గణితానుగమనం

1. $a+(a+d)+(a+2d)+....$ **(n పదాల వరకు)** $= \frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]$

A. n వ పదం $= a+(n-1)d$

$S(n)a = a+(a+d)+(a+2d)+....+\left[a+(n-1)d\right] = \frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]$

$n=1$ అయిన, L.H.S $= a+(n-1)d$

$= a+(1-1)d = a$

R.H.S $= \frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]$

$= \frac{1}{2}[2a] = a$

$\therefore n=1$ కు $S(n)$ నిజము

$n=k$ కు $S(n)$ నిజమనుకొందాం

అంటే

$a+(a+d)+(a+2d)+....+\left[a+(k-1)d\right] = \frac{k}{2}\left[2a+(k-1)d\right]$

$n=k+1$ కు $S(n)$ నిజమని చూపాలి

ఇరువైపులా $(a+kd)$ కలపగా,

$a+(a+d)+(a+2d)+....+(a+kd) = \frac{k}{2}\left[2a+(k-1)d\right]+\left[a+kd\right]$

$= \left[ak+\frac{k(k-1)d}{2}\right]+\left[a+kd\right]$

$= ak+a+\frac{kd(k-1)}{2}+kd$

$= a[k+1]+\frac{kd(k+1)+2kd}{2}$

$$= a\left[k+1\right]+kd\left[\frac{k-1}{2}+1\right]$$

$$= a\left(k+1\right)+\frac{kd}{2}\left(k+1\right)$$

$$= \left(k+1\right)+\left[a+\frac{kd}{2}\right]$$

$$= \left(k+1\right)\frac{\left(2a+kd\right)}{2}$$

$$= \frac{\left(k+1\right)}{2}\left[2a+\left(k-1\right)-1\right]d$$

$n=k+1$ కు $S\left(n\right)$ నిజము

$\therefore\ n\in N$ యొక్క అన్ని విలువలకు గణితానుగమన సూత్రం నుంచి $S\left(n\right)$ నిజము.

2. $a+ar+ar^2+....$ **(n పదాల వరకు)** $= \dfrac{a\left(r^n-1\right)}{r-1}, r\neq 1$

సాధన: దత్త ప్రవచనము $S\left(n\right)$ అనుకొనుము

$S\left(n\right): a+ar+ar^2+....$ (n పదాల వరకు)$= \dfrac{a\left(r^n-1\right)}{r-1}$

n పదం $= a.r^{n-1}$

$$S\left(n\right): a+ar+ar^2+....+a.r^{n-1}=\frac{a\left(r^n-1\right)}{r-1}$$

$n=1$ అయిన, L.H.S $= a.\,r^{n-1}=ar^{1-1}=a$

$$\text{R.H.S}=\frac{a\left(r^n-1\right)}{r-1}=\frac{a\left(r-1\right)}{\left(r-1\right)}=a$$

$\therefore\ n=1$ కు $S\left(n\right)$ నిజము

$n=k$ కు $S\left(n\right)$ నిజమనుకొందాం

i.e., $a+ar+ar^2+....+a.r^{k-1}=\dfrac{a\left(r^k-1\right)}{r-1}$

$n = k+1$ కు $S(n)$ నిజమని చూపాలి

ఇరువైపులా $a.r^k$ కలపగా,

$$a + ar + ar^2 + ... + a.r^k = \frac{a\left(r^k - 1\right)}{r-1} + ar^k = \frac{ar^k - a + ar^k.r - ar^k}{r-1}$$

$$= \frac{ar^{k+1} - a}{r-1} = \frac{a\left[r^{k+1} - 1\right]}{r-1}$$

$n = k+1$ కు $S(n)$ నిజము

$\therefore\ n \in N$ యొక్క అన్ని విలువలకు గణితానుగమన సూత్రం నుంచి $S(n)$ నిజము.

3. **గణితానుగమన పద్ధతిని ఉపయోగించి** $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \forall\, n \in N$ **సూత్రాన్ని నిరూపించండి.**

సాధన: $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \forall\, n \in N$

అనే ప్రవచనము $S(n)$ అనుకొందాం

$n = 1$అయిన,

L.H.S = $1^3 = 1$; R.H.S = $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$$= \frac{1(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$\therefore$ L.H.S = R.H.S

$n = 1$ కు $S(n)$ నిజము

$n = k$ అయిన,

$$S(k): 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}, \forall\, n \in N$$

$\therefore\ n = k$ కు, $S(n)$ నిజము

ఇరువైపులా $(k+1)^3$ ను కలపగా

$$1^3+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}$$

$$=\frac{(k+1)^2\left[k^2+4(k+1)\right]}{4}$$

$$=\frac{(k+1)^2\left[k^2+4k+4\right]}{4}$$

$$=\frac{(k+1)^2\left[k+2\right]^2}{4}$$

$$=\frac{(k+1)^2\left[(k+1)+1\right]^2}{4}$$

$n=k+1$ కు దత్త సూత్రం నిజము

$n\in N$ యొక్క అన్ని విలువలకు గణితానుగమన సూత్రం నుంచి $S(n)$ నిజము.

4. **గణితానుగమన పద్ధతిని ఉపయోగించి** $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+....+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$ **అని చూపండి.**

సాధన: $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+....+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

అనే ప్రవచనము $S(n)$ అనుకొందాం

$n=1$ అయిన, L.H.S $=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ $=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{3}$

R.H.S $=\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$

$\therefore n=1$ కు $S(n)$ నిజము

$n=k$ కు $S(n)$ నిజమనుకొందాం

అంటే

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+....+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$

$n=k+1$ కు $S(n)$ నిజమని చూపాలి

$\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$ ను ఇరువైపులా కలపగా,

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+....+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{k+1}{2k+3}=\frac{k+1}{2(k+1)+1}$$

$\therefore\ n=k+1$ కు $S(n)$ నిజము

$\therefore\ n\in N$ యొక్క అన్ని విలువలకు గణితానుగమన సూత్రం నుంచి $S(n)$ నిజము.

5. **గణితానుగమన పద్ధతిని ఉపయోగించి** $\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+....$(n **పదాల వరకు**)

$=\frac{n}{3n+1},\ \forall n\in N$ **అని చూపండి.**

సాధన: $\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+....$(**n** పదాల వరకు)

$\frac{n}{3n+1},\ \forall n\in N$ అనే ప్రవచనము $S(n)$ అనుకొందాం

n వ పదము 1 మరియు 2 సంఘటనలు

1, 4, 7, ...లు A.P లో ఉన్నాయి

4, 7, 10, ... లు A.P లో ఉన్నాయి

$\therefore t_n=a+(n-1)d \qquad t_n=a+(n-1)d$

$=1+(n-1)3 \qquad = 4+(n-1)3$

$=1+3n-3 \qquad = 4+3n-3$

$= 3n-2$ $\quad\quad\quad\quad = 3n+1$

$\therefore$ దత్తశ్రేణిలో n వ పదము $T_n = \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

$\therefore S(n): \dfrac{1}{1.4} + \dfrac{1}{4.7} + \dfrac{1}{7.10} + ...$

$+ \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \dfrac{n}{3n+1}, \forall n \in N$

$n=1$అయిన,

L.H.S $= \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$; R.H.S $= \dfrac{n}{3n+1}$

$= \dfrac{1}{(3-2)(3+1)}$ $\quad\quad = \dfrac{1}{3+1}$

$= \dfrac{1}{4}$ $\quad\quad = \dfrac{1}{4}$

$\therefore$ L.H.S = R.H.S

$n=1$ కు $S(k)$ నిజము

$n=k$ అయిన,

$S(k): \dfrac{1}{1.4} + \dfrac{1}{4.7} + \dfrac{1}{7.10} + ... + \dfrac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \dfrac{k}{3k+1}, \forall k \in N$

$n=k$ కు, $S(k)$ నిజము

$\dfrac{1}{[3(k+1)-2][3(k+1)+1]} = \dfrac{1}{(3k+1)(3k+4)}$

ను ఇరువైపులా కలపగా,

$\dfrac{1}{1.4} + \dfrac{1}{4.7} + \dfrac{1}{7.10} + ... + \dfrac{1}{(3k-2)(3k+1)} + \dfrac{1}{(3k+1)(3k+4)}$

$= \dfrac{k}{3k+1} + \dfrac{1}{(3k+1)(3k+4)}$

$= \dfrac{k(3k+4)1}{(3k+1)(3k+4)}$

$= \frac{3k^2+4k+1}{(3k+1)(3k+4)}$

$= \frac{(k+1)(3k+1)}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k+1}{3(k+1)+1}$

$= \therefore\ n = k+1$ కు $S(k+1)$ నిజము

$n \in N$ యొక్క అన్ని విలువలకు గణితానుగమన సూత్రం నుంచి $S(n)$ నిజము.

6. $2.3+3.4+4.5+....$(n **పదాల వరకు)** $= \frac{n(n^2+6n+11)}{3}$

సాధన: $2.3+3.4+4.5+....$ (n పదాల వరకు) $= \frac{n(n^2+6n+11)}{3}$

అనే ప్రవచనము $S(n)$ అనుకొందాం

n పదము : $(n+1)(n+2)$

$S(n) = 2.3+3.4+4.5+.... +(n+1)(n+2) = \frac{n(n^2+6n+11)}{3}$

$n=1$ అయిన ; L.H.S. $= (n+1)(n+2)$

$= (1+1)(1+2) = 2\times 3 = 6$

R.H.S $= \frac{n(n^2+6n+11)}{3} = \frac{1+6+11}{3} = \frac{18}{3} = 6$

L.H.S = R.H.S

$n=1$ కు $S(n)$ నిజము

$n=k$ కు $S(n)$ నిజమనుకొందాం

అంటే

$2.3.+3.4+4.5+...+(k+1)(k+2) = \frac{k(k^2+6k+11)}{3}$

$n=k+1$ కు $S(n)$ నిజమని చూపాలి

ఇరువైపులా $(k+2)(k+3)$ కలపగా,

$2.3.+3.4+4.5+...+(k+1)(k+2)$

$$=\frac{k\left(k^2+6k+11\right)}{3}+(k+1)(k+2)$$

$$=\frac{k\left(k^2+6k+11\right)+3\left(k^2+3k+2k+6\right)}{3}$$

$$=\frac{k^3+6k^2+11k+3k^2+15k+18}{3}$$

$$=\frac{k^3+9k^2+26k+18}{3} \quad .... (1)$$

$$\frac{n\left(n^2+6n+11\right)}{3}=\frac{(k+1)\left[(k+1)^2+6(k+1)+11\right]}{3}$$

$$=\frac{(k+1)\left[k^2+2k+1+6k+6+11\right]}{3}$$

$$=\frac{(k+1)\left[k^2+8k+18\right]}{3}$$

$$=\frac{k^3+8k^2+18k+k^2+8k+18}{3}$$

$$=\frac{k^3+9k^2+26k+18}{3} \quad .... (2)$$

(1), (2) ల నుండి $n=(k+1)$ కు $S(n)$ నిజము.

$\therefore n\in N$ యొక్క అన్ని విలువలకు గణితానుగమన సూత్రం నుంచి $S(n)$ నిజము.

7. $1.2.3+2.3.4+3.4.5+....$ **(n పదాల వరకు)** $=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

సాధన: $1.2.3+2.3.4+3.4.5+....$ (n పదాల వరకు)$=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ అనే ప్రవచనాన్ని $S(n)$ అనుకొనుము

n వ పదము $=n(n+1)(n+2)$

$S(n):1.2.3+2.3.4+...+n(n+1)(n+2)$

$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

$n = 1$అయిన, L.H.S $= n(n+1)(n+2)$

$= (1+1)(1+2)$

$= 2 \times 3 = 6$

R.H.S $= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

$= \frac{(1+1)(1+2)(1+3)}{4} = \frac{2 \times 3 \times 4}{4} = 6$

$\therefore\ n = 1$ కు $S(n)$ నిజము

$n = k$ కు $S(n)$ నిజమనుకొందాం

i.e., $1.2.3 + 2.3.4 + ... + k(k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$

$n = k+1$ కు $S(n)$ ప్రవచనం నిజమని చూపాలి

$(k+1)(k+2)(k+3)$ ను ఇరువైపులా కలపగా,

$1.2.3 + 2.3.4 + ... + (k+1)(k+2)(k+3) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k+1)(k+2)(k+3)$

$= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3) + 4(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$

$= (k+1)(k+2)(k+3)\left[\frac{k+4}{4}\right]$

$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$

$n = k+1$ కు $S(n)$ నిజము

$n \in N$ యొక్క అన్ని విలువలకు గణితానుగమన సూత్రం నుంచి $S(n)$ నిజము.

8. $\frac{1^3}{1}+\frac{1^3+2^3}{1+3}+\frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5}+\ldots$(n పదాల వరకు) $=\frac{n}{24}\left[2n^2+9n+13\right]$

సాధన: $\frac{1^3}{1}+\frac{1^3+2^3}{1+3}+\frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5}+\ldots$(n పదాల వరకు) $=\frac{n}{24}\left[2n^2+9n+13\right]$ అనే ప్రవచనాన్ని $S(n)$ అనుకొందాం

n వ పదం $=\frac{(n+1)^2}{4}$

$S(n):\frac{1^3}{1}+\frac{1^3+2^3}{1+3}+\frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5}+\ldots+$

$\frac{(n+1)^2}{4}=\frac{n}{24}\left[2n^2+9n+13\right]$

$n=1$ అయిన, L.H.S $=\frac{(n+1)^2}{4}=\frac{(1+1)^2}{4}=\frac{4}{4}=1$

R.H.S $=\frac{n}{24}\left[2n^2+9n+13\right]$

$=\frac{1}{24}[2+9+13]=\frac{24}{24}=1$

$\therefore n=1$ కు $S(n)$ నిజము

$n=k$ కు $S(n)$ ప్రవచనం నిజమనుకొందాం

i.e., $\frac{1^3}{1}+\frac{1^3+2^3}{1+3}+\frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5}+\ldots$

$=+\frac{(k+1)^2}{4}=\frac{k}{24}\left[2k^2+9k+13\right]$

$n=k+1$ కు $S(n)$ $\frac{(k+2)^2}{4}$ ప్రవచనం నిజమని చూపాలి

$\frac{(k+2)^2}{4}$ కు ఇరువైపులా కలపగా,

$\frac{1^3}{1}+\frac{1^3+2^3}{1+3}+\frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5}+\ldots\quad+\frac{(k+2)^2}{4}=\frac{k}{24}\left[2k^2+9k+13\right]+\frac{(k+2)^2}{4}$

$$= \frac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6\left(k^2 + 4 + 4k\right)}{24}$$

$$= \frac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6k^2 + 24 + 24k}{24}$$

$$= \frac{2k^3 + 15k^2 + 37k + 24}{24} \text{ .... (1)}$$

$$\frac{n}{24}\left[2n^2 + 9n + 13\right]$$

$$= \frac{(k+1)}{24}\left[2(k+1)^2 + 9(k+1) + 13\right]$$

$$= \frac{(k+1)}{24}\left[2\left(k^2 + 2k + 1\right) + 9k + 9 + 13\right]$$

$$= \frac{(k+1)}{24}\left[2k^2 + 4k + 2 + 9k + 22\right]$$

$$= \frac{(k+1)}{24}\left[2k^2 + 13k + 24\right]$$

$$= \frac{2k^3 + 13k^2 + 24k + 2k^2 + 13k + 24}{24}$$

$$= \frac{2k^3 + 15k^2 + 37k + 24}{24} \text{ .... (2)}$$

(1), (2) ల నుండి

$n = k + 1$ కు $S(n)$ అనేది నిజము

$n \in N$ యొక్క అన్ని విలువలకు గణితానుగమన సూత్రం నుంచి $S(n)$ నిజము.

9. $1^2+\left(1^2+2^2\right)+\left(1^2+2^2+3^2\right)+\ldots$.(n పదాల వరకు) $=\dfrac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$

సాధన: $S(n):1^2+\left(1^2+2^2\right)+\left(1^2+2^2+3^2\right)+\ldots$. (n పదాల వరకు)= $\dfrac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$ $S(n)$

అనుకొందాం

n వ పదం $=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$S(n):1^2+\left(1^2+2^2\right)+\left(1^2+2^2+3^2\right)+\ldots \quad =+\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\dfrac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$

$n=1$అయిన, L.H.S $=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\dfrac{(1+1)(2+1)}{6}=\dfrac{2\times 3}{6}=1$

R.H.S $=\dfrac{n(n+1)^2(n+2)}{12}=\dfrac{(1+1)^2(1+2)}{12}$

$=\dfrac{4\times 3}{12}=1$

$n=1$ కు $S(n)$ నిజము

$n=k$ కు $S(n)$ ప్రవచనం నిజమనుకొందాం

$n=k+1$ కు $S(n)$ నిజమని చూపాలి

$\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$ కు ఇరువైపులా కలపగా,

$1^2+\left(1^2+2^2\right)+\left(1^2+2^2+3^2\right)+\ldots+\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

$=\dfrac{k(k+1)^2(k+2)}{12}+\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

$=\dfrac{(k+1)(k+2)\left[k(k+1)+2(2k+3)\right]}{12}$

$=\dfrac{(k+1)(k+2)\left(k^2+k+4k+6\right)}{12}$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k^2+5k+6)}{12}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+2)(k+3)}{12}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)^2(k+3)}{12}$$

$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1]^2[(k+1)+2]}{12}$$

$\therefore n = k+1$ కు $S(n)$ అనేది నిజము

$n \in N$ యొక్క అన్ని విలువలకు గణితానుగమన సూత్రం నుంచి $S(n)$ నిజము.

10. గణితానుగమన పద్ధతిని ఉపయోగించి $2+3.2+4.2^2+....$(**n పదాల వరకు**)

$= n.2^n, \forall n \in N$ **సూత్రాన్ని నిరూపించండి.**

సాధన: $2+3.2+4.2^2+....$(**n** పదాల వరకు)

$= n.2^n, \forall n \in N$ అనే ప్రవచనము $S(n)$ అనుకొందాం

దత్తశ్రేణిలో n వ పదము, $t_n = (n+1)2^{n-1}$

$\therefore S(n) = 2+3.2+4.2^2+....(n+1)2^{n-1}$

$= n.2^n, \forall n \in N$

$n=1$ అయిన,

L.H.S $= (n+1)2^{n-1}$ R.H.S $= n.2^n$

$= (1+1)2^{1-1}$ $= 1.2^1$

$= 2$ $= 2$

L.H.S = R.H.S

$n=1$ కు $S(n)$ నిజము

$n=k$ అయిన,

$S(k) = 2+3.2+4.2^2+....(k+1)2^{k-1}$

$= k.2^k, \forall n \in N$ www.sakshieducation.com

$\therefore n = k$ కు, $S(k)$ నిజము

$(k+2)2^k$ ను ఇరువైపులా కలపగా,

$2+3.2+4.2^2+....(k+1)2^{k-1}+(k+2)2^k$

$= k.2^k+(k+2)2^k$

$= 2^k(k+k+2)$

$= 2^k(2k+2)$

$= 2^k2(k+1)$

$= 2^{k+1}(k+1)$

$= (k+1)2^{k+1}$

$\therefore n = k+1$ కు $S(k+1)$ నిజము

$n \in N$ యొక్క అన్ని విలువలకు గణితానుగమన సూత్రం నుంచి $S(n)$ నిజము.

11. $4^3+8^3+12^3+.......n$ **పదాల వరకు** $=16n^2(n+1)^2$.

సాధన: $4,8,12,......$ **లు** $A.P$ **లో ఉన్నవి.** n **వ పదం** $(4n)$

$4^3+8^3+12^3+.......+(4n)^3=16n^2(n+1)^2$

అనేది ప్రవచనం $p(n)$ **అనుకుందాం.**

ఎడమచేతివైపు మొత్తం $S(n)$ **అనుకొనుము.**

$S(1)=4^3=16(1^2)(1+1)^2=16(4)=64=4^3$

$\therefore n=1$ **కు దత్త సూత్రం నిజం.**

$n=k$ **కు దత్త ప్రవచనం నిజం అనుకొనుము.**

$i.e., S(k)=4^3+8^3+12^3+.....+(4k)^3$

$=16k^2(k+1)^2$

$n=k+1$ **కు దత్త సూత్రం నిజం అని చూపాలి.**

$(i.e.,)S(k+1)=16(k+1)^2(k+2)^2$ **అని చూపాలి.**

$S(k+1)=4^3+8^3+12^3+....+(4k)^3+\left[4(k+1\right]^3$

$=S(k)+\left[4(k+1\right]^3$

$=16K^2(k+1)^2+4^3(k+1)^3$

12. $2+7+12+....+(5n-3)=\frac{n(5n-1)}{2}$

సాధన: $2+7+12+....+(5n-3)=\frac{n(5n-1)}{2}$ **అనేది ప్రవచనం** $p(n)$ **అనుకుందాం.**

ఎడమచేతి వైపుమొత్తాన్ని $S(n)$ **అనుకొనుము.**

$S(1)=2=\frac{1(5\times 1-1)}{2}=\frac{4}{2}=2$

కాబట్టి $n=1$ **కు దత్త సూత్రం అనుకుందాం.**

$n=k$ **కు దత్త సూత్రం నిజం అనుకుందాం.**

$(i.e)S(k)=2+7+12+....+(5k-3)$

$=\frac{k(5k-1)}{2}$

$S(k+1)=\frac{(k+1)(5k+4)}{2}$ **అని చూపాలి.**

$S(k+1)=2+7+12+.....+(5k-3)+(5k+2)$

$=S(k)+(5k+2)$

$=\frac{k(5k-1)}{2}+(5k+2)$

$=\frac{5k^2-k+2(5k+2)}{2}$

$=\frac{1}{2}\left[5k^2+9k+4\right]$

$=\frac{1}{2}(k+1)(5k+4)$

$=\frac{1}{2}(k+1)\left[5(k+1)-1\right]$

$\therefore n=k+1$ **కు దత్త సూత్రం నిజం.**

$\therefore n\in N$ **అన్ని విలువలకు గణితాను గమన సూత్రం నుంచి** $p(n)$ **నిజం.**

$(i.e.,)2+7+12+.......+(5n-3)=\frac{n(5n-1)}{2}$

13. n అన్ని ధనపూర్ణాంక విలువలకు $49^n+16n-1$ ని 64 భాగిస్తుందని చూపండి.

సాధన: $49^n+16n-1$ ని 64 భాగిస్తుంది అనే ప్రవచనాన్ని $S(n)$ అనుకొందాం

$49^1+16.1-1=64$ ని 64 భాగిస్తుంది

$\therefore\ n=1$ కు $S(n)$ నిజము

$n=k$ కు ప్రవచనము $S(n)$ నిజమనుకొందాం

$\therefore\ 49^k+16k-1$ ని 64 భాగిస్తుంది

$\therefore\ 49^k+16k-1=64M$ .... (1)

($\because M$ ఒక ధనపూర్ణాంకం)

$n=k+1$ కు ప్రవచనం $S(n)$ నిజం అని చూపాలి

అంటే, $49^{k+1}+16(k+1)-1$ ని 64 భాగిస్తుందని చూపాలి

(1) నుండి,

$49^k+16k-1=64M$

$49^k=64M-16k+1$

$49^k\times 49=(64M-16k+1)\times 49$

$49^{k+1}+16(k+1)-1=(64M-16k+1)49$

$=\ 64\times 49M-49\times 16k+49+16k+16-1$

$=\ 64\times 49M-48\times 16k+64$

$=\ 64\times 49M-64\times 12k+64$

$=\ 64(49M-12k+1)$

$=64\,\mathrm{N}$ [$\because N$ ఒక ధనపూర్ణాంకం]

$\therefore\ n=k+1$కు $S(n)$ అనేది నిజము

$n\in N$ యొక్క అన్ని విలువలకు గణితానుగమన సూత్రం నుంచి $S(n)$ నిజము.

14. ప్రతి $n\in N$ కు $2.4^{(2n+1)}+3^{(2n+1)}$ ను 11 భాగిస్తుందని చూపండి.

సాధన: $2.4^{(2n+1)}+3^{(2n+1)}$ ను 11 భాగిస్తుంది అనే ప్రవచనాన్ని $S(n)$ అనుకొందాం

$2.4^{(2.1+1)}+3^{(3.1+1)}$

$= 2.4^3 + 3^4 = 209 = 11 \times 19$ ను 11 భాగిస్తుంది

కావున $n = 1$కు $S(n)$ నిజము

$n = k$ కు ప్రవచనము $S(n)$ నిజమనుకొందాం

$2.4^{2k+1} + 3^{3k+1} = 11M$ .... (1)

($\because M$ ఒక ధనపూర్ణాంకం)

$2.4^{2(k+1)+1} + 3^{3(k+1)+1}$ ని 11 భాగిస్తుందని చూపాలి

(1) నుండి,

$2.4^{(2k+1)} + 3^{(3k+1)} = 11M$

$2.4^{(2k+1)} = 11M - 3^{(3k+1)}$

$2.4^{(2k+1)} \times 4^2 = \left(11M - 3^{3k+1}\right)4^2$

$2.4^{2k+1} \times 4^2 + 3^{3k+4} = \left(11M - 3^{3k+1}\right)16 + 3^{(3k+4)}$

$2.4^{2k+3} + 3^{3k+4} = 11 \times 16M - 16.3^{3k+1} + 3^{3k+1}.3^3$

$= 11 \times 16M + 11 \times 3^{3k+1}$

$= 11\left(16M + 3^{3k+1}\right)$

$= 11$N [$\because N$ ఒక ధనపూర్ణాంకం]

$\therefore n = k + 1$ కు $S(n)$ అనేది నిజము

గణితానుగమన సూత్రం నుంచి $\forall\ n \in N, S(n)$ నిజము

15. $4^n - 3n - 1$ **ను 9 భాగిస్తుంది.**

సాధన: $4^n - 3n - 1$ ను 9 భాగిస్తుంది అనే ప్రవచనాన్ని $S(n)$ అనుకొనుము

$n = 1$అయితే, $4^1 - 3(1) - 1 = 0 = 9 \times 0$ ను 9 భాగిస్తుంది

$\therefore n = 1$ కు $S(n)$ నిజము

$n = k$ కు $S(n)$ ప్రవచనం నిజమనుకొందాం

అంటే $4^k - 3k - 1$ ను 9 భాగిస్తుంది

$4^k - 3k - 1 = 9M$ .... (1)

($\because$ M ఒక పూర్ణసంఖ్య)

$n = k + 1$కు $S(n)$ అనే ప్రవచనం నిజమని చూపాలి

(1) నుండి, $4^k - 3k - 1 = 9M$

$4^k = 9M + 3K + 1$

$4^{k+1} - 3(k+1) - 1 = 4^k .4 - 3k - 3 - 1$

$= (9M + 3K + 1)4 - 3k - 4$

$= 4 \times 9M + 4 \times 3k + 4 - 3k - 4$

$= 4 \times 9M + 3 \times 3k$

$= 4 \times 9M + 9k$

$= 9[4M + k]$

$= 9N$ [$\because$ N ఒక పూర్ణసంఖ్య]

$\therefore$ $n = k + 1$ కు $S(n)$ నిజము

$\therefore$ $n \in N$ యొక్క అన్ని విలువలకు గణితానుగమన సూత్రం నుంచి $S(n)$ నిజము.

16. $3 . 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ ను **17 భాగిస్తుంది**

సాధన: $3 . 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ 17 ను భాగిస్తుంది అనే ప్రవచనాన్ని $S(n)$ అనుకొనుము

$3 . 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = 3.5^3 + 2^4$

$= 3 \times 125 + 16 = 375 + 16$

$= 391 = 17 \times 23$ అనేది 17 చే భాగింపబడుతుంది

$\therefore$ $n = 1$ కు $S(n)$ నిజము

$n = k$ కు ప్రవచనం $S(n)$ నిజమనుకొందాం

అంటే $3.5^{2k+1} + 2^{3k+1}$ అనేది 17 చే భాగింపబడును

$3.5^{2k+1} + 2^{3k+1} = 17M$ .... (1)

($\because$ M ఒక పూర్ణసంఖ్య)

$n = k + 1$కు $S(n)$ అనే ప్రవచనం నిజమని చూపాలి

(1) నుండి, $3.5^{2k+1} + 2^{3k+1} = 17M$

$3.5^{2k+1} = 17M - 2^{3k+1}$

$\therefore\ 3.5^{2(k+1)+1} + -2^{3(k+1)+1}$

$= 3.5^{2k+2+1} + 2^{3k+3+1}$

$= 3.5^{2k+1}.5^2 + 2^{3k+1}.2^3$

$= \left(17M - 2^{3k+1}\right)25 + 2^{3k+1}.8$

$= 17 \times 25M - 25 \times 2^{3k+1} + 8 \times 2^{3k+1}$

$= 17 \times 25M - 17 \times 2^{3k+1}$

$= 17\left[5M - 2^{3k+1}\right]$

$= 17$ N $\qquad [\because N$ ఒక పూర్ణసంఖ్య$]$

$n = k+1$ కు $S(n)$ నిజము

$\therefore\ n \in N$ యొక్క అన్ని విలువలకు గణితానుగమన సూత్రం నుంచి $S(n)$ నిజము.

17. x, y **లు వాస్తవ సంఖ్యలు,** $x \neq y$ **అయితే,** n **అన్ని ధన పూర్ణాంక విలువలకు** $x^n - y^n$ **ను** $x - y$ **భాగిస్తుందని చూపండి.**

సాధన: "$x^n - y^n$ **ను** $(x-y)$ **భాగిస్తుంది. " అనేది ప్రవచనం** $p(n)$ **అనుకుందాం.**

$x^1 - x^1 = x - y$ ని $(x-y)$ **భాగిస్తుంది. కాబట్టి**

$\therefore n = 1$ **కు ప్రవచనం నిజం.**

$n = k$ **కు దత్త ప్రవచనం నిజం అనుకుందాం.**

అంటే $x^k - y^k$ **ను** $x - y$ **భాగిస్తుంది.**

$\therefore x^k - y^k = (x-y)p$ **అయ్యేటట్లు పూర్ణాంకం** p **ఉంటుంది.** **-(1)**

$n = k+1$ **కు దత్త ప్రవచనం నిజం అని చూపాలి.**

అంటే $x^{k+1} - y^{k+1}$ **ను** $x - y$ **భాగిస్తుందని చూపాలి.**

(1) నుంచి

$x^k - y^k = (x-y)p$ **కనుక**

$x^k - y^k + (x-y)p$

$\therefore x^{k+1} = y^k.x + (x-y)px$

$\Rightarrow x^{k+1} - y^{k+1} = y^k.x + (x-y)px - y^{k+1}$

$= (x-y)px + y^k(x-y)$

$= (x-y)\left[px + y^k\right],$

18. m ఒక బేసి సహజసంఖ్య, x, y లు సహజ సంఖ్యలు అయితే $x^m + y^m$ ను $x+y$ భాగిస్తుందని చూపండి.

సాధన: m ఒక బేసి సహజసంఖ్య కాబట్టి $m = 2n+1$ అయ్యేటట్లు ఒక ఋణేతర పూర్ణాంకం n వ్యవస్థితం

$x^{2n+1} + y^{2n+1}$ ను $x+y$ భాగిస్తుంది అనే ప్రవచనము $S(n)$ అనుకొందాం

$P(n)$ అనుకుందాం

$x^1 y^1 = x+y$ ని $x+y$ భాగిస్తుంది

కాబట్టి దత్త ప్రవచనం

$\therefore n = 0$ కు నిజము

$x^{2.1+1} + y^{2.1+1} = x^3 + y^3$

$= (x+y)(x^2 - xy + y^2)$ కాబట్టి

$x^3 + y^3$ ను $x+y$ భాగిస్తుంది

$\therefore n = 1$ అయితే, దత్త ప్రవచనం

$n = k$ కు ప్రవచనం $P(n)$ నిజం అనుకుందాం

అంటే, $x^{2k+1} + y^{2k+1}$ $x+y$

$\therefore x^{2k+1} + y^{2k+1} = (x+y)p$ అయ్యేటట్లు ఒక పూర్ణాంకం p వ్యవస్థితం ..... (1)

$n = k+1$ కు దత్త ప్రవచనం నిజం అని చూపాలి

అంటే, $x^{2k+3} + y^{2k+3}$ $(x+y)$ భాగిస్తుందని చూపాలి

(1) నుంచి $x^{2k+1} + y^{2k+1} = (x+y)p$ కాబట్టి

$x^{2k+1} = (x+y)p - y^{2k+1}$

$\therefore x^{2k+1}.x^2 = (x+y)px^2 - y^{2k+1}.x^2$

$\therefore x^{2k+3} = (x+y)px^2 - y^{2k+1}.x^2$

$\therefore x^{2k+3} + y^{2k+3} = (x+y)px^2 - y^{2k+1}x^2 + y^{2k+3}$

$= (x+y)px^2 - y^{2k+1}\left(x^2 - y^2\right)$

$= (x+y)px^2 - y^{2k+1}(x+y)(x-y)$

$= (x+y)\left[px^2 - y^{2k+1}(x-y)\right]$

ఇక్కడ $\left[px^2 - y^{2k+1}(x-y)\right]$ ఒక పూర్ణాంకం

$\therefore x^{2k+3} + y^{2k+3}$ ను $x+y$ భాగిస్తుంది

$\therefore n = k+1$ కు దత్త ప్రవచనం నిజం

$\therefore$ గణితానుగమన సూత్రం నుంచి n అన్ని ఋణేతర పూర్ణాంక విలువలకు ప్రవచనం $P(n)$ నిజం

అంటే, n అన్ని ఋణేతర పూర్ణాంక విలువలకు

$x^{2k+1} + y^{2n+1}$ ను $x+y$ భాగిస్తుంది

అంటే, m ఒక బేసి సహజసంఖ్య అయితే, $x^m + y^m$ ను $x+y$ భాగిస్తుంది.