రదాన సాధన  $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}$  (i.e.,)  $x = \frac{5\pi}{12}$

సార్యోతిక సాధన

$$x - \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n \in Z$$

$$\Rightarrow x - \frac{\pi}{4} - 2n\pi + \frac{5\pi}{12} = 2n\pi + \frac{\pi}{12}, n \in Z$$

13)  $4\sin x \sin 2x \sin 4x = \sin 3x$  ను సాధించండి.

సాధన.

$$\sin 3x = 4 \sin x \sin 3x] \sin 4x$$

$$= 2 \sin x (2 \sin 4x \sin 2x)$$

$$= 2 \sin x [\cos(2x) - \cos 6x]$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x = 2 \cos 2x \sin x - 2 \cos 6x \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x = \sin(3x) - \sin x - 2 \cos 6x \sin x$$

$$\Rightarrow 2 \cos 6x \sin x + \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = 0 \quad \cos 6x = \frac{-1}{2}$$

సందర్భం (i):

$$\sin x = 0$$

$$\Rightarrow \cos 6x = \frac{-1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

ప్రదాన సాధన  $x = 0$

సార్యోతిక సాధన  $x = n\pi, n \in Z$

పందర్థం (ii):

$$\cos 6x = \frac{-1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

ప్రదాన సాధన

$$6x = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{9}$$

$$6x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, n \in Z$$

$$\Rightarrow x = \frac{n\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9}, n \in Z$$

14)  $0 < \theta < \pi$  అయితే

$$\cos \theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 3\theta \cdot \cos 4\theta = \frac{1}{4} \text{ ను సాదించండి.}$$

సాధన.  $4 \cos \theta \cos 2\theta \cos 3\theta = 1$

$$\Rightarrow 2 \cos 2\theta (2 \cos 3\theta \cdot \cos \theta) = 1$$

$$\Rightarrow 2 \cos 2\theta (\cos 4\theta + \cos 2\theta) = 1$$

$$\Rightarrow 2 \cos 4\theta \cos 2\theta = (2 \cos^2 2\theta - 1) = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cos 4\theta \cos 2\theta + \cos 4\theta = 0$$

$$\Rightarrow \cos 4\theta (2 \cos 2\theta + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \cos 4\theta = 0 \text{ (లేదా)} \quad \cos 2\theta = \frac{-1}{2}$$

పందర్థం (i):

$$\cos 4\theta = 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

ప్రదాన సాధన

$$\Rightarrow 4\theta = \frac{\pi}{2} \quad \theta = \frac{\pi}{8}$$

సార్యోతిక సాధన

$$4\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in Z$$

$$\Rightarrow \theta = (2n+1)\frac{\pi}{8}, n \in Z$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, \text{టోష్టు}$$

$$\left\{ \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8} \right\} \text{ విలువలు } (0, \pi) \text{ అంతరంలో సాధనలు}$$

అవుతాయి.

**సందర్భం (ii):**

$$\cos 2\theta = \frac{-1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

ప్రదాన సాధన

$$\Rightarrow 2\theta = \frac{2\pi}{3} \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

సార్యోతీక సాధన

$$2\theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

$n = 0, 1$  తీసుకొంటే  $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$  లు  $(0, \pi)$  అంతరంలో సాధనలు అవుతాయి.

దత్త సమీకరణానికి  $(0, \pi)$  అంతరంలో సాధనలు.

$$\left\{\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{8}\right\}$$

**15)**  $p \neq \pm q, \cos p\theta + \cos q\theta = 0$  సమీకరణం సాధనలు రెండు అంకశ్రేష్టలు అవుతాయని చూపి వాటి వాటి పదాంతరాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన.

$$\cos p\theta + \cos q\theta = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos\left[\left(\frac{p+q}{2}\right)\theta\right]\cos\left[\left(\frac{p-q}{2}\right)\theta\right] = 0$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\theta = 0 \text{ (అదే)} \quad \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\theta = 0$$

$$\therefore \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\theta = 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{p+q}{2}\right)\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2} = (4n \pm 1)\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{(4n \pm 1)\pi}{(p+q)}, n \in \mathbb{Z}$$

జందులో  $n = 0, 1, 2, \dots$  రాశీ

$$\text{సాధనలు} \quad \theta = -\frac{\pi}{p+q}, \frac{\pi}{p+q}, \frac{3\pi}{p+q}, \frac{5\pi}{p+q}, \dots$$

ఇది మరొక అంకశ్రేఢి. దీని పదాంతరం  $\frac{2\pi}{(p+q)}$  ఇదే విధంగా

$$\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\theta = 0 \text{ కి సాధనలు}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{p-q}, \frac{\pi}{p-q}, \frac{3\pi}{p-q}, \frac{5\pi}{p-q}, \dots$$

$$\text{ఇది మరొక అంకశ్రేఢి. దీని పదాంతరం } \frac{2\pi}{(p-q)}$$

**16)**  $\sin 2x - \cos 2x = \sin x - \cos x$  ను సాధించండి.

సాధన.

$$(\sin 2x - \sin x) - (\cos 2x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{x}{2} \left( \cos \frac{3x}{2} + \sin \frac{3x}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{x}{2} = 0 \quad (\text{లేదా}) \quad \cos \frac{3x}{2} + \sin \frac{3x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{x}{2} = 0 \quad (\text{లేదా}) \quad \tan \frac{3x}{2} = 0$$

$$\left( \cos \frac{3x}{2} \neq 0 \right) \text{కనుక}$$

i)  $\sin \frac{x}{2} = 0$  ప్రదాన సాధన  $x = 0$  లేదా

సార్యాతిక సాధన  $\frac{x}{2} = n\pi, n \in Z$  లేదా

$$x = 2n\pi, n \in Z$$

ii)  $\tan \frac{3x}{2} = -1$  కి ప్రదాన సాధన  $\frac{3x}{2} = -\frac{\pi}{4}$  లేదా  $x = -\frac{\pi}{6}$

సార్యాతిక సాధన  $\frac{3x}{2} = n\pi - \frac{\pi}{4}$  లేదా

$$x = \frac{2n\pi}{3} - \frac{\pi}{6}, n \in Z$$

$\therefore$  దత్త సమీకరణానికి సాధన సమితి

$$\left\{ 2n\pi / n \in Z \right\} \cup \left\{ \frac{2n\pi}{3} - \frac{\pi}{6} / n \in Z \right\}$$