ప్రమేయాలు

1. **$f:A\to B, g:B\to C$ లు అన్వేక ప్రమేయాలు అనుకుందాం. అప్పుడు $gof:A\to C$ కూడా అన్వేకం అవుతుంది అని నిరూపింపుము.**

సాధన:

$f:A\to B, g:B\to C$ లు అన్వేకాలు

$\therefore gof:A\to C$

gof అన్వేకం అని చూపటానికి

$a_1,a_2,\in A$ అనుకొనుము.

$\therefore f(a_1), f(a_2)\in B$ మరియు $g(f(a_1)),$

$g(f(a_2))\in C$ అనగా $(gof)(a_1), gof(a_2)\in C$

ఇప్పుడు $(gof)(a_1)=gof(a_2)$

$\Rightarrow g(f(a_1))=g(f(a_2))$

$\Rightarrow f(a_1), f(a_2)(\therefore g$ అన్వేకం)

$a_1=a_2(\therefore f$ అన్వేకము)

అందువలన $gof:A\to C$ అన్వేక ప్రమేయము.

2. **$f:A\to B, g:B\to C$ లు సంగ్రస్త ప్రమేయాలు అనుకుందాం. అప్పుడు $gof:A\to C$ సంగ్రస్త ప్రమేయం అగును అని నిరూపించుము.**

సాధన:

$c\in C$ అనుకుందాం. $g:B\to C$ సంగ్రస్త ప్రమేయం

కాబట్టి $g(b)=c$ అయ్యేటట్లు $b\in B$ వ్యవస్థితం.

$f:A\to B$ సంగ్రస్తం కనుక, $f(a)=b$ అయ్యేటట్లు $a\in A$ ఉంటుంది.

$\therefore c=g(b)=g(f(a))=(gof)(a)$

$\therefore c\in C\Rightarrow (gof)(a)=c$ అయ్యేలా $a\in A$ వ్యవస్థితం.

కనుక $gof:A\to C$ సంగ్రస్తం.

3. **$f:A\to B, g:B\to C$ లుద్విగుణ ప్రమేయాలు అనుకుందాం.అప్పుడు $gof:A\to C$ ద్విగుణ ప్రమేయం అగును అని నిరూపించుము.**

సాధన: 1 ,2

4 $f:A\to B$, $g:B\to C \Rightarrow gof:A\to C$ **అనుకుందాం.** $ho(gof)=(hog)of$ **అని నిరూపించుము.**

సాధన:

$f:A\to B$ మరియు $g:B\to C \Rightarrow gof:A\to C$ ఇప్పుడు $gof:A\to C$ మరియు $h:C\to D$

$\Rightarrow ho(gof):A\to D$

అదే విధంగా $(hog)of:A\to D$

అందువలన $ho(gof)$ మరియు $(hog)of$ ప్రమేయాలు ఒకే ప్రదేశాన్ని, ఒకే సహప్రదేశాన్ని కలిగి ఉన్నాయి.

$a\in A.$ అనుకుందాం.

$$[ho(gof)](a)=h[(gof)(a)]=h[g(f(a))]$$
$$=(hog)[f(a)]=[(hog)of](a)$$
$$\therefore ho(gof)=(hog)of$$

5 $f:A\to B, I_A, I_B$ **లు తత్సమ ప్రమేయాలు అయిన** $foI_A=f=I_B$ **అని చూపండి.**

సాధన:

$f:A\to B$ అనుకుందాం. I_A, I_B లు A,B లలో తత్సమ ప్రమేయాలైతే $foI_A=I_Bof=f$

$I_A:A\to A < f:A\to B$ కనుక A నుంచి B కి foI_A ప్రమేయం.

$f:A\to B, I_B:B\to B$ కనుక A నుంచి B కి I_Bof ప్రమేయం.

foI_A, f, I_Bof ప్రమేయాలకు ప్రదేశం A

అప్పుడు $(foI_A)(a)=f(I_A(a))=f(a)[\because I_A(a)=a]$

$\forall a\in A$ కి

$\therefore foI_A=f \quad -(1)$

$(I_Bof)(a)=I_B(f(a))=f(a)\forall a\in A$

$\therefore I_Bof=f \quad -(2)$

$(1),(2)$ ల నుంచి $foI_A=f=I_Bof.$

6 A,B **లు శూన్యేతర సమితులు.** $f:A\to B$ **ద్విగుణమైతే,** $f^{-1}:B\to A$ **ద్విగుణం అని నిరూపించుము.**

సాధన:

$f:A\to B$ అన్వేకం అనుకుందాం.

స్పష్టంగా $f(A)$ నుంచి A కి f^{-1} ఒక సంబంధం.

$b\in f(A)$ అనుశీరిందాం. f అన్వేకం కనుక $f(a)=b$ అయ్యేటట్లు A లో ఒకే ఒక మూలకం a ఉంటుంది.

అందువల్ల ఇచ్చిన $b\in f(A)$ కు $(a,b)\in f$ అయ్యేటట్లు A లో ఒకే ఒక మూలకం a ఉంటుంది.

అందువల్ల ఇచ్చిన $b\in f(A)$ కు $(b,a)\in f^{-1}$ అయ్యేటట్లు ఒకే ఒక $a\in A$ ఉంటుంది. అందువల్ల

$f(A)$ నుంచి A కు f^{-1} ఒక ప్రమేయం. ఇంకా $f^{-1}(b)=a \Rightarrow f(a)=b$ స్పష్టంగా f^{-1} సంగ్రస్త ప్రమేయం.

$b_1, b_2 \in f(A)$ అయి $f^{-1}(b_1)=f^{-1}(b_2)=a$

అనుకుందాం. అప్పుడు $b_1=f(a)=b_2$

అందువల్ల f^{-1} అన్వేకం, అందువల్ల $f^{-1}: B \to A$ ద్విగుణం.

7 $f: A \to B$ **ద్విగుణ ప్రమేయం అనుకుందాం. అప్పుడు** $fof^{-1}=I_g, f^{-1}of=I_A$ **అని నిరూపించుము.**

సాధన: A నుండి B కి f ద్విగుణ ప్రమేయం కనుక B నుంచి A కి f^{-1} ద్విగుణ ప్రమేయం. అందువల్ల B నుంచి B కి fof^{-1} ద్విగుణం. ఇలాగే A నుంచి A కి $f^{-1}of$ ద్విగుణం. B నుంచి B కి I_B ద్విగుణ ప్రమేయం. A నుంచి A కి I_A ద్విగుణం అని తెలుసు. fof^{-1}, I_B ప్రమేయాల ప్రదేశం ఒక్కటే. అది $B.b \in B$ అనుకుందాం. $f^{-1}(b)=a$ అనుకుందాం. అప్పుడు

$a \in A, f(a)=b$.

ఇంకా $(fof^{-1})(b)=f(f-1(b))$

$=f(a)=b=I_B(b)$

అంటే $(fof^{-1})(b)=I_B(b)$

కనుక $fof^{-1}=I_B$

$f^{-1}of, I_A$ ప్రమేయాలకు ప్రదేశం A

$x \in A$ అనుకుందాం.

$f(x)=y$ అనుకుందాం.

అప్పుడు $y \in B, f^{-1}(y)=x$

ఇంకా $(f^{-1}of)(x)=f^{-1}(f(x))$

$=f^{-1}(y)=x=I_A(x)$

అంటే $(f^{-1}of)(x)=I_A(x)$

అందువల్ల $f^{-1}of=I_A$.

8 $f: A \to B, g: B \to A, gof - I_A, fog=I_B$ **అనుకుందాం. అప్పుడు** f **ద్విగుణ ప్రమేయం మరియు** $g=f^{-1}$ **అని నిరూపించుము.**

సాధన: $i)$ f అన్వేక ప్రమేయమని చూపిద్దాం.

$a_1, a_2 \in A$ అనుకుందాం.

$f(a_1)=f(a_2) \Rightarrow g[f(a_1)]=f[f(a_2)]$

$\Rightarrow (gof)(a_1)=(gof)(a_2))$

$\Rightarrow a_1=a_2 [\because gof]$

$\therefore f$ అన్వేక ప్రమేయం

$ii)$ f సంగ్రస్త ప్రమేయమని చూపిద్దాం.

$b \in B$ అనుకొందాం.

$\therefore b = I_B(b) = fog(b)$

$\Rightarrow b = f\{g(b)\} \Rightarrow f\{g(b)\} = b$

f ప్రమేయం ద్వారా b కొరకు $g(b) \in A$ అయ్యే విధంగా ఒక పూర్వ ప్రతిబింబము వ్యవస్థితము.

$\therefore f$ అన్వేకము మరియు సంగ్రస్తము

$\therefore f$ ద్విగుణ ప్రమేయం

$iii)$ $g = f^{-1}$ ఇప్పుడు అని చూపిద్దాం

$g = f^{-1}$ ప్రమేయాలు ఒకే ప్రదేశం B ని కలిసి ఉన్నాయి.

$n = \in B, g(b) = a$ అనుకుందాం. అప్పుడు $a \in A$,

$f(a) = f(g(a)) = I_B 9b) = b$ కనుక $f^{-1}.(b) = a$

ఇందువల్ల అన్నీ $b \in B$ కు

$g(b) = f^{-1}(b)$ కాబట్టి $g = f^{-1}$

9. $f : A \to B, g : B \to C$ **లు ద్విగుణ ప్రమేయాలు అనుకుందాం. అప్పుడు** $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ **అని నిరూపించుము.**

సాధన: $f : A \to B, g : B \to C$ లు ద్విగుణ ప్రమేయాలు. కనుక A నుంచి B కి gof ద్విగుణ ప్రమేయం. అందువల్ల $(gof)^{-1}, C$ నుంచి A కి ద్విగుణ ప్రమేయం, ఇంకా $f^{-1} : B \to A, g^{-1} : C \to B$ లు కూడా ద్విగుణ ప్రమేయాలు.

అందువల్ల C నుంచి A కు $f^{-1}og^{-1}$ ద్విగుణ ప్రమేయం. $(gof)^{-1}, f^{-1}og^{-1}$ ప్రమేయాల ప్రదేశం C అవుతుంది.

$c \in C$ అనుకుందాం. $g^{-1}(c) = b$ అనుకుందాం. అప్పుడు $b \in B, g(b) = c.f^{-1}(b) = a$ అనుకుందాం.

అప్పుడు $a \in A, f(a) = b$

$(f^{-1}og^{-1})(c) = f^{-1}(g^{-1}(c)) = f^{-1}9b) = a \quad -(1)$

ఇంకా $(gof)(a) = g(f(a)) = g(b) = c \quad -(2)$ అందువల్ల

$(gof)^{-1}(c) = a$

$(1),(2)$ ల నుండి

$(gof)^{-1}(c) = (f^{-1}og^{-1}(c)$

కనుక $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$

అభ్యాసం

అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

. 1. $f(x)=\begin{cases} x+2, x>1 \\ 2, -1\le x\le 1 \\ x-1, -3<x<-1, \end{cases}$ గా నిర్వచిస్తే. కింది విలువలు కనుక్కోండి.

$i) f(3),\ ii) f(0),\ iii) f(-1,5),$
$iv) f(2)+f(-2), v) f(-5)$

సాధన:

$i)\quad f(3)$

$x>1,\quad f(x)=x+2$

$\therefore f(3)=3+2=5$

$ii)\quad f(0)$

$-1\le x\le 1,\quad f(x)=2$

$\therefore f(0)=2$

$iii)\quad f(-1,5)$

$-3<x<-1,\quad f(x)=x-1$

$\therefore f(-1,5)=-1.5-1=-2.5$

$iv)\quad f(2)+(f-2)$

$x>1,\quad f(x)=x+2$

$\therefore f(2)=2+2=4$

$-3<x<-1,\quad . f(x)=x-1$

$\therefore f(-2)=-2-1=-3$

$\therefore (2)+f(-2)=4+(-3)=1$

$v)\quad f(-5)$

$\{x/x\in(-3,\infty)\}\quad f(-5)$

$v)\quad f(-5)$

f ప్రదేశం $\{x/x\in(-3,\infty)\}$ కనుక $f(-5)$ నిర్వచితం కాదు.

2. $f:R-\{\pm1\}\to R$ ను $f(x)=\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$ గా నిర్వచిస్తే, $f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)=2f(x)$ **అని చూపండి.**

సాధన: $f(x)=\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

$$f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \log\left|\frac{1+\frac{2x}{1+x^2}}{1-\frac{2x}{1+x^2}}\right| = \log\left|\frac{x^2 + +2x}{x^2+1-2x}\right|$$

$$= \log\left|\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}\right| = \log\left|\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2\right|$$

$$= 2\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = 2f(x)$$

3. $A = \{-2,-1,-,1,2\}$, $f: A \to B$ **సంగ్రస్త ప్రమేయం** $f(x) = x^2 + x + 1$ **గా నిర్వచిస్తే B ని కనుక్కోండి.**

సాధన: f - వ్యాప్తి

$f(A) = \{f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)\}$

$f(x) = x^2 + x + 1$

$f(-2) = (-2)^2 - 2 + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$

$f(-1) = (-1)^2 - 1 + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$

$f(0) = (0)^2 - 0 + 1 = 1$

$f(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$

$f(2) = 2^2 + 2 + 1 = 4 + 2 + 1 = 7$

f వ్యాప్తి $f(A) = \{1,3,7\}$

f సంగ్రస్తము కావున $f(A) = B$

$\therefore B = \{3,1,7\}$

4. $f: R \to R$ **ను** $f(x) = \frac{4^x}{4^x+2}$ **గా నిర్వచిస్తే,** $f(1-x) = 1 - f(x)$ **అని చూపండి.**

సాధన: $f(x) = \frac{4^x}{4^x+2}$

$$f(1-x)=\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\frac{\frac{4}{4^x}}{\frac{4}{4^x}+2}$$

$$=\frac{4}{4+2.4^x}=\frac{2}{2+4^x} \quad \text{........ (1)}$$

$$1-f(x)=1-\frac{4^x}{4^x+2}=\frac{4^x+2-4^x}{4^x+2}$$

$$=\frac{2}{2+4^x} \quad \text{...... (2)}$$

(1) మరియు (2) ల నుండి $\boxed{f(1-x)=1-f(x)}$

5. $f:\{-1,1\}\to\{0,2\}$ **సంగ్రస్తం;** $f(x)=ax+b$ **గా నిర్వచిస్తే a మరియు b విలువలు కనుక్కోండి.**

సాధన: f ప్రదేశము $=\{-1,1\}$ మరియు $f(x)=ax+b$

$\therefore\ f(-1)=-a+b,\ f(1)=a+b$

సందర్భము - **I :**

$f=\{(-1,0),(1,2)\}$ .... (1) మరియు

$f=\{(-1,(-a+b)),(1,(a+b))\}$ .... (2)

అనుకొనుము

(1) మరియు (2) ల నుండి

$-a+b=0$ మరియు $a+b=2$

$a=b \qquad \Rightarrow b+b=2\ (\because a=b)$

$\Rightarrow 2b=2$

$\boxed{b=1}$; $\boxed{a=1}$

సందర్భము - **II :**

$f=\{(-1,2),(1,0)\}$ .... (3)

$f=\{(-1,a+b),(1,a+b)\}$ .... (4)

(3) మరియు (4) ల నుండి

$= a+b=2,\ a+b=0$

$b=-a$

$\therefore\ -a-a=2$

$\Rightarrow -2a=2$

$\Rightarrow\ a=-1$

$\Rightarrow\ b=-(-1)=1$

$\therefore\ \boxed{a=-1}\ ;\ \boxed{b=1}$

6. $f: R-\{0\}\to R$ ను $f(x)=x^3-\dfrac{1}{x^3}$ **గా నిర్వచిస్తే,** $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$ **అని చూపండి.**

సాధన: $f(x)=x^3-\dfrac{1}{x^3}$ ___ (1)

ఇప్పుడు $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\left(\dfrac{1}{x}\right)^3-\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{x}\right)^3}=\dfrac{1}{x^3}-x^3$ ___ (2)

(1),(2)లను కలుపగా

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)+\left(\frac{1}{x^3}-x^3\right)=0$$

$$\therefore f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

7. $f(x)=\cos(\log x)$ **అయితే**

$f\left(\dfrac{1}{x}\right)f\left(\dfrac{1}{y}\right)-\dfrac{1}{2}\left[f\left(\dfrac{x}{y}\right)+f(xy)\right]=0$ **అని చూపండి.**

సాధన: $f(x)=\cos(\log x)$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)f\left(\frac{1}{y}\right)=\cos\left(\log\frac{1}{x}\right)\cos\left(\log\frac{1}{y}\right)$$

$$=\cos\left(\log x^{-1}\right)\cos\left(\log y^{-1}\right)$$

$$=\left[-\cos(\log x)\right]\left[-\cos(\log y)\right]$$

$$=\cos(\log x)\cos(\log y)$$

$$\therefore\ f\left(\frac{1}{x}\right)\ f\left(\frac{1}{y}\right) = \cos(\log x)\cos(\log y)\ \ .... (1)$$

మరియు $\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x}{y}\right)+f(xy)\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\log\frac{x}{y}\right)+\cos\log(xy)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos(\log x-\log y)+\cos(\log x+\log y)\right]$$

$$= \frac{1}{2}.2\cos(\log x)\cos(\log y)\ \left[\because\ \cos(A-B)+\cos(A+B)=2\cos A\cos B\right]$$

$$= \cos(\log x)\cos(\log y)$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x}{y}\right)+f(xy)\right] = \cos(\log x)\cos(\log y)\ \ ..(2)$$

(1) - (2)

$$f\left(\frac{1}{x}\right)f\left(\frac{1}{y}\right)-\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x}{y}\right)+f(xy)\right]=0$$

8. $f:R\to R\ f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$**, గా నిర్వచిస్తే,** $f(\tan\theta)=\cos 2\theta$ **అని చూపండి.**

సాధన: $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

ఇప్పుడు $(\tan\theta)=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$$=\frac{1-\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{1+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

$$=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\frac{\cos 2\theta}{(1)}$$

$\therefore f(\tan\theta)=\cos 2\theta$

9. $f(x+y)=f(xy)\forall x,y$ **అయితే** f **స్థిరప్రమేయం అని చూపండి.**

సాధన: ఇచ్చిన $f(x+y)=f(xy), x,y\in R$

$x=y=0$ అనుకొంటే

$\Rightarrow f(0) = f(0)$ ____ (1)

అప్పుడు $x = 1, y = 0$

$\Rightarrow f(1) = f(0)$ ____ (2)

$Let\ x = 1, y = 1$

$f(2) = f(1)$ ____ (3)

$(1)(2)(3)$ నుండి

$f(0) = f(1) = f(2)$

$\Rightarrow f(0) = f(2)$

$\Rightarrow f(3) = f(0)$

$\Rightarrow f(4) = f(0)$

:

:

$f(n) = f(0)$

$\therefore f$ అనునది స్థిర ప్రమేయము.

10. $f(y) = \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ మరియు $g(y) = \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}$ **అయితే** $(fog)(y) = y$ **అని చూపండి.**

సాధన: $f(y) = \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ మరియు $g(y) = \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}$

$$\therefore (fog)(y) = f\{g(y)\} = f\left[\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right]$$

$$= \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \Big/ \sqrt{1-\left(\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right)^2}$$

$$= \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \times \frac{\sqrt{1+y^2}}{1+y^2-y^2} = y$$

$$\therefore fog(y) = y$$

11. $f: R \to R$ మరియు $g: R \to R$ లను $f(x) = 2x^2 + 3$ మరియు $g(x) = 3x - 2$ నిర్వహిస్తే

(i) $fog(x)$ (ii) $(gof)(x)$

(iii) $fof(0)$ (iv) $go(fof)(3)$ లను కనుక్కోండి.

సాధన: i) $fog(x) = f[g(x)]$

$= f(3x-2)$

$= 2(3x-2)^2 + 3$

$= 2[9x^2 + 4 - 12x] + 3$

$= 18x^2 + 8 - 24x + 3$

$\therefore (fog)(x) = 18x^2 - 24x + 11$

ii) $(gof)(x) = g\{f(x)\}$

$= g(2x^2 + 3)$

$= 3(2x^2 + 3) - 2$

$6x^2 + 9 - 2$

$= 6x^2 + 7$

$\therefore gof(x) = 6x^2 + 7$

iii) $fof(0) = f\{f(0)\}$

$= f\{2(0)^2 + 3\}$

$= f(3)$

$= 2(3)^2 + 3$

$= 2 \times 9 + 3 = 18 + 3 = 21$

$\therefore fof(0) = 21$

iv) $go(fof)(3) = gof\{f(3)\}$

$= gof(21)$

$= g\{f(21)\}$

$= g\{2(21)^2 + 3\}$

$= g\{2(441) + 3\}$

$= g\{882+3\}$

$= g(885)$

$= 3(885)-2$

$= 2655-2 = 2653$

$\therefore\ go(fof)(3) = 2653$

12. $f(x)=2,\ g(x)=x^2, h(x)=2x\ \forall\ x\in R$, అయితే $[fo(goh)(x)]$ కనుక్కోండి.

సాధన: $[fo(goh)(x)] = fog[h(x)]$

$= fog(2x)$

$= f[g(2x)] = f(4x^2) = 2$

$\therefore\ fo(goh)(x) = 2$

13. $f = \{(1,a),(2,c),(4,d),(3,b)\}$ మరియు

$g^{-1} = \{(2,a),(4,b),(1,c),(3,d)\}$ అయితే

$(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ అని చూపండి.

సాధన: $f = \{(1,a),(2,c),(4,d),(3,b)\}$

$\Rightarrow f^{-1} = \{(a,1),(c,2),(d,4),(b,3)\}$

$g^{-1} = \{(2,a),(4,b),(1,c),(3,d)\}$

$\Rightarrow g^{-1} = \{(a,2),(b,4),(c,1),(d,3)\}$

L.H.S : $gof = \{(1,2),(2,1),(4,3),(3,4)\}$

$gof^{-1} = \{(2,1),(1,2),(3,4),(4,3)\}$

R.H.S : $f^{-1}og^{-1} = \{(2,1),(4,3),(1,2),(3,4)\}$

L.H.S = R.H.S

14. $f:R\to R,\ g:R\to R$ లను $f(x)=2x-3,\ g(x)=x^3+5$ అయితే $(fog)^{-1}(x)$ కనుక్కోండి.

సాధన: $f(x)=2x-3$ మరియు $g(x)=x^3+5$

$fog(x) = f\{g(x)\}$

$= f\left(x^3+5\right)$

$= 2\left(x^3+5\right)-3$

$= 2x^3+10-3$

$= 2x^3+7$

$\therefore\ fog(x) = 2x^3+7$

$y = \log(x)$ అనుకొనుము

$y = 2x^3+7$

$x^3 = \dfrac{y-7}{2}$

$x = \sqrt[3]{\dfrac{y-7}{2}}$

$\therefore\ (fog)^{-1}(x) = \sqrt[3]{\dfrac{y-7}{2}}$

$\therefore\ (fog)^{-1}(x) = \left(\dfrac{x-7}{3}\right)^{1/3}$

15. $A = \{x / -1 \le x \le\}, f(x) = x^2, g(x) = x^3$, **గా నిర్వచిస్తే, కింది ప్రమేయాలలో ఏవి సంగ్రహిస్తాయి?**

$i) f : A \to A \quad ii) g : A \to A$

సాధన: $i) f : A \to A$

$\therefore A = \{x / -1 \le x \le\}, f(x) = x^2$

$\Rightarrow f(x)$ అనేది A నుంచి A కు ప్రమేయం

$(i.e.,) f : A \to A$

$y \in A$ అనుకొందాం.

$f(x) = y$ అయ్యేటట్లుగా $x^2 = y$ అవుతుంది.

$\Rightarrow x = \sqrt{y}$

$y = -1$ అయితే $x = \sqrt{-1} \notin A$

కనుక $f : A \to A$ సంగ్రస్త ప్రమేయం కాదు.

$ii)\ g : A \to A$

$\therefore A = \{x / -1 \le x \le 1\}.g(x) = x^3$

$\Rightarrow g : A \to A$

$y \in A$ అనుకొందాం.

అప్పుడు $g(x) = y \Rightarrow x^3 = y$

$\Rightarrow x = y^{\frac{1}{3}} \in A$

$y = -1$ అయితే $x = -1 \in A$

$y = 0$ అయితే $x = 0 \in A$

$y = 1$ అయితే $x = 1 \in A$

$\therefore g : A \to A$ సంగ్రస్త ప్రమేయం

16. కింది వాటిలో ఏవి సంగ్రస్తం, అన్వేకం, ద్విగుణం అవుతాయో నిర్ణయించండి.

$i)\ f : R \to f(x) = \dfrac{2x+1}{3}$ **గా నిర్వచించాం.**

సాధన:

$f(x) = \dfrac{2x+1}{3}$

$x_1, x_2 \in R$

$\therefore f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow \dfrac{2x_1+1}{3} = \dfrac{2x_2+1}{3}$

$\Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$

$\Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \forall x_1, x_2 \in R$

$f(x) = \dfrac{2x+1}{3}, f : R \to R$ అన్వేకం

ప్రతీ $y \in R$ (సహప్రదేశం)కు, $y = \dfrac{2x+1}{3}$

$\Rightarrow x = \dfrac{3y-1}{2} \in R$ వ్యవస్థితం

$$f(x) = \frac{2x+1}{3}$$

$$= \frac{2\left(\frac{3y-1}{2}\right)+1}{3} = y$$

$\therefore f : R \to R$ సంగ్రస్తం

$\therefore f: R \to R,$ కు $f(x) = \dfrac{2x+1}{3}$ ద్విగుణ ప్రమేయం

$ii)\quad f: R \to (0,\infty)$ **ను** $f(x) = 2^x$ **గా నిర్వచించాం.**

సాధన:

$x_1, x_2 \in R$

$\therefore f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow 2^{x_1} = 2^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \; \forall \, x_1, x_2 \in R$

$\therefore f(x) = 2^x, f: R \to (0,\infty)$ అన్వేకం

$y \in (0,\infty), y = 2^x \Rightarrow x = \log_2(y)$

అప్పుడు $f(x) = 2^x$

$= 2^{\log_2(y)} = y$

$\therefore f: R \to (0,\infty)$ సంగ్రస్తం

$\therefore f: R \to (0,\infty)\; f(x) = 2^x$ ద్విగుణ ప్రమేయం.

$iii)\quad f: (0,\infty) \to R$ **ను** $f(x) = \log_e x$ **గా నిర్వచించాం.**

సాధన:

$x_1, x_2 \in (0,\infty)$

$\therefore f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow \log_e(x_1) = \log_e$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \forall x_1, x_2 \in (0,\infty)$

$\therefore f(x)$ అన్వేకం

$y \in R$

$y = \log_e x \Rightarrow x = e^y$

అప్పుడు $f(x) = \log_e x$

$= \log_e(e^y) = \log_e e = y(1) = y$

$\therefore f: (0,\infty) \to$ సంగ్రస్తం

$\therefore F$ ద్విగుణ ప్రమేయం.

$iv)\quad (0,\infty) \to [0,\infty)$ **ను** $f(x) = x^2$ **గా నిర్వచించాం.**

సాధన:

$x_1, x_2 \in (0,\infty)(i.e.,) f$ ప్రదేశం.

$f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow x_1^2 = x_2^2$

$\Rightarrow x_1 = x_2 \qquad \therefore x_1, x_2 \geq 0$

$\therefore f(x)=x^2, f:\{0,\infty)\to\{0,\infty)$ అన్వేకం

$y\in(0,\infty)$, (సహప్రదేశం)కు

$y=x^2 \Rightarrow x=\sqrt{y}, \ \therefore y\ge 0$

అప్పుడు $f(x)=x^2$

$$=\left(\sqrt{y}\right)^2=y$$

$\therefore f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ సంగ్రస్తం

$\therefore f$ ద్విగుణ ప్రమేయం

$v)$ $f:R\to[0,\infty)$ ను $f(x)=x^2$ గా నిర్వచించాం.

సాధన:

$x_1, x_2\in R$

$f(x_1)=f(x_2)$

$\Rightarrow x_1^2=x_2^2$

$\Rightarrow x_1=\pm x_2, \qquad \therefore x_1, x_2\in R$

f అన్వేకం కాదు.

$y\in[0,\infty)$

$y=x^2\Rightarrow x=\sqrt{y}, y\in[0,\infty)$

అప్పుడు $f(x)=x^2$

$$=\left(\sqrt{y}\right)^2$$

$$=y$$

$\therefore f:R\to(0,\infty)$ సంగ్రస్త.

కనుక f ద్విగుణ ప్రమేయం కాదు.

$vi)$ $f:R\to R$ ను $f(x)=x^2$ గా నిర్వచించాం.

సాధన.

$x_1, x_2\in R(f$ ప్రదేశం)

$\therefore f(x_1)=f(x_2)$

$\Rightarrow x_1^2=x_2^2$

$\Rightarrow x_1=\pm x_2, \qquad \therefore x_1, x_2\in R$

$\therefore f(x)$ అన్వేకం కాదు.

$(-\infty,0)$ సహప్రదేశంలో ఉన్న మూలకానికి పూర్వబింబం లేదు. కనుక f సంగ్రస్తం కాదు.

$\therefore f$ ద్విగుణ ప్రమేయం కాదు.

17. $f(x)=\frac{1}{x}, g(x)=\sqrt{x}$ అయితే $x\in(0,\infty)$ కు $(gof)(x)$ కనుక్కోండి.

సాధన:

$$f(x)=\frac{1}{x}, g(x)=\sqrt{x}, \forall x\in(0,\infty)$$

$$(gof)(x)=g(f(x))$$

$$=g\left(\frac{1}{x}\right), \because f(x)=\frac{1}{x}$$

$$-\sqrt{\frac{1}{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}, \because g(x)=\sqrt{x}$$

$$\therefore (gof)(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

18. $f(y)=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}, g(y)=\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$ అయితే $(fog)(y)=y$ అని చూపండి.

సాధన: $f(y)=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}, g(y)=\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$

ఇప్పుడు

$$(fog)(y)=f(g(y)$$

$$=f\left(\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right), \because g(y)=\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$=\frac{\left(\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right)}}, \because f(y)=\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$=\frac{y}{\sqrt{1+y^2)-y^2}}=y$$

$$\therefore (fog)(y)=y$$

19. $f(x)=1+x+x^2+.........(x)<1$ అయితే $f^{-1}(x)=\frac{x-1}{x}$ అని చూపండి.

సాధన: $f(x)=1+x+x^2+.........$

$a=1, r=x \qquad 5_\infty = \dfrac{a}{1-r}$

$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$

$f(x)=y \Rightarrow x=f^{-1}(y)$

$\dfrac{1}{1-x}=y$

$\dfrac{1}{y}=1-x \Rightarrow x=1-\dfrac{1}{y}$

$x=\dfrac{y-1}{y}$

$f^{-1}(y)=\dfrac{y-1}{y}$

$f^{-1}(y)=\dfrac{x-1}{x}$

20.కింది వాస్తవ మూల్య ప్రమేయాల ప్రదేశాలు కనుక్కోండి.

a) $i)\quad f(x)=\dfrac{1}{(x^2-1)(x+3)}$

సాధన:

$f(x)=\dfrac{1}{(x^2-1)(x+3)} \in R$

$\Leftrightarrow (x^2-1)(x+3)\neq 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x+3)\neq 0$

$\Leftrightarrow x\neq -1,1,-3$

$\therefore f$ ప్రదేశం $=R-\{-1,1,-3\}$

$ii)\quad f(x)=\dfrac{2x^2-5x+7}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

సాధన:

$f(x)=\dfrac{2x^2-5x+7}{(x-1)(x-2)(x-3)} \in R$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x-3)\neq 0$

$\Leftrightarrow x\neq 1, x\neq 2, x\neq 3$

$\therefore f$ ప్రదేశం $=R-\{1,2,3\}$

కింది వాస్తవ మూల్య ప్రమేయాలకు ప్రదేశాలు కనుక్కోండి.

$i)\quad f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$

సాధన:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} \in R$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup [2, \infty]$$

$\therefore f$ ప్రదేశం $R - (1, 2)$

$ii)$ $f(x) = \log(x^2 - 4x + 3)$

సాధన:

$$f(x) = \log(x^2 - 4x + 3) \in R$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 >$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3) > 0$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$$

$\therefore f$ ప్రదేశం $R - [1, 3]$

$iii)$ $f(x) = \sqrt{\dfrac{4 - x^2}{[x] + 2}}$

సాధన:

$$f(x) = \sqrt{\frac{4 - x^2}{[x] + 2}} \in R$$

సందర్భం $(i) 4 - x^2 \geq 0$ మరియు $[0] + 2 > 0$

(లేదా)

సందర్భం $(ii) 4 - x^2 \geq 0, [0] + 2 > 0$

సందర్భం $(i) 4 - x^2 \geq 0, [0] + 2 > 0$

$$\Leftrightarrow (2 - x)(2 + 2) \geq 0, [x] > -2$$

$$\Leftrightarrow x \in [-2, 2], x \in [-1, \infty]$$

$$\Leftrightarrow x \in [-1, 2] \qquad -(1)$$

సందర్భం (ii)

$4 - x^2 \leq 0$ మరియు $[x] + 2 < 0$

$$\Leftrightarrow (2 + x)(2 - x) \leq 0, [x] < -2$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup [2, \infty], x \in (-\infty, -2)$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \qquad -(2)$$

$(1), (2)$ ల నుండి

f ప్రదేశం $(-\infty, -2) \cup [-1, 2]$

$iv)\quad f(x)=\dfrac{1}{x+|x|}$

సాధన:

$$f(x)=\frac{1}{x+|x|}\in R$$

$\Leftrightarrow x+|x|\neq 0$

$\Leftrightarrow x\in(0,\infty)$

$\therefore |x|=x_1$ అయినప్పుడు $x\geq 0$

$|x|=-x$ అయినప్పుడు $x<0$

$\therefore f$ ప్రదేశం $(0,\infty)$

v) $f(x)=\sqrt{\log_{10}\left(\dfrac{3-x}{x}\right)}\in R$

$\log_{10}\left(\dfrac{3-x}{x}\right)\geq 0\quad \dfrac{3-x}{x}>0$

$\Rightarrow \dfrac{3-x}{x}\geq 10^{\circ}=1\quad 3-x>0,\ x>0$

$\Rightarrow 3-x\geq x\qquad 0<x<3$

$\Rightarrow x\leq \dfrac{3}{2}\qquad 0<x<3$

$\Rightarrow x\in\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right]\cap(0,3)=\left(0,\dfrac{3}{2}\right]$

$\therefore f=\left(0,\dfrac{3}{2}\right]$

2. $i)\quad f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$

సాధన:

$$f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}\in R$$

$\Leftrightarrow x^2-3x+2\geq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)\geq 0$

$\Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup[2,\infty]$

$\therefore f$ ప్రదేశం $R-(1,2)$

$ii) \quad f(x) = \log(x^2 - 4x + 3)$

సాధన:

$$f(x) = \log(x^2 - 4x + 3) \in R$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 >$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3) > 0$$
$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$$

$\therefore f$ ప్రదేశం $R - [1,3]$

$iii) \quad f(x) = \sqrt{\dfrac{4-x^2}{[x]+2}}$

సాధన:

$$f(x) = \sqrt{\frac{4-x^2}{[x]+2}} \in R$$

సందర్భం $(i) 4 - x^2 \geq 0$ మరియు $[0] + 2 > 0$

(లేదా)

సందర్భం $(ii) 4 - x^2 \geq 0, [0] + 2 > 0$

సందర్భం $(i) 4 - x^2 \geq 0, [0] + 2 > 0$

$$\Leftrightarrow (2-x)(2+2) \geq 0, [x] > -2$$
$$\Leftrightarrow x \in [-2, 2], x \in [-1, \infty]$$
$$\Leftrightarrow x \in [-1, 2] \qquad -(1)$$

సందర్భం (ii)

$4 - x^2 \leq 0$ మరియు $[x] + 2 < 0$

$$\Leftrightarrow (2+x)(2-x) \leq 0, [x] < -2$$
$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup [2, \infty], x \in (-\infty, -2)$$
$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \qquad -(2)$$

$(1), (2)$ ల నుండి

f ప్రదేశం $(-\infty, -2) \cup [-1, 2]$

$iv) \quad f(x) = \dfrac{1}{x + |x|}$

సాధన:

$$f(x) = \frac{1}{x + |x|} \in R$$

$\Leftrightarrow x+|x| \neq 0$

$\Leftrightarrow x \in (0,\infty)$

$\therefore |x| = x_1$ అయినప్పుడు $x \geq 0$

$|x| = -x$ అయినప్పుడు $x < 0$

$\therefore f$ ప్రదేశం $(0,\infty)$

3. $i)$ $f(x) = \dfrac{1}{6x - x^2 - 5}$

సాధన:

$$f(x) = \frac{1}{6x - x^2 - 5} = \frac{1}{(x-1)(5-x)} \in R$$

$\Leftrightarrow (x-1)(5-x) \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 1,5$

$\therefore f$ ప్రదేశం $R = \{1,5\}$

$ii)$ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} (a > 0)$

సాధన:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} (a > 0) \in R$$

$\Leftrightarrow x^2 - a^2 > 0$

$\Leftrightarrow (x+a)(x-a) > 0$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty,-a) \cup (a,\infty)$

$\therefore f$ ప్రదేశం

$(-\infty,-a) \cup (a,\infty) = R - [-a,a]$

$iii)$ $f(x) = \sqrt{(x+2)(x-3)}$

సాధన:

$$f(x) = \sqrt{(x+2)(x-3)} \in R$$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-3) \geq 0$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty,-2) \cup [3,\infty]$

$\therefore f$ ప్రేదేశం.

$(-\infty,-2) \cup (3,\infty) = R - [-2,3]$

$iv)$ $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$

సాధన: $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}} \in R$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0, x^2 - 3x + 2 > 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-1) \geq 0, (x-1)(x-2) > 0$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1.\infty),$

$x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$

$\Leftrightarrow x \in (R - (-1,1)) \cap (R - [1,2])$

$\Leftrightarrow x \in R - \{(-1,1) \cup [1,2]\}$

$\Leftrightarrow x \in R - (-1, 2]$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup (2, \infty)$

$\therefore f$ ప్రదేశం.

$(-\infty, -1) \cup (2, \infty) = R - [-1, 2]$

v) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x| - x}}$

సాధన: $(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x| - x}} \in R$

$\Leftrightarrow |x| - x > o$

$\Leftrightarrow |x| > x$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 0)$

$\therefore f$ ప్రదేశం $(-\infty, 0)$

b) కింది వాస్తవ మూల్య ప్రమేయాల ప్రదేశాలు, వ్యాప్తులు కనుక్కోండి.

క్రింది వాస్తవమూల్య ప్రమేయాల వ్యాప్తులు కనుక్కోండి.

i. $f(x) = \log|4 - x^2|$

f ప్రదేశం $= R - \{-2, 2\}$

$\therefore$ వ్యాప్తి = R

ii. $f(x) = \sqrt{[x] - x}$

f ప్రదేశం = Z ; f వ్యాప్తి $= \{0\}$

iii. $f(x) = \dfrac{\sin \pi[x]}{1 + [x]^2}$

f ప్రదేశం = R, f వ్యాప్తి $= \{0\}$

$\because \sin n\pi = 0, \forall n \in Z$

iv. $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$

f ప్రదేశం $= R-\{2\}$, f వ్యాప్తి $=R-\{4\}$

v. $f\left(x\right)=\sqrt{9+x^2}$

$9+x^2>0,\ \forall\, x\in R$

$\therefore f$ ప్రదేశం $=$ R

f వ్యాప్తి = $[3,\infty)$

$vi)\quad f(x)=\dfrac{x}{2-3x}$

సాధన:

$f(x)=\dfrac{x}{2-3x}\in R$

$\Leftrightarrow 2-3x\neq 0$

$\Leftrightarrow x\neq\dfrac{2}{3}$

$\therefore f$ ప్రదేశం $R-\left\{\dfrac{2}{3}\right\} y=f(x)=\dfrac{x}{2-3x}$ అనుకోండి.

$\Rightarrow y=\dfrac{x}{2-3x}$

$\Rightarrow 2y-3xy=x$

$\Rightarrow 2y=x(1+3y)$

$\therefore x=\dfrac{2y}{1+3y}$

$\therefore x\in R-\left[\dfrac{2}{3}\right], 1+3y\neq 0\Rightarrow y\neq-\dfrac{1}{3}$

$\therefore f$ వ్యాప్తి $R-\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$

$vii)\quad f(x)=|x|+|1+x|$

సాధన:

$f(x)=|x|+|1+x|\in R$

$\Leftrightarrow x\in R$

$\therefore f$ ప్రదేశం R

$\therefore |x| = x, x \geq 0$ అయినప్పుడు

$= -x, x < 0$ అయినప్పుడు

$|1+x| = 1+x, x \geq -1$ అయినప్పుడు

$= -(1+x), x < -1$ అయినప్పుడు

$x = 0, f(0) = |0| + |1+0| = 1$

$x = 1, f(1) = |1| + |1+1| = 1+2 = 3$

$x = 2, f(2) = |2| + |1+2)| = 2+3 = 5$

$x = -2, f(-2) = |-2| + |1+(-2)| = 2+1 = 3$

$x = -1, f(-1) = |-1| + |1+(-1)| = 1+0 = 1$

$\therefore f$ వ్యాప్తి $[1, \infty]$

viii) $f(x) = \dfrac{\tan \pi[x]}{1 + sin\pi[x] + [x^2]}$

సాధన: $f(x) = \dfrac{\tan \pi[x]}{1 + sin\pi[x] + [x^2]} \in R$

$\Leftrightarrow x \in R, \therefore [x]$ పూర్ణాంకం కనుక $\tan \pi[x] \sin \pi[x]$ లు $\forall x \in R$కు సున్నాలు అవుతాయి.

$\therefore f$ ప్రదేశం R

వ్యాప్తి= $\{0\}$

ix) $f(x) = \dfrac{x}{2-3x}$

సాధన: $f(x) = \dfrac{x}{2-3x} \in R$

$\Leftrightarrow 2 - 3x \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq \dfrac{2}{3}$

$\therefore f$ ప్రదేశం $R - \left\{\dfrac{2}{3}\right\} y = f(x) = \dfrac{x}{2-3x}$ అనుకోండి.

$\Rightarrow y = \dfrac{x}{2-3x}$

$\Rightarrow 2y - 3xy = x$

$\Rightarrow 2y = x(1+3y)$

$\therefore x = \dfrac{2y}{1+3y}$

$\therefore x \in R - \left[\dfrac{2}{3}\right], 1+3y \neq 0 \Rightarrow y \neq -\dfrac{1}{3}$

$\therefore f$ వ్యాప్తి $R - \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$

iii) $f(x) = |x| + |1+x|$

సాధన: $f(x) = |x| + |1+x| \in R$

$\Leftrightarrow x \in R$

$\therefore f$ ప్రదేశం R

$\therefore |x| = x, x \geq 0$ అయినప్పుడు

$= -x, x < 0$ అయినప్పుడు

$|1+x| = 1+x, x \geq -1$ అయినప్పుడు

$= -(1+x), x < -1$ అయినప్పుడు

$x = 0, f(0) = |0| + |1+0| = 1$

$x = 1, f(1) = |1| + |1+1| = 1+2 = 3$

$x = 2, f(2) = |2| + |1+2)| = 2+3 = 5$

$x = -2, f(-2) = |-2| + |1+(-2)| = 2+1 = 3$

$x = -1, f(-1) = |-1| + |1+(-1)| = 1+0 = 1$

$\therefore f$ వ్యాప్తి $[1, \infty]$

స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. $g = \{(1,1),(2,3),(3,5),(4,7)\}$. **ఇది** $A = \{1,2,3,4\}$ **నుంచి** $B = \{1,3,5,7\}$ **కు ప్రమేయం అవుతుందా?** $g(x) = ax + b$ **గా నిర్వచిస్తే** a, b **విలువలు కనుక్కోండి.**

సాధన:

$A = \{1,2,3,4\}; B = \{1,3,5,7\}$

$g = \{(1,1),(2,3),(3,5),(4,7)\}$

కనుక $g(1) = 1, g(2) = 3, g(3) = 5, g(4) = 7$

A లో ప్రతీ $a \in A$ కి అనుగుణంగా $(a, b) \in g$ అయ్యేటట్లు B లో ఒకే ఒక్క b వ్యవస్థితం

అవుతుంది. కనుక b ప్రమేయం అవుతుంది.

ఇప్పుడు $g(x) = ax + b$

$g(1) = a(1) + b = 1 \Rightarrow a + b = 1 \quad (1)$

$g(2) = a(2) + b = 3 \Rightarrow 2a + b = 3 \quad (2)$

$(1), (2)$ ను సాధించగా $a = 2, b = -1$.

2. $f(x) = e^x$ **మరియు** $g(x) = \log_e x$ **అయితే, .** $fog = gof$ **అని చూపండి.** f^{-1} **మరియు** g^{-1} **లు కనుక్కోండి.**

సాధన: (i) $fog(x) = f[g(x)]$ $\quad$ $gof(x) = g[f(x)]$

$= f(\log_e x)$ $\quad$ $= g(e^x)$

$= e^{\log_e x}$ $\quad$ $= e^{\log_e e^x}$

$= x$ $\quad$ $= x$

$(\because a^{\log_a m} = m)$ $\quad$ $(\because \log_e e = 1)$

$\therefore \boxed{fog = gof}$

(ii) $f(x) = e^x$ $\quad$ $g(x) = \log_e x$

$y = f(x)$ అనుకొనుము $\quad$ $y = g(x)$ అనుకొనుము

$\Rightarrow f^{-1}(y) = x$ $\quad$ $\Rightarrow y = \log_e x$

$\Rightarrow y = e^x$ $\quad$ $\Rightarrow x = e^y$

$\Rightarrow \log_e y = x$ $\quad$ $g(y) = e^y$

$\therefore f^{-1}(y) = \log_e y$ $\quad$ $\therefore \boxed{g^{-1}(x) = e^x}$

$\boxed{f^{-1}(x) = \log_e y}$

3. $f : R \to R$ **ను** $f(x) = \dfrac{3^x + 3^{-x}}{2}$ **గా నిర్వచిస్తే,** $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ **అని చూపండి.**

సాధన:

$$f : R \to R, f(x) = \frac{3^x + 3^{-x}}{2}$$

ఇప్పుడు $f(x+y) = \dfrac{3^{x+y} + 3^{-(x+y)}}{2}$

$= \frac{3^x.3^y + 3^{-x}.3^{-y}}{2} \quad -(1)$

$f(x-y) = \frac{3^{x-y} + 3^{-(x-y)}}{2}$

$= \frac{3^x.3^{-y} + 3^{-x}.3^y}{2} \quad -(2)$

$LHS = f(x+1) + f(x-y)$

$= \frac{3^x.3^y + 3^{-x}.3^{-y} + 3^x.3^{-y} + 3^{-x}.3^y}{2}$

$= \frac{1}{2}\left[3^x\left(3^y + 3^{-y}\right) + 3^{-x}\left(3^{-y} + 3^y\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left(3^x + 3^{-x}\right)\left(3^y + 3^{-y}\right)$

$= 2\left[\left(\frac{3^x + 3^{-x}}{2}\right)\left(\frac{3^y + 3^{-y}}{2}\right)\right]$

$2f(x).f(y)$

$\therefore f(x+y) + f(x-y) = 2f(x).f(y).$

4. $f(x) = e^x, g(x) = \log_e x$ **అయితే** $fog = gof$ **అని చూపండి.** f^{-1}, g^{-1} **లు కనుక్కోండి.**

సాధన: $f(x) = e^x, g(x) = \log_e x$

ఇప్పుడు

$(fog)(x) \;= f(g(x))$

$= f(\log_e x), \therefore g(x) = \log_e{}^x$

$= e^{(\log_e x)} = x$

$\therefore (fog)(x) = x \qquad -(1)$

మరియు

$(gof)(x) = g(f(x))$

$= g(e^x) \qquad \therefore f(x) = e^x$

$= \log_e(e^x) \therefore g(x) = \log_e x$

$= x\log_e(e) = x(1) = x$

$\therefore (gof)(x) = x \qquad -(2)$

$(1),(2)$ ల నుండి $fog = gof$

$f(x) = e^x$

$y = f(x) = e^x$ అనుకోండి.

$\Rightarrow x = f^{-1}(y), y = e^x \Rightarrow x = \log_e(y)$

$\therefore f^{-1}(y) = \log_e(y) \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_e(x)$

$y = g(x) = \log_e(x)$ అనుకోండి.

$\therefore y = g(x) \Rightarrow x = g^{-1}(y)$

$\therefore y = \log_e(x) \Rightarrow x = e^y$

$\therefore g^{-1}9(y) = e^y$

$\Rightarrow g^{-1}9(x) = e^x$

$\therefore f^{-1}(x), = \log_e(x), g^{-1}(x) = e^x$

5.. $f : R \to R, gLR \to R$ **లను** $f(x) = 2x^2 + 3, g(x) - 3x - 2$ **గా నిర్వచిస్తే**

$i)\ (fog)(x),\ ii)\ (gof)\ (x),\ iii)\ fof\ (o),$

$iv)\ go(fof)(3)$ **లు కనుక్కోండి.**

సాధన: $f : R \to R, g : R \to R$

$f(x) = 2x^2 + 3; g(x) = 3x - 2$

$i)\ (fog)(x) = f(g(x))$

$= f(3x-2), \therefore g(x) = 3x - 2$

$= f(3x-2)^2 + 3, \therefore f(x) = 2x^2 + 3$

$= 2(9x^2 - 12x + 4) + 3$

$= 18x^2 - 24x + 8 + 3$

$= 18x^2 - 24x + 11$

$ii)\ (gof)(x) = g(f(x))$

$= g(2x^2 + 3), \therefore f(x) = 2x^2 + 3$

$= 3(2x^2 + 3) - 2, \therefore g(x) = 3x - 2$

$= 6x^2 + 9 - 1$

$= 6x^2 + 7$

$iii)\ (fof)(0) = f(f(0))$

$= f(2(0) + 3) \therefore f(x) = 2x^2 + 3$

$= f(3)$

$= 2(3)^2 + 3$

$= 18 + 3 = 21$

$iv)\ go(fof)(3)$

$= go(f(f(3)))$

$= go(f(2.3^2 + 3)), \therefore f(x) = 2x^2 + 3$

$= go(f(21))$

$= g(f(21))$

$= g(2 x 21^2 + 3)$

$= g(885)$

$= 3(885) - 2, \therefore g(x) = 3x - 2$

$= 2653$

6. $f : R \to R, g : R \to R$ **లను** $f(x) = 3x - 1, g(x) = x^2 + 1$ **లుగా నిర్వచిస్తే**

$i)\ (fof)(x^2 + 1),\ ii)\ fog(2),\ \ iii)\ gof(2a - 3)$ **లు కనుక్కోండి.**

సాధన:

$f : R \to R, g : R \to R$

$f(x) = 3x - 1,\ g(x) = x^2 + 1$

$i)\quad (fof)(x^2 + 1)$

$= f(f(x^2 + 1))$

$= f[3(x^2 + 1) - 1] \therefore f(x) = 3x - 1,$

$= f(3x^2 + 2)$

$= 3(3x^2 + 2) - 1$

$= 9x^2 + 5$

$ii)\quad (fog)(2)$

$= f(g(2))$

$= f(2^2 + 1), \therefore g(x) = x^2 + 1$

$= f(5)$

$= 3(5) - 1 = 14 \therefore f(x) = 3x - 1$

$iii)\quad (gof)(2a - 3)$

$= g(f(2a - 3))$

$= g[3(2a - 3) - 1] \therefore f(x) = 3x - 1$

$= g(6a - 10)$

$= (6a - 10)^2 + 1 \therefore g(x) = x^2 + 1$

$= 36a^2 - 120a + 100 + 1$

$= 36a^2 - 120a + 101$

7. కింది ప్రమేయాల విలోమాలు కనుక్కోండి.

$i) a,b \in R, f : R \to R$ ని $f(x) = ax + b$

$(a \neq 0)$ గా నిర్వచిస్తే.

సాధన:

$a,b \in R, f : R \to R$ మరియు

$f(x) = ax + b, a \neq 0$

$y = f(x) = ax + b$ అనుకోండి.

$\Rightarrow y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y) \qquad -(i)$

$y = ax + b$

$\Rightarrow x = \dfrac{y-b}{a} \qquad -(ii)$

$(i),(ii)$ ల నుండి

$f^{-1}(y) = \dfrac{y-b}{a} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a}$

$ii)$ $f : R \to (0,\infty)$ ని $f(x) - 5^x$ గా నిర్వచిస్తే

సాధన:

$f : R \to (0,\infty)$ $f(x) - 5^x$

$y = f(x) = 5^x$

$\therefore y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y) \qquad -(i)$

$y = 5^x$

$\Rightarrow \log_5(y) = x \qquad -(ii)$

$(i),(ii)$ ల నుండి

$f^{-1} = \log_5(y) \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_5$

$iii)$ $f : (0,\infty) \to R$ ని $f(x) = \log_2 x$ గా నిర్వచిస్తే,

సాధన:

$f : (0,\infty) \to R$ $f(x) = \log_2 x$

$y = f(x) = \log_2(x)$ అనుకోండి.

$\therefore y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y) \qquad -(i)$

$y = \log_2(x)$

$\Rightarrow x - 2^y \qquad -(ii)$

$(i),(ii)$ ల నుండి

$f^{-1}(y) = 2^y \Rightarrow f^{-1}(x) = 2^x$

7. $f(x)=1+x+x^2+.........(x)<1$ **అయితే** $f^{-1}(x)=\frac{x-1}{x}$ **అని చూపండి.**

సాధన.

$$f(x)=1+x+x^2+.........$$

$$a=1, r=x \qquad 5_{\infty}=\frac{a}{1-r}$$

$$f(x)=\frac{1}{1-x}$$

$$f(x)=y \Rightarrow x=f^{-1}(y)$$

$$\frac{1}{1-x}=y$$

$$\frac{1}{y}=1-x \Rightarrow x=1-\frac{1}{y}$$

$$x=\frac{y-1}{y}$$

$$f^{-1}(y)=\frac{y-1}{y}$$

$$f^{-1}(y)=\frac{x-1}{x}$$

8. $:[1,\infty)\to[1,\infty), f(x)=2^{x(x-1)}$ **గా నిర్వచిస్తే** $f^{-1}(x)$ **కనుక్కోండి.**

సాధన:

$$f(x)=2^{x(x-1)}$$

$$f(x)=y \Rightarrow x=f^{-1}(g)$$

$$2^{x(x-1)}=y \begin{pmatrix} \therefore a^2=N \\ \log_a^N=x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \log_2^y=x(x-1)$$

$$x^2-x-\log_2^y=0$$

$a = 1, b = -1, c = -\log_2^y$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \dfrac{+1 \pm \sqrt{1 + 4\log_2^y}}{2}$

$f^{-1}(y) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4\log_2^y}}{2}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4\log_2^x}}{2}$

$\therefore :[1, \infty) \to [1, \infty)$

ఇప్పుడు $f^{-1}(x) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4\log_2^x}}{2}$

9. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}, x \neq \pm 1$ **అయితే** $(fof^{-1})(x) = x$ **అని చూపండి.**

సాధన:

$f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}, x \neq \pm 1$

$f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ అనుకోండి.

$f = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y) \qquad -(i)$

$y = \dfrac{x-1}{x+2}$

$\Rightarrow \dfrac{y+1}{y-1} = \dfrac{(x-1)+(x+1)}{(x-1)-(x+1)}$

$\Rightarrow \dfrac{y+1}{y-1} = \dfrac{2x}{-2} \Rightarrow x = \dfrac{y+1}{1-y}$

$(i), (ii)$ ల నుండి

$f^{-1}(f) = \dfrac{y+1}{1-y}$

$\Rightarrow f^{-1}(f) = \dfrac{1+x}{1-x} \qquad -(iii)$

ఇప్పుడు $(fof^{-1})(x)$

$= f(f^{-1}9x))$

$= f\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) \therefore f^{-1}(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$

$$= \frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-1}{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+1} \therefore f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

$$= \frac{(1+x)-(1-x)}{(1+x)-(1-x)} = \frac{2x}{x} = x$$

$$\therefore fof^{-1}(x) = x$$

10. $A = \{1,2,3\}, B = \{\alpha, \beta, \gamma\}, C = \{p,q,r\}$ **అయితే** $f : A \to B, g : B \to C$ **లను**

$f = \{(1,\alpha),(2,\beta),(3,\gamma)\}$,

$g = \{(\alpha,q),(\beta,r),\ (,p)\}$ **లుగా నిర్వచిస్తే,**

f, g **లు ద్విగుణ ప్రమేయాలు అని,** $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ **అని చూపండి.**

సాధన:

$A = \{1,2,3\}, B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$,

$f : A \to B, f = \{(1,\alpha),(2,\beta),(3,\gamma)\}$

$\Rightarrow f(1) = \alpha, f(2) = \gamma, f(3) = \beta$

$\therefore A$ లో ఉన్న విభిన్న మూలకాలకు B లో విభిన్న $f-$ ప్రతిబింబాలున్నవి. కనుక $f : A \to B$ అన్వేక ప్రమేయం f వ్యాప్తి $= \{\alpha, \gamma, \beta\} = B$ (సహప్రదేశం)

కనుక $f : A \to B$ సంగ్రస్తం

$\therefore f : A \to B$ ద్విగుణ ప్రమేయం

$B = \{\alpha, \gamma, \beta\}, C = \{p,q,r\}, g : B \to C$

$g - \{(\alpha,q),(\beta,r),(\gamma,p)\}$

$\Rightarrow g(\alpha) = q, g(\beta) = r, g(\gamma) = p$

$\therefore B$ లో ఉన్న విభిన్న మూలకాలకు C లో విభిన్న మూలకాలు $g-$ ప్రతిబింబంగా ఉన్నది.

కనుక $g : B \to C$ అన్వేక ప్రమేయం.

g వ్యాప్తి $g = g(b) = \{p,q,r\} = c$

కనుక $g : B \to C$ సంగ్రస్తం

$\therefore g : B \to C$ ద్విగుణ ప్రమేయం

$f = \{(1,\alpha),(2,\gamma),(3,\beta)\}$

$g = \{(\alpha,q),(\beta,r),(\gamma,p)\}$

ఇప్పుడు $\therefore \quad gof = \{(1,q),(2,p),(3,r)\}$

$\therefore \ (gof)^{-1} = \{(p,1),(p,2),(r,3)\} \qquad -(i)$

$g^{-1} = \{(q,\alpha),(r,\beta),(p,\gamma)\}$

$f^{-1} = \{(\alpha,1),(\gamma,2),(\beta,3)\}$

$f^{-1}og^{-1} = \{(q,1),(r,3),(p,2)\} \qquad -(ii)$

$(i),(ii)$ ల నుండి

$(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$

11. $f:R\to R, g:R\to R, f(x)=3x-2,$

$g(x)=x^2+1$ **గా నిర్వచిస్తే**

$i)(gof^{-1})(2),\ ii)\ (gof)(x-1)$ **లను కనుక్కోండి.**

సాధన:

$f:R\to R, g:R\to R, f(x)=3x-2$

f ద్విగుణ ప్రమేయం $\Rightarrow$ విలోమం వ్యవస్థితం

$y=f(x)=3x-2$

$\therefore y=f(x)\Rightarrow x=f^{-1}(y) \qquad -(i)$

$y=3x-2\Rightarrow x=\dfrac{x+2}{3} \qquad -(ii)$

$(i),(ii)$ ల నుండి

$f^{-1}(y)=\dfrac{y+2}{3}\Rightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{x+2}{3}$

ఇప్పుడు $(gof^{-1})(2)$

$=g(f^{-1}(2))$

$=g\left(\dfrac{2=2}{3}\right),\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{x+2}{3}$

$=g\left(\dfrac{4}{3}\right),\therefore g(x)=x^2+1$

$=\left(\dfrac{4}{3}\right)2+1=\dfrac{16}{9}+1=\dfrac{25}{9}$

$\therefore (g\,o\,f^{-1})(2)=\dfrac{25}{9}$

$ii)\quad (gof)(x-1)$

$=g(f(x-1))$

$=g(3(x-1)-2)\therefore f(x)=3x-2$

$=g(3x-5)$

$=(3x-5)^2+1,\therefore g(x)=x^2+1$

$=gx^2-30x+26$

$\therefore (gof)(x-1)=9x^2-30x+26.$

12. f, g వాస్తవమూల్య ప్రమేయాలను $f(x)=2x-1,\ g(x)=x^2$ గా నిర్వచిస్తే

(i) $(3f-2g)(x)$ (ii) $(fg)(x)$

(iii) $\left(\dfrac{\sqrt{f}}{g}\right)(x)$ (iv) $(f+g+2)(x)$ అను కనుక్కోండి.

సాధన:

$f(x)=2x-1,\ g(x)=x^2$

i. $3f=3(2x-1)$ $2g=2x^2$

$=6x-3$

$\therefore (3f-2g)(x)=3f(x)-2g(x)$

$=6x-3-2x^2$

$=-2x^2+6x-3$

$=-\left[2x^2-6x+3\right]$

ii. $(fg)(x)=f(x)g(x)=(2x-1)x^2=2x^3-x^2$

iii. $\left(\dfrac{\sqrt{f}}{g}\right)(x)=\dfrac{\sqrt{f(x)}}{g(x)}=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x^2}$

iv. $(f+g+2)x=f(x)+g(x)+2$

$=2x-1+x^2+2$

$=x^2+2x+1$

$=x^2+x+x-1$

$=x(x+1)+1(x+1)$

$=(x+1)(x+1)=(x+1)^2$

13. $f=\{(1,2),(2,-3),(3,-1)\}$ అయితే, ఈ క్రింది వాటిని కనుక్కోండి.

i) $2f$ ii) $2+f$ iii) f^2 iv) $\sqrt{f}$

సాధన: $f=\{(1,2),(2,-3),(3,-1)\}$

i. $2f=\{(1,2\times 2),(2,-3\times 2),(3,-1\times 2)\}$

$=\{(1,4),(2,-6),(3,-2)\}$

ii. $2+f\{(1,2+2),(2,-3+2),(3,-1+2)\}$

$=\{(1,4),(2,-1),(3,1)\}$

iii. $f^2=\left\{\left(1,2^2\right),\left(2,(-3)^2\right),\left(3,(-1)^2\right)\right\}$

$\{(1,4),(2,9),(3,1)\}$

iv. $\sqrt{f}=\left\{\left(1,\sqrt{2}\right)\right\}$

14. $f(x)=x^2, g(x)=2^x$ **అయితే** $(fog)(x)=(gof)(x)$ **సమీకరణం సాధించండి.**

సాధన:

$f(x)=x^2, g(x)=2^2$

$$
\begin{aligned}
(fog)(x) &= f(g(x)) \\
&= f(2^x), \therefore g(x)=2^x \\
&= (2^x)^2 = 2^{2x}, \therefore f(x)=x^2 \\
\therefore \quad (fog)(x) &= 2^{2x} \qquad -(i) \\
(gof)(x) &= g(f(x)) \\
&= g(x^2) \therefore f9x)=x^2 \\
&= (2)^{x^2} \therefore g(x)=2^x \\
\therefore \quad (gof)(x) &= (2)^{x^2} \qquad -(ii) \\
\therefore \quad (fog)(x) &= (gof)(x)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow 2^{2x}=(2)^{x^2}$

$\Rightarrow 2x=x^2 \Rightarrow x^2-2x=0$

$\Rightarrow (x-2)=0$

$\Rightarrow x=0, x=2$

$\therefore x=0,2$

15. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}(x\neq \pm 1)$ **అయితే** $(fofof)(x),(fofofof)(x)$ **కనుక్కోండి.**

సాధన: $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}(x\neq \pm 1)$

$$i)\quad (fofof)(x) = (fof)[f(x)]$$

$$= (fof)\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \therefore f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$= f\left[f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]$$

$$= f\left[\frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}\right]$$

$$= f\left(\frac{x+1+x-1}{x+1-x+1}\right)$$

$$= f\left(\frac{2x}{2}\right) = f(x) \qquad (i)$$

$$ii)\quad (fofofof)(x) = f[(fofof)(x)]$$

$= f[f(x)]$ (i) నుండి

$$= f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$= \frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1} \therefore f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$= \frac{x+1+x-1}{x+1-x+1} = \frac{2x}{2} = x$$

16. కింది వాస్తవ మూల్య ప్రమేయాల ప్రదేశాలు కనుక్కోండి.

$$i)\quad f(x) = \frac{1}{(x^2-1)(x+3)}$$

సాధన:

$$f(x) = \frac{1}{(x^2-1)(x+3)} \in R$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)(x+3) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x+3) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq -1, 1, -3$$

$\therefore f$ ప్రదేశం $= R - \{-1, 1, -3\}$

ii) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 7}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

సాధన:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 7}{(x-1)(x-2)(x-3)} \in R$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x-3) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 1, x \neq 2, x \neq 3$$

$\therefore f$ ప్రదేశం $= R - \{1,2,3\}$

ᒪ

iii. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}}{x}$

$2 + x \geq 0 \quad 2 - x \geq 0, \quad x \neq 0$

$\Rightarrow x \geq -2 \quad \Rightarrow 2 \geq x, \quad x \neq 0$

$\Rightarrow x \leq 2$

$\therefore f$ ప్రదేశం = $[-2,2] - \{0\}$

iv. $f(x) = \sqrt{\log_{0.3}(x - x^2)}$

$\log_{0.3}(x - x^2) \geq 0$

$\Rightarrow (x - x^2) \leq (0.3)^o$

$\Rightarrow x - x^2 \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq x^2 - x + 1$

$\Rightarrow x^2 - x + 1 \geq 0$

$\Rightarrow x^2 - x + 1 > 0, \forall x \in R$ .... (1)

$x - x^2 > 0$

$\Rightarrow x - x^2 < 0$

$\Rightarrow x(x-1) < 0$

$\Rightarrow 0 < x < 1$

x^2 గుణకం ధనాత్మకం

$\therefore\ x \in (0,1)$

(1) మరియు (2) ల నుండి

f= $R \cap (0,1) = (0,1)$

(లేక) f ప్రదేశం $= (0,1)$

17. $R-\{0\}$ పై వాస్తవ మూల్య ప్రమేయం $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}-\dfrac{x}{2}+1$ సరి ప్రమేయం అని చూపండి.

సాధన: $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}-\dfrac{x}{2}+1$ .... (1)

$x \in R-\{0\}$ అనుకొనుము

$f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}+\dfrac{x}{2}+1$ గా తీసికొనిన

$f(x)=\dfrac{-x}{\dfrac{1}{e^x}-1}+\dfrac{x}{2}+1$

$=\dfrac{-xe^x}{1-e^x}+\dfrac{x}{2}+1$

$=\dfrac{-xe^x}{-(e^x-1)}+\dfrac{x}{2}+1$

$=\dfrac{xe^x}{e^x-1}+\dfrac{x}{2}+1$ .... (2)

$f(x)-f(-x)$ ను తీసికొనిన

$f(x)-f(-x)=\dfrac{x}{e^x-1}-\dfrac{x}{2}+1-\dfrac{x}{e^x-1}-\dfrac{x}{2}-1$

$=\dfrac{x-xe^x}{e^x-1}-\dfrac{2x}{2}$

$=\dfrac{x(e^x-1)}{(e^x-1)}-x$

$= x-x=0$

$f(x)-f(-x)=0$

$\Rightarrow f(-x)=f(x)$

$\therefore$ f సరి ప్రమేయం

18. $A=\left\{0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right\}, f:A\to B$ సంగ్రస్తం అయితే $f(x)=\cos x$ గా నిర్వచిస్తే B కనుక్కోండి.

సాధన: $f:A\to B$ సంగ్రస్తం

$f(x)=\cos x$ అయితే $B=f$ వ్యాప్తి $=f(A)$

$=\left\{f(0),f\left(\frac{\pi}{6}\right),f\left(\frac{\pi}{4}\right),f\left(\frac{\pi}{3}\right),f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}$

$\therefore f(0)=\cos 0°=1$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos 60°=\frac{1}{2}$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos 90°=0$

$\therefore f(A)=\left\{1,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2},0\right\}$

$\therefore$ f వ్యాప్తి $=B=\left\{1,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2},0\right\}$

19. $f:R\to R,\ g:R\to R$ లను $f(x)=4x-1,\ g(x)=x^2+2$ గా నిర్వచిస్తే

(i) $(gof)(x)$ (ii) $(gof)\left(\frac{a+1}{4}\right)$

(iii) $fof(x)$ (iv) $go(fof)$ కనుక్కోండి.

సాధన:

i. $(gof)(x) = g(f(x))$

$= g(4x-1)$

$= (4x-1^2)+2$

$= 16x^2+1-8x+2$

$= 16x^2-8x+3$

ii. $(gof)\left(\frac{a+1}{4}\right) = g\left[f\left(\frac{a+1}{4}\right)\right]$

$= g\left[4\left(\frac{a+1}{4}\right)-1\right]$

$= g(a) = a^2+2$

iii. $fof(x) = f\{f(x)\}$

$= f(4x-1) = 4[4x-1]-1$

$= 16x-4-1 = 16x-5$

iv. $go(fof) = go(fof)$

$= g[1\times 0-5]$

$= g[-5]$

$= (-5)^2+2 = 25+2 = 27$

19. $f: R-\{0\} \to R$ **ను** $f(x) = x+\frac{1}{x}$ **గా నిర్వచిస్తే** $(f(x))^2 = f(x^2)+f(1)$ **అని చూపండి.**

సాధన:

$f: R-\{0\} \to R,$

$f(x) = x+\frac{1}{x}$

ఇప్పుడు $f(x^2)+f(1) = (x^2+\frac{1}{x^2})+(1+\frac{1}{1})$

$$=x^2+2+\frac{1}{x^2}$$

$$=(x+\frac{1}{x})^2=(f(x))^2$$

$$\therefore (f(x))^2=f(x^2)+f(1)$$

20. $f:R\to R$ **ను** $f(x)=\frac{e^{|x|}-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ **గా నిర్వచిస్తే,** f **అన్వేకం, సంగ్రస్తం, ద్విగుణం అవుతాయేమో నిర్ణయించండి.**

సాధన: $f:R\to R$ ను

$f(x)=\frac{e^{|x|}-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ గా నిర్వచించారు

$$f(0)=\frac{e^0-e^0}{e^0+e^0}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

$$f(-1)=\frac{e^1-e^1}{e^{-1}+e^1}=0$$

$$\therefore f(0)=f(-1)=0$$

$\Rightarrow$ కాబట్టి f అన్వేకం కాదు.

$y=f(x)=\frac{e^{|x|}-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ అనుకోండి

$y=1$ కి $f(x)=1$ అయ్యేటట్లు R లో x ఉండదు.

$\Rightarrow$ కాబట్టి f సంగ్రస్తం కాదు

ఒకవేళ $x\in R$ కు $f(x)=1$ అయితే

$$\frac{e^{|x|}-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=1$$

$\Rightarrow e^{|x|}-e^{-x}=e^x+e^{-x}$, కాబట్టి $x\neq 0$ స్పష్టం.

$x>0$ అయితే

$e^x-e^{-x}=e^x+e^{-x}\Rightarrow -e^{-x}=e^{-x}$ అసాధ్యం

$x<0$ అయితే

$$e^x-e^{-x}=e^x+e^{-x}$$

$\Rightarrow e^{-x}-e^x$ అసాధ్యం

21. $f:R\to R$ **ను** $f(x)=\begin{cases}x, & x>2\\ 5x,2, & x\le 2\end{cases}$ **గా నిర్వచిస్తే,** f **అన్వేకం, సంగ్రస్తం, ద్విగుణం అవుతాయో పరిశీలించండి.**

సాధన:

$3>2$ కాబట్టి $f(3)=3$

$1 < 2$ కాబట్టి $f(1) = 5(1) - 2 = 3$

$\therefore 1, 3$ లకు ఒకే $f-$ప్రతిబింబం ఉంది. కాబట్టి

f అన్వేకం కాదు.

సహప్రదేశం R లోని y కి,

$y > 2$ లేదా $y \le 2$ కావాలి.

$y > 2$ అయితే $x = y \in R, f(x) = x = y$

$y \le 2$ అయితే $x = \dfrac{y+2}{5} \in R,$

$x = \dfrac{y+2}{5} < 1$

$\therefore f(x) = 5x - 2 = 5\left[\dfrac{y+2}{5}\right] - 2 = y$

$\therefore f$ సంగ్రస్తం

f అన్వేకం కాదు కాబట్టి f ద్విగుణ ప్రమేయం కాదు.

22. $2^x + 2^y = 2$ **సమీకరణం ద్వారా నిర్వచించబడ్డ ప్రమేయం** $y(x)$ **ప్రదేశం కనుక్కోండి.**

సాధన: $2^x + 2^y < 2$ $(\because 2^y > 0)$

$\Rightarrow \log_2 2^x < \log_2 2$

$\Rightarrow x < 1$

$\therefore$ ప్రదేశం $= (-\infty, 1)$.

23. $f : R \to R$ **ను** $f(x+y) = f(x) + f(y)\ \forall x, y \in R, f(1) = 7,$ **గా నిర్వచిస్తే** $\sum_{r=1}^{n} f(r)$ **కనుక్కోండి.**

సాధన: $f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 2f(1).$

$f(3) = f(2+1) = f(2) + f(1) = 3f(1).$ ఇలాగే $f(r) = rf(1).$

$$\sum_{r=1}^{n} f(r) = f(1) + f(2) + ... + f(n)$$

$$= f(1) + 2f(1) + ... + nf(1)$$

$$= f(1)(1 + 2 + ... + n)$$

$$= \frac{7n(n+1)}{2}$$

24. $f(x)=\dfrac{\cos^2 x+\sin^4 x}{\sin^2 x+\cos^4 x}\forall x\in R$ **అయితే** $f(2012)=1$ **అని చూపండి.**

సాధన:
$$f(x)=\frac{\cos^2 x+\sin^4 x}{\sin^2 x+\cos^4 x}$$

$$=\frac{1-\sin^2 x+\sin^2 x}{1-\cos^2 x+\sin^4 x}$$
$$=\frac{1-\sin^2 x(1-\sin^2 x)}{1-\cos^2 x(1+\sin^4 x)}$$
$$=\frac{1-\sin^2 x-\cos^2 x}{1-\sin^2 x+\cos^2 x}$$
$$=1.$$
$$\therefore f(2012)=1$$

25. $f:[0,3]\to[0,3]$,

$f(x)=\begin{cases}1+x, 0\le x\le 2\\ 3-x, 2<x\le 3\end{cases}$ **గా నిర్వచిస్తే**

$f[0,3]\subseteq[0,3]$ **అని చూపి** fof **కనుక్కోండి.**

సాధన:

$0\le x\le 2\Rightarrow 1\le 1+x\le 3$ ____ (i)

$2<x\le 3\Rightarrow -3\le -x\le -2$

$\Rightarrow 3-3\le 3-x\le 3-2$

$\Rightarrow 0\le 3-x<1$ ____ (ii)

$(i)(ii)$ ల నుండి

$f[0,3]\subseteq[0,3]$

$o\le x\le 1$, అయితే

$(fof)(x)=f(f(x))$

$f(1+x)=1+(1+x)=2+x$

$[\therefore 1\le 1+x\le 2]$

$1<x\le$, అయితే

$(fof)(x)=f(f(x))$

$=f(1+x)$

$=3-(1+x)$

$=2-x,[\therefore 2<1+x\le 3]$

$2<x\le 3$, అయితే

$(fof)(x)=f(f(x))$

$= f(3-x)$
$= 1+(3-x)$
$= 4-x, [\because 0 \le 3-x < 1]$

$$\therefore (fof)(x) = \begin{cases} 2+x, 0 \le x < 1 \\ 2-x, 1 < x \le 2 \\ 4-x, 2 < x \le 3 \end{cases}$$

26. $f, g : R \to R$ **ప్రమేయాలను** $f(x) = \begin{cases} 0, x \in Q \\ 1, x \notin Q \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} -1, x \in Q \\ 1, x \notin Q \end{cases}$ **అని నిర్వచిస్తే** $(fog)(\pi) + (gof)(e)$.

సాధన:

$$(fog)(\pi) = f(g(\pi)) = f(0) = 0$$
$$(gof)(e) = g(f(e)) = g(1) = -1$$
$$\therefore (fog)(\pi) + (gof)(e) = -1$$

8. $f : Q \to Q, f(x) = 5x+4$ **గా ప్రతీ** $x \in Q$ **కు నిర్వచిస్తే,** f **ద్విగుణ ప్రమేయం అని చూపి** f^{-1} **కనుక్కోండి.**

సాధన: $x_1, x_2 \in Q$,

$f(x_1) = f(x_2)$
$\Rightarrow 5x_1 + 4 = 5x_2 + 4$
$\Rightarrow 5x_1 = 5x_2$
$\Rightarrow x_1 - x_2$

$\therefore f$ అన్వేకం

$y \in Q$ అయితే $= \frac{y-4}{5} \in Q$ వ్యవస్థితం

$f(x) = f\left(\frac{y-4}{5}\right) = 5\left(\frac{y-4}{5}\right) + 4 = y$

$\therefore f$ సంగ్రస్తం

కనుక ద్విగుణ ప్రమేయం

$\therefore f^{-1} : Q \to Q$ వ్యవస్థితం. కాని Q లో ప్రతీ x కు

$(fof^{-1})(x) = I(x)$

$\Rightarrow f(f^{-1}(x)) = x, \therefore f(x) = 5x+4$
$\Rightarrow 5f^{-1}(x) + 4 = x$
$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-4}{5}, \forall x \in Q$

27. $f=\{(4,5),(5,6),(6,-4)\}$

$g=\{(4,-4),(6,5),(8,5)\}$ **అయితే**

$i)\ f+g \quad ii)\ f-g \quad iii) 2f+4g$

$iv)\ f+4 \quad v) fg \quad vi)\ \frac{f}{g}$

$vii) |f| \quad viii) \sqrt{f} \qquad ix)\ f^2$

$x)\ f^3$ **లు కనుక్కోండి.**

సాధన:

$f=\{(4,5),(5,6),(6,-4)\}$

$g=\{(4,-4),(6,5),(8,5)\}$

f ప్రదేశం $=\{4,5,6\}=A$

g ప్రదేశం $=\{4,6,8\}=B$

$f \pm g$ ప్రదేశం $=A \cup B=\{4,6\}$

$i)\quad f+g=\{4,5+(-4),(6,-4+5)\}$

$=\{(4,1),(6,1)\}$

$ii)\quad f-g=\{(4,5-(-4)),(6,-4,-5)\}$

$=\{(4,9),(6,-9)\}$

$iii)\quad 2f$ ప్రదేశం $=A=\{4,5,6\}$

$4g$ ప్రదేశం $=B=\{4,6,8\}$

$2f+4f$ ప్రదేశం $A \cap B=\{4,6\}$

$\therefore 2f=\{(4,10),(5,12),(6,-8)\}$

$4g=\{(4,-16,(6,20),(8,20)\}$

$\therefore 2f+4g=\{(4,10+(-16),6,-8+20)\}$

$=\{(4,-6),(6,12)\}$

$iv)\quad f+4$ ప్రదేశం $=A=\{4,5,6\}$

$f+4=\{(4,5+4),(5,6+4),(6,-4+4)\}$

$=\{(4,9),(5,10),(6,0)\}$

$v)\quad fg$ ప్రదేశం $=A \cap B=\{4,6\}$

$fg=\{(4,(5)(-4),(6,(-4)(5))\}$

$\{(4,-20),(6,-20)\}$

$vi)\ \frac{f}{g}$ ప్రదేశం $=\{4,6\}$

$$\frac{f}{g}=\left\{\left(4,\frac{-5}{5}\right),\left(6,\frac{-4}{5}\right)\right\}$$

$vii)\ |f|$ ప్రదేశం $=\{4,5,6\}$

$$\therefore |f|=\{(4,|5|),(5,|6|),(6,|-4|)\}$$
$$=\{(4,5),(5,6),(6,4)\}$$

$viii)\ \sqrt{f}$ ప్రదేశం $=\{4,5\}$

$$\therefore \sqrt{f}=\left\{(4,\sqrt{5}),(5,\sqrt{6})\right\}$$

$ix)\ f^2$ ప్రదేశం $=\{4,5,6\}=A$

$$\therefore f^2=\left\{(4,(5)^2,(5,(6)^2,(6,(-4)^2)\right\}$$
$$=\{(4,25),(5,36),(6,16)\}$$

$x)\ f^3$ ప్రదేశం $=A=\{4,5,6\}$

$$\therefore f^3=\left\{(4,(5)^3,(5,(6)^3,(6,(-4)^3)\right\}$$
$$=\{(4,125),(5,216),(6,-64)\}$$

28. కింది వాస్తవ మూల్య ప్రమేయాల ప్రదేశాలు, వ్యాప్తులు కనుక్కోండి.

$$i)\ f(x)=\frac{2+x}{2-x}\quad ii)\ f(x)=\frac{x}{1-x^2}$$
$$iii)\ f(x)=\sqrt{9-x^2}$$

సాధన:

$$i)\ f(x)=\frac{2+x}{2-x}\in R$$

$$\Leftrightarrow 2-x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2 \Leftrightarrow x\in R=\{2\}$$

$\therefore f$ ప్రదేశం $R-\{2\}$

$f(x)=\frac{y}{1}=\frac{2+x}{2-x}$ అనుకోండి.

$$\Rightarrow \frac{y+1}{y-1} = \frac{(2+x)+(2-x)}{(2+x)-(2-x)}$$

$$\Rightarrow \frac{f+1}{y-1} = \frac{4}{2x}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2(y-1)}{y+1}$$

$$y+1=0$$

$(i.e) u = -1$ కి x నిర్వచితం కాదు.

$\therefore f$ వ్యాప్తి $= R - \{-1\}$.

ii) $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$

సాధన:

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2} \in R$$

$$\therefore \forall x \in R, x^2 + 1 \neq 0$$

f ప్రదేశం R

$f(x) = y = \dfrac{x}{1+x^2}$ అనుకుందాం.

$$\Rightarrow x^2 y - x + y = 0$$

$\Rightarrow x = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{1-4y^2}}{y}$, వాస్తవ సంఖ్య

$$\Leftrightarrow 1 - 4y^2 \geq 0, y \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (1-2y)(1+2y) \geq 0, y \neq 0$$

$$\Leftrightarrow y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] - \{0\}$$

కాని $x = 0 \Rightarrow y = 0$

$\therefore f$ వ్యాప్తి $= \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$

iii) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

సాధన:

$$f(x) = \sqrt{9-x^2} \in R$$

$\Leftrightarrow 9-x^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (3+x)(3-x) \geq 0$

$\Leftrightarrow x \in [-3,3]$

$\therefore f$ ప్రదేశం $[-3,3]$

$f(x) = y = \sqrt{9-x^2}$ అనుకుందాం.

$\Rightarrow x = \sqrt{9-x^2} \in R$

$\Leftrightarrow 9-y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (3+y)(3-y) \geq 0$

$\therefore -3 \leq y \leq 3$

కానీ $f(x)$ రుణేతర వాస్తవ సంఖ్యలు మాత్రమే తీసుకుందాం.

$\therefore f$ వ్యాప్తి $=[0,3]$

12. $f(x) = x^2, g(x) = |x|$ **గా నిర్వచిస్తే, కింది ప్రమేయాలను కనుక్కోండి.**

$i) f+g,\ ii) f-g\ iii) fg\ \ iv)\ 2f\ \ v) f^2\ \ vi) f+3$

సాధన:

$f(x) = x^2$

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

f ప్రదేశం $= g$ ప్రదేశం $= R$

కాబట్టి (i) నుంచి (vi) వరకు ప్రమేయాల ప్రదేశం R

$i)\quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$$= x^2 + |x| = \begin{cases} x^2 + x, x \geq 0 \\ x^2 - x, x < 0 \end{cases}$$

$ii)\quad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$

$$= x^2 - |x| = \begin{cases} x^2 - x, x \geq 0 \\ x^2 - (-x), x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 - x, x \geq 0 \\ x^2 + x, x < 0 \end{cases}$$

$iii)\quad (fg)(x) = f(x).g(x)$

$$= x^2|x| = \begin{cases} x^3, x \geq 0 \\ -x^3, x < 0 \end{cases}$$

$iv)\quad 2f(x) = 2f(x) = 2x^2$

$v)\quad f^2(x) = (f(x))^2 = (x^2)^2 = x^4$

$vi)\quad f+3(x) = f(x) + 3 = x^2 + 3$

13. ఈ కింది ప్రమేయాలలో ఏవి సరి లేదా బేసి ప్రమేయాలో నిర్ధారించండి.

$i)\ f(x) = a^x - a^{-x} + \sin x$

సాధన:

$$f(x) = a^x - a^{-x} + \sin x$$

$$\begin{aligned} \therefore f(-x) &= a^{-x} - a^x + \sin(-x) \\ &= a^{-x} - a^x - \sin x \\ &= (a^x - a^{-x} + \sin x) = -f(x) \end{aligned}$$

$\therefore f(x)$ బేసి ప్రమేయం.

$ii)\quad f(x) = x\left(\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$

సాధన:

$$f(x) = x\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)\left(\frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1}\right) \\ &= -x\left(\frac{\frac{1}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 1}\right) \\ &= -x\left(\frac{1 - e^x}{1 + e^x}\right) \\ &= x\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) = f(x) \end{aligned}$$

$\therefore f$ సరి ప్రమేయం.

$iii)\quad f(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

సాధన:

$$f(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

$$f(-x) = \log\left(-x + \sqrt{(-x^2)+1}\right)$$

$$= \log\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$$

$$= \log\left[\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x+\sqrt{x^2+1}}\right]$$

$$= \log\left[\frac{(x^2+1)-x^2}{x+\sqrt{x^2+1}}\right]$$

$$= \log\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{-1}$$

$$= -\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$= -f(x)$$

$\therefore f$ బేసి ప్రమేయం.

14. కింది వాస్తవ మూల్య ప్రమేయాల ప్రదేశాలు కనుక్కోండి.

i) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{[x^2]-[x]-2}}$

సాధన:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{[x^2]-[x]-2}} \in R$$

$$\Leftrightarrow [x]^2 - [x] - 2 > 0$$
$$\Leftrightarrow ([x]+1)([x]-2] > 0$$
$$\Leftrightarrow [x] < -1, (or) [x] > 2$$
$$[x] < -1 \Rightarrow [x] = -2, -3, -4, \ldots\ldots\ldots$$
$$\Rightarrow x < -1$$
$$[x] > 2 \Rightarrow [x] = 23, 4, 5, \ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow x \geq 3$$

$\therefore f$ ప్రదేశం $= (-\infty, -1)\infty[3, \infty]$

$= R - [-1, 3)$

$ii) \quad f(x) = \log(x - [x])$

సాధన:

$$f(x) = \log(x - [x]) \in R$$

$$\Leftrightarrow x - [x] > 0$$

$$\Leftrightarrow x > [x]$$

$\Leftrightarrow x$ పూర్ణ సంఖ్య కాదు.

$\therefore f$ ప్రదేశం $R - Z$

$iii) \quad f(x) = \dfrac{\sqrt{3+x} + \sqrt{3-x}}{x}$

సాధన:

$$f(x) = \frac{\sqrt{3+x} + \sqrt{3-x}}{x} \in R$$

$$\Leftrightarrow 3 + x \geq 0, 3 - x \geq 0, x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow x \geq -3, x \leq 3, x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3, x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow x \in [-3, 3], x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow x \in [-3, 3] - \{0\}$$

$\therefore f$ ప్రదేశం $[-3, 3] - \{0\}$