సదిశల గుణనం

అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. $\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}, 3\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$ **సదిశల మధ్య కోణాన్ని కనుక్కోండి.**

సాధన. $\bar{a}=\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}, \bar{b}=3\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$ ల మధ్యకోణం 'θ' అయిన $(i.e.,)(\bar{a},\bar{b})=\theta$

$$\cos\theta=\frac{\bar{a}.\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$$
$$=\frac{(\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}).(3\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k})}{|\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}||3\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}|}$$
$$=\frac{(3-2+6)}{\sqrt{1+4+9}.\sqrt{9+1+4}}$$
$$=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$$
$$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$$

2. $2\bar{i}+\lambda\bar{j}-\bar{k}, 4\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k}$ **సదిశలు పరస్పరం లంబంగా ఉంటే** λ **విలువను కనుక్కోండి.**

సాధన. $\bar{a}=2\bar{i}+\lambda\bar{j}-\bar{k}, \bar{b}=4\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k}$ అనుకుందాం.

$\therefore \bar{a},\bar{b}$ లు పరస్పరం లంబంగా ఉన్నవి.

$$\Rightarrow (2\bar{i}+\lambda\bar{j}-\bar{k}).(4\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k})=0$$
$$\Rightarrow (2)(4)+\lambda(-2)+(-1)(2)=0$$
$$\Rightarrow 8-2\lambda-2=0$$
$$\Rightarrow 2\lambda=6 \Rightarrow \lambda=3$$

3. λ **యొక్క ఏ విలువలకు** $\bar{i}-\lambda\bar{j}+2\bar{k}, 8\bar{i}+6\bar{j}-\bar{k}$ **సదిశలు లంబంగా ఉంటాయి?**

సాధన. $\bar{a}=\bar{i}-\lambda\bar{j}+2\bar{k}.\bar{b}=8\bar{i}+6\bar{j}-\bar{k}$

$$\therefore (\bar{a},\bar{b})=90°$$
$$\Rightarrow \bar{a}.\bar{b}$$
$$=(\bar{i}-\lambda\bar{j}+2\bar{k}).(8\bar{i}+6\bar{j}-\bar{k})=0$$

$$\Rightarrow 8-(\lambda)(6)+2(-1)=0$$

$$\Rightarrow 6-6\lambda=0$$

$$\Rightarrow \lambda=1$$

4. $\overline{a} = 2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}, \overline{b} = \overline{i} - 3\overline{j} - 5\overline{k}, \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ **లు త్రిభుజ భుజాలుగా రూపొందేటట్లు** $\overline{c}$ **ను కనుక్కోండి.**

సాధన. $\overline{a} = 2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}, \overline{b} = \overline{i} - 3\overline{j} - 5\overline{k}$

$\therefore \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ లు త్రిభుజ భుజాలు కనుక

$$\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{0}$$

$$\Rightarrow \overline{c} = -(\overline{a} + \overline{b})$$

$$= -\left[(2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}) + (\overline{i} - 3\overline{j} - 5\overline{k})\right]$$

$$\therefore \overline{c} = -\left[3\overline{i} - 4\overline{j} - 4\overline{k}\right] = -3\overline{i} + 4\overline{j} + 4\overline{k}$$

5. $\overline{r}.(2\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}) = 3.\overline{r}(3\overline{i} - 6\overline{j} + \overline{k}) = 4$ **తలాల మధ్యకోణం కనుక్కోండి.**

సాధన. $\overline{r}.\overline{n}_1 = p_1.\overline{r}.\overline{n}_2 = p_2$ తలాల మధ్యకోణం

$'\theta'$ అయిన $\cos\theta = \dfrac{\overline{n}_1.\overline{n}_2}{|\overline{n}_1|.|\overline{n}_2|}$

$$= \frac{(2\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}).(3\overline{i} - 6\overline{j} + \overline{k})}{|2\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}||3\overline{i} - 6\overline{j} + \overline{k}|}$$

$$= \frac{2(3) - (1)(6) + 2(1)}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{9+36+1}}$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{46}}$$

$$\therefore = \cos^{-1}\frac{2}{3\sqrt{46}}$$

6. $(3, -2, 1)$ **బిందువు గుండాపోతూ** $(4, 7, -4)$ **సదిశకు లంబంగా ఉండే తలం సమీకరణం కనుక్కోండి.**

సాధన. $\overline{a} = 3\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$ బిందువు గుండా పోతూ,

సదిశ $\overline{n} = 4\overline{i} + 7\overline{j} - 4\overline{k}$ కు లంబంగా ఉండే తలం సమీకరణం

$$\Rightarrow \overline{r}.\overline{n} = \overline{a}.\overline{n}$$

$$\Rightarrow \overline{r}.(4\overline{i} + 7\overline{j} - 4\overline{k}) = (3\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}).(4\overline{i} + 7\overline{j} - 4\overline{k})$$

$$\Rightarrow \overline{r}.(4\overline{i} + 7\overline{j} - 4\overline{k}) \{(3)(4) + (-2)(7) + 1(-4)\}$$

$$\Rightarrow \overline{r}.(4\overline{i} + 7\overline{j} - 4\overline{k}) = \{12 - 14 - 4\}$$

$$i.e., \overline{r}(4\overline{i} + 7\overline{j} - 4\overline{k}) = -6$$

(లేదా) $\bar{r}.(-4\bar{i}-7\bar{j}-4\bar{k})=6$

7. $XOY-$ **తలానికి సమాంతరంగా ఉంటూ,** $4\bar{i}-3\bar{j}+\bar{k}$ **సదిశకు లంబంగా ఉండే యూనిట్ సదిశను కనుక్కోండి.**

సాధన. $XOY-$ తలానికి సమాంతరంగా ఉండే సదిశ $p\bar{i}+q\bar{j}$ రూపంలో ఉంటుంది.

$\therefore XOY$ తలానికి సమాంతరంగా ఉంటూ $4\bar{i}-3\bar{j}+\bar{k}$

సదిశకు లంబంగా ఉండేసదిశ $3\bar{i}+4\bar{j}$

$|3\bar{i}+4\bar{j}|=\sqrt{9+16}=5$

$\therefore XOY-$ తలానికి సమాంతరంగా ఉంటూ $4\bar{i}-3\bar{j}+\bar{k}$

సదిశకు లంబంగా ఉండే యూనిట్ సదిశ $=\pm\dfrac{(3\bar{i}+4\bar{j})}{5}$

8. $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}, |\bar{a}|=3, |\bar{b}|=5, |\bar{c}|=7$

అయితే $\bar{a},\bar{b}$ **ల మధ్య కోణాన్ని కనుక్కోండి.**

సాధన. $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}\Rightarrow\bar{c}=-(\bar{a}+\bar{b})$

$\bar{c}^2=-(\bar{a}+\bar{b})^2=a^2+b^2+2\bar{a}.\bar{b}$

$c^2=a^2+b^2+2|\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta$

$(\bar{a},\bar{b})=\theta$ అయిన

$2|\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta=c^2-(a^2+b^2)$

$2(3)(5)\cos\theta=49(-9+25)$

$30\cos\theta=49-34=15$

$\cos\theta=\dfrac{15}{30}=\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}$

$\therefore\theta=\dfrac{\pi}{3}$

$\bar{a},\bar{b}$ ల మధ్య కోణం $=\dfrac{\pi}{3}$

9. $\bar{p}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$ **అయితే,** $\bar{p}\times\bar{k}^2$ **విలువను కనుక్కోండి.**

సాధన. $\bar{p}\times\bar{k}=(x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k})\times\bar{k}$

$=x(\bar{i}\times\bar{k})+y(\bar{j}\times\bar{k})+z(\bar{k}+\bar{k})$

$=-x\bar{j}+y\bar{j}+0y\bar{i}-x\bar{j}$

$|\bar{p}\times\bar{k}|=y^2+x^2$

10. $2\overline{j}\times(3\overline{i}-4\overline{k})+(\overline{i}+2\overline{j})\times\overline{k}$ **ని గణన చేయండి.**

సాధన. $2\overline{j}\times(3\overline{i}-4\overline{k})+(\overline{i}+2\overline{j})\times\overline{k}$

$$6(\overline{j}\times\overline{i})-8(\overline{j}\times\overline{k})+(\overline{i}\times\overline{k})+2(\overline{j}\times\overline{k})$$
$$=-6\overline{k}-8\overline{i}-\overline{j}+2\overline{i}=-6\overline{i}-\overline{j}-6\overline{k}$$

11. $\overline{i}+\overline{j}+\overline{k},2\overline{i}+\overline{j}+3\overline{k}$ **సదిశలు రెండింటికీ లంబంగా ఉండే యూనిట్ సదిశను కనుక్కోండి.**

సాధన.

$\overline{a}=\overline{i}+\overline{j}+\overline{k},\overline{b}=2\overline{i}+\overline{j}+3\overline{k}$ అనుకోండి.

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}$$
$$=\overline{i}(3-1)0\overline{j}(3-2)+\overline{k}(1-2)$$
$$=2\overline{i}-\overline{j}-\overline{k}$$

$$\overline{a}\times\overline{b}=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$$

$\overline{a},\overline{b}$ లకు లంబంగా ఉండే యూనిట్ సదిశ

$$=\pm\frac{\overline{a}\times\overline{b}}{\overline{a}\times\overline{b}}=\pm\left(\frac{2\overline{i}-\overline{j}-\overline{k}}{\sqrt{6}}\right)$$

12. $\overline{a}=2\overline{j}-\overline{k},\overline{b}=-\overline{i}+\overline{k}$ **లు ఆసన్న భుజాలుగా గల సమాంతర చతుర్భుజం వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.**

సాధన. $\overline{a}=2\overline{j}-\overline{k},\overline{b}=-\overline{i}+\overline{k}$ లు ఆసన్న భుజాలుగా గల సమాంతర చతుర్భుజం సదిశా వైశాల్యం

$$=\overline{a}\times\overline{b}$$

$$=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 0 & 2 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}$$
$$=\overline{i}(2-0)-\overline{j}(0-1)+\overline{k}(0+2)$$
$$=2\overline{i}+\overline{j}+2\overline{k}$$

$\therefore$ చతుర్భుజ వైశాల్యం $=\overline{a}\times\overline{b}$

$=2\overline{i}+\overline{j}-2\overline{k}$

$=\sqrt{4+1+4}=3$ చ.యూనిట్లు

13. $3\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k}, \bar{i}-3\bar{j}+4\bar{k}$ **లు కర్ణాలుగా గల సమాంతర చతుర్భుజం వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.**

సాధన. $\bar{a}=3\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k}, \bar{b}=\bar{i}-3\bar{j}+4\bar{k}$ లు కర్ణాలుగా గల సమాంతర చతుర్భుజ

వైశాల్యం $=\frac{1}{2}(\bar{a}\times\bar{b})$

ఇక్కడ $\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & 1 & -2\\ 1 & -3 & 4\end{vmatrix}$

$=\bar{i}(4-6)-\bar{j}(12+2)+\bar{k}(-9-1)$

$=-2\bar{i}-14\bar{j}-10\bar{k}$

$=2(-\bar{i}-7\bar{j}-5\bar{k})$

$\therefore$ సమాంతర చతుర్భుజ సదిశా వైశాల్యం

$=\frac{1}{2}\left[2(-\bar{i}-7\bar{j}-5\bar{k})\right]$

$=-\bar{i}-7\bar{j}-5\bar{k}$

$\therefore$ సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం

$=\left|-\bar{i}-7\bar{j}-5\bar{k}\right|$

$=\sqrt{1+49+25}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$ చ.యూనిట్లు

14. $3\bar{i}+4\bar{j}, -5\bar{i}+7\bar{j}$ **లను రెండు భుజాలుగా కలిగిన త్రిభుజానికి వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.**

సాధన. త్రిభుజ వైశాల్యం $=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(3\bar{i}+4\bar{j})\times(-5\bar{i}+7\bar{j})$

$=-15(\bar{i}\times\bar{i})+21(\bar{i}\times\bar{j})$

$-20(\bar{j}\times\bar{i}+28(\bar{j}\times\bar{j})$

$=-\bar{0}+21\bar{k}+20\bar{k}+\bar{0}=41\bar{k}$

ΔABC వైశాల్యం $=\frac{1}{2}\times 41=20.5$ చ.యూనిట్లు

15. $\overline{a} = 4\overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k}, \overline{b} = 2\overline{i} - 6\overline{j} - 3\overline{k}$ **సదిశలు నిర్ధారించే తలానికి లంబంగా ఉండే యూనిట్ సదిశను కనుక్కోండి.**

సాధన. $\overline{a} = 4\overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k}, \overline{b} = 2\overline{i} - 6\overline{j} - 3\overline{k}$

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{b} & \overline{c} \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & -6 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \overline{i} \times (-9-6) - \overline{j}(-12+2) + \overline{k}(-24-6)$$

$$= -15\overline{i} + 10\overline{j} - 30\overline{k} = -5(3\overline{i} - 2\overline{j} + 6\overline{k})$$

$$\overline{a} \times \overline{b} = 5\sqrt{9+4+36} = 5 \times 7 = 35$$

$\therefore$ తలానికి లంబంగా ఉండే యూనిట్ సదిశ

$$= \pm \frac{5(3\overline{i} - 2\overline{j} + 6\overline{k})}{35}$$

$$= \pm \frac{(3\overline{i} - 2\overline{j} + 6\overline{k})}{7}$$

16. $\overline{a} = 6\overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}; \overline{b} = 2\overline{i} - 9\overline{j} + 6\overline{k}$ **అయితే** $\overline{a}.\overline{b}$ **విలువను కనుక్కొని** $\overline{a}, \overline{b}$ **కోణాన్ని కనుక్కోండి.**

సాధన. సిద్ధాంతం ప్రకారం $\overline{a}.\overline{b} = a_1b_1 + a_1b_2 + a_3b_3$

$$\overline{a}.\overline{b} = 6(2) + 2(-9) + 3(6) = 12$$

$\overline{a}, \overline{b}$ ల మధ్య కోణం θ అనుకొందాం

$\therefore |a| = \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} = 7$ మరియు

$$|\overline{b}| = \sqrt{2^2 + (-9)^2 + 6^2} = 11$$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{\overline{a}.\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|} = \dfrac{12}{7 \times 11} = \dfrac{12}{77}$ లేదా

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{12}{77}\right)$$

17. $\bar{a}, \bar{b}$ **లు శూన్యేతర, సరేఖీయాలు కాని సదిశలై** $|\bar{a}+\bar{b}| = |\bar{a}-\bar{b}|$ **అయితే,** $\bar{a}, \bar{b}$ **సదిశల మధ్య కోణాన్ని కనుక్కోండి.**

సాధన. $|\bar{a}+\bar{b}| = |\bar{a}-\bar{b}|$

$$\Rightarrow |\bar{a}+\bar{b}|^2 = |\bar{a}-\bar{b}|^2$$

$$\Rightarrow (\bar{a}+\bar{b}).(\bar{a}+\bar{b}) = (\bar{a}-\bar{b}).(\bar{a}-\bar{b})$$

$$\Rightarrow \bar{a}^2 + 2\bar{a}.\bar{b} + \bar{b}^2 = \bar{a}^2 - 2\bar{a}.\bar{b} + \bar{b}$$

$$\Rightarrow 4\bar{a}.\bar{b} = 0 \quad \Rightarrow \bar{a}.\bar{b} = 0$$

$\therefore \bar{a}, \bar{b}$ ల మధ్యకోణం 90°.

18. $A(1,2,3), B(2,3,1), C(3,1,2)$ **లను శీర్షాలుగా గలిగిన త్రిభుజ వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.**

సాధన. A, B, C ల స్థాన సదిశలు

$$\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}, 2\bar{i}+3\bar{j}+\bar{k}, 3\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k},$$

$$\overrightarrow{AB} = (2\bar{i}+3\bar{j}+\bar{k}) - (\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k})$$
$$= 2\bar{i}+3\bar{j}+\bar{k}-\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}$$
$$= \bar{i}+\bar{j}-2\bar{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = (3\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}) - (\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k})$$
$$= 3\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}-\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}$$
$$= -2\bar{i}-\bar{j}-\bar{k}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \bar{i}(-1-2) - \bar{j}(-1+4) + \bar{k}(-1-2)$$
$$= -3\bar{i} - 3\bar{j} - 3\bar{k} = -3(\bar{i}+\bar{j}+\bar{k})$$

ΔABC వైశాల్యం $= \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB}\right|$

$= \dfrac{1}{2} 3\sqrt{1+1+1} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ చ.యూనిట్లు

19. $\bar{a}=2\bar{i}-3\bar{j}+\bar{k}, \bar{b}=\bar{i}+4\bar{j}-2\bar{k}$ **అయితే**

$(\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{a}-\bar{b})$ **ని కనుక్కోండి.**

సాధన. $\bar{a}+\bar{b}=3\bar{i}+\bar{j}-\bar{k},\ \bar{a}-\bar{b}=\bar{i}-7\bar{j}+3\bar{k}$

$$(\bar{a}+\bar{b})\times(\bar{a}-\bar{b})=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & 1 & -1\\ 1 & -7 & 3\end{vmatrix}$$

$$=\bar{i}(3-7)-\bar{j}(9+1)+\bar{k}(-21-1)$$

$$(\bar{a}+\bar{b})\times(\bar{a}-\bar{b})=-4\bar{i}-10\bar{j}-22\bar{k}$$

20. $\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c})+\bar{b}\times(\bar{c}+\bar{a})+\bar{c}\times(\bar{a}+\bar{b})$ **ని గణన చేయండి.**

సాధన. $\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c})+\bar{b}\times(\bar{c}+\bar{a})+\bar{c}\times(\bar{a}+\bar{b})$

$$=\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{a}+\bar{c}\times\bar{a}+\bar{c}\times\bar{b}$$

$$=\bar{a}\times\bar{b}-\bar{c}\times\bar{a}-\bar{c}\times\bar{b}-\bar{a}\times\bar{b}+\bar{c}\times\bar{a}+\bar{c}\times\bar{b}=0$$

21. $\bar{i}+\bar{j}, \bar{j}+\bar{k}$ **ల మధ్య కోణం 'θ' అయితే**

$\sin\theta$ **ని కనుక్కోండి.**

సాధన. $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j};\ \bar{b}=\bar{j}+\bar{k}$ అనుకొనుము

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\bar{i}(1-0)-\bar{j}(1-0)+\bar{k}(1-0)$$

$$\bar{a}\times\bar{b}=\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}$$

$$|\bar{a}\times\bar{b}|=\sqrt{3},\ |\bar{a}|=\sqrt{2}, |\bar{b}|=\sqrt{2}$$

$$\sin\theta=\frac{|\bar{a}\times\bar{b}|}{|\bar{a}||\bar{b}|}$$

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

22 $\left[\bar{i}-\bar{j}\;\bar{j}-\bar{k}\;\bar{k}-\bar{i}\right]$ **ను గణన చేయండి.**

సాధన.

$$\left[\bar{i}-\bar{j}\;\bar{j}-\bar{k}\;\bar{k}-\bar{i}\right] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(1-0)+1(-1)$$

$$= 1-1 = 0$$

23. $\bar{a}=(1,-1,-6), \bar{b}=(1,-3,4), \;\; \bar{c}(2,-5,3)$ **అయితే ఈ కింద వాటిని గణన చేయండి.**

$i)\bar{a}(\bar{b}\times\bar{c}).$ $\quad ii)\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}).$

$iii)(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$

సాధన.

$$i)\quad \bar{a}(\bar{b}\times\bar{c}) = \left[(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c})\right] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-9+20)+1(3-8)-6(-5+6)$$

$$= 11-5-6 = 0$$

$$ii)\quad \bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = (\bar{a}.\bar{c})\bar{b}-(\bar{a}.\bar{b})\bar{c}$$

$$\bar{a}.\bar{c} = (\bar{i}-\bar{j}-6\bar{k}).(\bar{i}-3\bar{j}+4\bar{k})$$

$$= 1+3-24 = -20$$

$$(\bar{a}.\bar{c})\bar{b} = (\bar{a}.\bar{b})\bar{c}$$

$$= -11(\bar{i}-3\bar{j}+4\bar{k})+20(2\bar{i}-3\bar{j}+4\bar{k})$$

$$= -11\bar{i}+33\bar{j}-44\bar{k}+40\bar{i}-100\bar{j}+60\bar{k}$$

$$= 29\bar{i}-67\bar{j}+16\bar{k}$$

$$\bar{b}.\bar{c} = (\bar{i}-3\bar{j}+4\bar{k}).(2\bar{i}-5\bar{j}+3\bar{k})$$

$$= 2+15+12 = 29$$

$$iii)\quad (\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c} = (\bar{a}.\bar{c})\bar{b}-(\bar{b}.\bar{c})\bar{a}$$

$$= -11(\bar{i}-3\bar{j}+4\bar{k})-29(\bar{i}-\bar{j}-6\bar{k})$$

$$= -11\bar{i}+33\bar{j}-44\bar{k}-29\bar{i}+29\bar{j}+17\bar{k}$$

$$= -40\bar{i}+62\bar{j}+130\bar{k}$$

24. $\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}, \overline{i}-\overline{j}, \overline{i}+2\overline{j}-\overline{k}$ **సదిశలను సహవసానిక భుజాలుగా** $(Coter\min us\, edges)$ **గా గల సమాంతర ఫలకం ఘనపరిమాణాన్ని కనుక్కోండి.**

సాధన. $\overline{a}=\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}, \overline{b}=\overline{i}-\overline{j}, \overline{c}=\overline{i}+2\overline{j}-\overline{k}$

అనుకొందాం.

సమాంతర ఫలకం ఘనపరిమాణం $\left[(\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c})\right]$

$$=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}$$

$=1(1-0),-1(-1-0)+1(2=1)$

$=1+1+3=5$ ఘనపు యూనిట్లు

25. $2\overline{i}-3\overline{j}+\overline{k}, \overline{i}+2\overline{j}-3\overline{k}, \overline{j}-t\overline{k}$ **సదిశలు సతలీయాలైతే,** t **ని కనుక్కోండి.**

సాధన. $\overline{a}=2\overline{i}-3\overline{j}+\overline{k}, \overline{b}=\overline{i}+2\overline{j}-3\overline{k}, \overline{c}=\overline{j}-t\overline{k}$ అనుకుందాం.

$\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ లు సతలీయ సదిశలు

$$\Rightarrow\left[\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right]=0\Rightarrow\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & -t\end{vmatrix}=0$$

$\Rightarrow 2(-2t+3)+3(-t)+(1)=0$

$\Rightarrow -7t=-7\Rightarrow t=1$

26. $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ **లు అతలీయ సదిశలై,** $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}, \overline{a}+p\overline{b}+2\overline{c}, -\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$ **సదిశలు సతలీయాలైతే** p **ని కనుక్కోండి.**

సాధన. $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$ లు అతలీయాలు.

$\Rightarrow\left[\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right]\neq 0$

$\left[\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}, \overline{a}+p\overline{b}+2\overline{c}, -\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}\right]=0$

లు సతలీయాలు.

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & p & 2\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}\left[\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right]=0\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & p & 2\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$$

$\therefore\left[\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right]\neq 0$

$1(p-2)-1(1+2)+1(1+p)=0$

$p-2-3+1+p=0, 2p=4\Rightarrow p=2$

27. $\overline{i}+\overline{j}+\overline{k},\overline{i}+\overline{j},$ **మరియు** $\overline{i}+2\overline{j}+\overline{k}$ **సదిశలను అంచులుగా గల చతుర్ముఖి ఘనపరిమాణాన్ని కనుక్కోండి.**

సాధన. $\overline{a}=\overline{i}+\overline{j}+\overline{k},\overline{b}=\overline{i}+\overline{j},\overline{c}=\overline{i}+2\overline{j}+\overline{k}$ లు చతుర్ముఖి సహావసానికి భుజాలు.

దాని ఘనపరిమాణం

$$=\frac{1}{6}\left[\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right]$$

$$=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\left[1(-1-0)-1(1-0)+1(2+1)\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left[-1-1+3\right]=\frac{1}{6}$$ ఘ.యూనిట్లు

28. $(\overline{a}+\overline{b}),(\overline{b}+\overline{c})\times(\overline{c}+\overline{a})=2\left[\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right]$ **అని చూపండి.**

సాధన. $(\overline{a}+\overline{b}),(\overline{b}+\overline{c})\times(\overline{c}+\overline{a})$

$$=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}\left[\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right]$$

$$\therefore\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=1(1-0)-1(0-1)+(0-1)$$

$=1+1=2,(1)$ లో వ్రాయగా

$$\left[(\overline{a}+\overline{b}),(\overline{b}+\overline{c})\times(\overline{c}+\overline{a})\right]=2\left[\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right]$$

29. $\bar{a}\times\left[\bar{a}\times\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\right]=\left(\bar{a}.\bar{a}\right)\left(\bar{b}\times\bar{a}\right)$ **అని రుజువు చేయండి.**

సాధన. $L.H.S=\bar{a}\times\left[\bar{a}\times\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\right]$

$$=\bar{a}\times\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\bar{a}-\left(\bar{a}.\bar{a}\right)(\bar{a}\times\bar{b})\right]$$
$$=(\bar{a}.\bar{b})(\bar{a}\times\bar{a})-(\bar{a}.\bar{a})(\bar{a}\times\bar{a})$$
$$=(\bar{a}.\bar{b})(\bar{0})-(\bar{a}.\bar{a})(\bar{a}\times\bar{b})$$
$$=(\bar{a}.\bar{a})(\bar{b}\times\bar{a})$$
$$\therefore \bar{a}\times\left[\bar{a}\times(\bar{a}\times\bar{b})\right]=(\bar{a}.\bar{a})(\bar{b}\times\bar{a})$$

30. $\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\right]\bar{d}=\left(\bar{a}.\bar{b}\right)\left[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}\right]$ **అనిచూపండి.**

సాధన. $\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\left(\bar{a}\times\bar{c}\right)\right]\bar{d}$

$$=\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right).\bar{c}\right]\bar{a}-\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right).\bar{a}\,\bar{c}\right].\bar{d}$$
$$=\left[\left[\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right]\bar{a}-\left[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}\right]\bar{c}\right].\bar{d}$$
$$=\left[\left[\bar{a}\ \ \bar{b}\ \ \bar{c}\right]\bar{a}-0\,.\,\bar{c}\right].\bar{d}$$
$$=\left[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}\right]\bar{a}.\bar{d}\quad\left(\because\ \bar{a}\,.\,\bar{b}=\bar{b}\,.\,\bar{a}\right)$$
$$\therefore\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\left(\bar{a}\times\bar{c}\right)\right].\bar{d}=\left(\bar{a}.\bar{d}\right).\left[\bar{a}\ \ \bar{b}\ \ \bar{c}\right]$$

31. $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d}$ **లు సతలీయ సదిశలైతే** $(\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{c}\times\bar{d})=0$ **అని చూపండి.**

సాధన.

$\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d}$ లు సతలీయాలు $\Rightarrow\bar{a}\times\bar{b}$ తలం π కు లంబం.

ఇట్లే $\bar{c}\times\bar{d}$ తలం π కు లంబం.

కనుక $\bar{a}\times\bar{b},\bar{c}\times\bar{d}$ లు సమాంతర సదిశలు.

$\Rightarrow(\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{c}\times\bar{d})=\bar{0}$

32. $\bar{a}.\left[(\bar{b}+\bar{c})\times(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})\right]=0$ **అని చూపండి.**

సాధన.

$\bar{a}.(\bar{b}+\bar{c})\times(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})$

$$=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}$$

$$=\left[1(1-1)=0(0-1)+0(0-1)\right]\left[\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right]$$
$$=0$$

32. $\left|\overline{P}\right|=2,\left|\overline{q}\right|=3,\left(\overline{p},\overline{q}\right)=\frac{\pi}{6}$ **అయితే** $\left|\overline{p}\times\overline{q}\right|^2$ **కనుక్కోండి.**

సాధన. $\left|\overline{p}\right|=2,\left|\overline{q}\right|=3,\left(\overline{p}.\overline{q}\right)=\frac{\pi}{6}$

$$\left|\overline{p}\times\overline{q}\right|^2=[\left|\overline{p}\right|\left|\overline{q}\right|\sin\left(\overline{p},\overline{q}\right)]^2=\left[2.3\sin\frac{\pi}{6}\right]^2=\left[2.3.\frac{1}{2}\right]^2$$

$$\left|\overline{p}\times\overline{q}\right|^2=[3]^2=9$$

$$\Rightarrow\boxed{\left|\overline{p}\times\overline{q}\right|^2=9}$$

33. $\overline{a}=2\overline{i}-\overline{j}+\overline{k},\overline{b}=\overline{i}-3\overline{j}-5\overline{k}$ **అయితే** $\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$ **ని కనుక్కోండి.**

సాధన. $\overline{a}=2\overline{i}-\overline{j}+\overline{k},\overline{b}=\overline{i}-3\overline{j}-5\overline{k}$

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -3 & -5\end{vmatrix}$$
$$=\overline{i}(5+3)-\overline{j}(-10-1)+\overline{k}(-6+1)$$
$$=8\overline{i}+11\overline{j}-5\overline{k}$$
$$\therefore\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=8\overline{i}+11\overline{j}-5\overline{k}$$
$$=\sqrt{64+121+25}=\sqrt{210}$$

34. $4\overline{i}+\frac{2p}{3}\overline{j}+p\overline{k},$ **సదిశ** $\overline{i}+2\overline{j}+3\overline{k}$ **కు సమాంతరం అయితే,** p **విలువను కనుక్కోండి.**

సాధన. $4\overline{i}+\frac{2p}{3}\overline{j}+p\overline{k},\overline{i}+2\overline{j}+3\overline{k}$ సదిశలు సమాంతరాలు కనుక

$$\therefore\frac{4}{1}=\frac{\frac{2p}{3}}{2}-\frac{p}{3}$$

$$\Rightarrow\frac{p}{3}=4\Rightarrow 12$$

35. $\bar{a}=\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k},\bar{b}=2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$ **లు ఆసన్న భుజాలుగా గల సమాంతర చతుర్భుజం, సదిశా వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.**

సాధన.

$\bar{a}=\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k},\bar{b}=2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$

సమాంతర చతుర్భుజం సదిశా వైశాల్యం

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{k} & \bar{c}\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}$$

$$=\bar{i}(4-1)-\bar{j}(2+2)+\bar{k}(-1-4)$$

$$3\bar{i}-4\bar{j}-5\bar{j}$$

సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం

$$=\sqrt{9+16+25}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

36. $\sqrt{6}$ **యూనిట్ల పరిమాణం కలిగి,** $2\bar{i}-\bar{k},3\bar{i}-\bar{j}-\bar{k}$ **లు రెండింటికీ లంబంగా ఉండే సదిశను కనుక్కోండి.**

సాధన. $\bar{a}=2\bar{i}-\bar{k},\bar{b}=3\bar{i}-\bar{j}-\bar{k}$

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 0 & -1\\ 3 & -1 & -1\end{vmatrix}$$

$$=\bar{i}=(0-1)-\bar{j}(-2+3)+\bar{k}(-2-0)$$

$$-\bar{i}-\bar{j}-2\bar{k}=-(\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k})$$

$$|\bar{a}\times\bar{b}|=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$$

$\sqrt{6}$ యూనిట్ల పరిమాణం కలిగి $\bar{a},\bar{b}$ కు లంబంగా ఉండే సదిశ $=\pm(\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k})$

37. $|\bar{a}|=13,|\bar{b}|=5,\bar{a}.\bar{b}=60$ **అయితే,** $|\bar{a}\times\bar{b}|$ **ని కనుక్కోండి.**

సాధన. $|\bar{a}|=13,|\bar{b}|=5,\bar{a}.\bar{b}=60$

$$|\bar{a}\times\bar{b}|^2=|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2-(\bar{a}.\bar{b})^2$$

$$=169\,.25-3600$$

$$=25[169-144]=25.25$$

$$|\bar{a}\times\bar{b}|^2=625$$

$$\therefore\boxed{|\bar{a}\times\bar{b}|=25}$$

38. $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ **లు పరస్పరం లంబంగా ఉండే యూనిట్ సదిశలైతే** $\left[\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right]^2$ **ను కనుక్కోండి.**

సాధన. $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ లు సరస్పరం లంబ యూనిట్ సదిశలు

$\bar{a}=\bar{i},\bar{b}=\bar{j},\bar{c}=\bar{k}$ అనుకుందాం.

$$\left[\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right]=\left[\bar{i},\bar{j},\bar{k}\right]$$
$$=\bar{i}.(\bar{j}\times\bar{k})$$
$$=\bar{i}.\bar{i}=1$$
$$\therefore\left[\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right]=(1)^2=1$$

39. $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ **లు మూడు సదిశలైతే,**

$\left[\bar{b}\times\bar{c}\ \ \bar{c}\times\bar{a}\ \ \bar{a}\times\bar{b}\right]=\left[\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right]^2$ **అని చూపండి.**

సాధన. $\left[\bar{b}\times\bar{c}\ \ \bar{c}\times\bar{a}\ \ \bar{a}\times\bar{b}\right]$

$$=\left(\bar{b}\times\bar{c}\right).\left\{\left(\bar{c}\times\bar{a}\right)\times\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\right\}$$

$$=\left(\bar{b}\times\bar{c}\right).\left\{\left(\bar{c}\ \ \bar{a}\ \ \bar{a}\right)\bar{a}\ -\left(\bar{a}\ \ \bar{a}\ \ \bar{b}\right)\bar{c}\right\}$$

$$=\left(\bar{b}\times\bar{c}\right).\bar{a}\left[\bar{c}\ \ \bar{a}\ \ \bar{b}\right]=\left[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}\right]^2$$

40. $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ **లు శూన్యేతర సదిశలు,** $\bar{b},\bar{c}$ **లు రెండింటికి** $\bar{a}$ **సదిశ లంబంగా ఉంటుంది.** $\bar{a}=2,\bar{b}=3,\ \ \bar{c}=4,$

$(\bar{b},\bar{c})=\dfrac{2\pi}{3}$ **అయితే** $\left|\left[\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right]\right|$ **ను కనుక్కోండి.**

సాధన.

$\therefore\bar{a}$ సదిశ $\bar{b},\bar{c}$ లకు లంబంగా ఉంది.

$\Rightarrow\bar{a}$ సదిశ $(\bar{b}\times\bar{c})$ కు సమాంతరంగా ఉంటుంది.

$\Rightarrow\left(\bar{a}.\bar{b}\times\bar{c}\right)=0^\circ$ లేదా 180°

$$\left[\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right]=\left|\left[\bar{a}.\bar{b}\times\bar{c}\right]\right|$$

$$=\left|\left[|\bar{a}|\left|\bar{b}\times\bar{c}\right|\cos(\bar{a}.\bar{b}\times\bar{c})\right]\right|$$
$$=\left||\bar{a}||\bar{b}||\bar{c}|\right|\sin(\bar{b}.\bar{c})\pm1$$
$$=|\bar{a}||\bar{b}||\bar{c}|\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$(2)(3)(4).\frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$$

41. $(\bar{b}\times\bar{c})\times(\bar{c}\times\bar{a})=3\bar{c}$ **అయితే,** $[\bar{b}\times\bar{c}\ \ \bar{c}\times\bar{a}\ \ \bar{a}\times\bar{b}]$ **విలువను కనుక్కోండి.**

సాధన. $3\bar{c}=(\bar{b}\times\bar{c})\times(\bar{c}\times\bar{a}) \quad =[\bar{b}\ \bar{c}\ \bar{a}]\bar{c}-[\bar{c}\ \bar{c}\ \bar{a}]\bar{b}$

$=[\bar{b}\ \bar{c}\ \bar{a}]\bar{c}-0$

$=[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]\bar{c}$

$\therefore [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]=3$

$\therefore [\bar{b}\times\bar{c}\ \bar{c}\times\bar{a}\ \bar{a}\times\bar{b}]=[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]^2$ (సమస్య 53)

42. $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}),\bar{b}\times(\bar{c}\times\bar{a}),\bar{c}\times(\bar{a}\times\bar{b})$ **సదిశలు సతలీయాలవుతాయని చూపండి.**

సాధన. $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})=(\bar{a}\ \bar{c})\bar{b}-(\bar{a}.\bar{b})\bar{c}$

$\bar{b}\times(\bar{c}\times\bar{a})=(\bar{b}.\bar{a})\bar{c}-(\bar{b}.\bar{c})\bar{a}$

$\bar{c}\times(\bar{a}\times\bar{b})=(\bar{c}.\bar{b})\bar{a}-(\bar{c}.\bar{a})\bar{b}$

పై మూడింటిని కలిపితే,

$\sum\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})=0$

$\therefore$ దత్త సదిశల మధ్య రేఖీయ సంబంధం ఉనిది కాబట్టి అవి సతలీయలవుతాయి.

43. $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ **లు నాలుగు సదిశలైతే,**

$(\bar{b}\times\bar{c}).(\bar{a}\times\bar{d})+(\bar{c}\times\bar{a}).(\bar{b}\times\bar{d})+$

$(\bar{a}\times\bar{b}).(\bar{c}\times\bar{d})=0$ **అని చూపండి.**

సాధన. $L.H.S=\begin{vmatrix}\bar{b}.\bar{a} & \bar{b}.\bar{d}\\ \bar{c}.\bar{a} & \bar{c}.\bar{d}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\bar{c}.\bar{b} & \bar{c}.\bar{d}\\ \bar{a}.\bar{b} & \bar{a}.\bar{d}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\bar{a}.\bar{c} & \bar{a}.\bar{d}\\ \bar{b}.\bar{c} & \bar{b}.\bar{d}\end{vmatrix}$

$=(\bar{b}.\bar{a})(\bar{c}.\bar{d})-(\bar{b}.\bar{d})(\bar{c}.\bar{a})+(\bar{c}.\bar{d})(\bar{a}.\bar{d})$

$-(\bar{a}.\bar{b})(\bar{c}.\bar{d})+(\bar{a}.\bar{c})(\bar{b}.\bar{d})+(\bar{a}.\bar{d})(\bar{b}.\bar{c})=0$

44. $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j}\,,\ \bar{b} = 3\bar{i} - \bar{k}$ **సదిశలు ఆసన్న భుజాలుగా గల సమాంతర చతుర్భుజం వైశాల్యం కనుక్కోండి.**

సాధన. ఇచ్చిన సమాంతర చతుర్భుజం సదిశా వైశాల్యం

$$= \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3\,\bar{i} + 2\bar{j} + 9\bar{k}$$

$\therefore$ వైశాల్యం $= |\bar{a} + \bar{b}| = \sqrt{94}$

45. $\bar{a}, \bar{b}$ **లు సరేఖీయాలు కాని యూనిట్ సదిశలు**

$\alpha = \bar{a} - (\bar{a}\,.\,\bar{b})\,\bar{b}, \beta = \bar{a} \times \bar{b}$ **అయితే** $|\beta| = |\alpha|$ **అని చూపండి.**

సాధన. a, b ల మధ్య కోణం θ అనుకొందాం

$$|\beta|^2 = |\bar{a} \times \bar{b}|^2 = |a|^2\,|\bar{b}|^2 - (\bar{a}\,.\,\bar{b})^2$$

$$= 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta,$$

$$|\alpha|^2 = |a|^2 + (\bar{a}\,.\,\bar{b})^2\,|\bar{b}|^2 - 2\,(\bar{a}\,.\,\bar{b})^2$$

$$= 1 + \cos^2\theta - 2\,\cos^2\theta = \sin^2\theta$$

$\therefore |\beta| = |\alpha|$

స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. యూనిట్ సదిశలు $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ ల మధ్య కోణం θ అయి, $\frac{1}{2}|\bar{e}_1, \bar{e}_2| = \sin\lambda\theta$ అయితే λ విలువను కనుక్కోండి.

సాధన. $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ లు యూనిట్ సదిశలు

$$|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = 1, (\bar{e}_1, \bar{e}_2) = \theta$$

$$\therefore \frac{1}{2}|\bar{e}_1 - \bar{e}_2| = \sin\lambda\theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}|\bar{e}_1 - \bar{e}_2|^2 = \sin^2\lambda\theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\left\{|\bar{e}_1|^2 - |\bar{e}_2|^2 - 2\bar{e}_1.\bar{e}_2\right\} = \sin^2\lambda\theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\left\{1 + 1 - 2|\bar{e}_1||\bar{e}_2|\cos\theta\right\} = \sin^2\lambda\theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\left\{2 - 2(1)(1)\cos\theta\right\} = \sin^2\lambda\theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) = \sin^2\lambda\theta$$

$$\therefore \sin^2\frac{\theta}{2} = \sin^2\lambda\theta$$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ గోళం సమీకరణం

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = (\sqrt{50})^2$$
$$i.e., (x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 50$$

2. $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}, \bar{b}=2\bar{i}+3\bar{j}+\bar{k}$ **అనుకొందాం. అప్పుడు**

$i)$ $\bar{a}$ **పై** $\bar{b}$ **యొక్క లంబ విక్షేప సదిశను, దాని పరిమాణాన్ని కనుక్కోండి.**

$ii)$ $\bar{a}$ **దిశలోనూ** $\bar{a}$**కి లంబ దిశలోను** $\bar{b}$ **యొక్క సదిశ అంశాలను కనుక్కోండి.**

సాధన. $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}, \bar{b}=2\bar{i}+3\bar{j}+\bar{k}$

$i)$ **సదిశ** $\bar{a}$ **పై** $\bar{b}$ **యొక్క లంబ విక్షేపం**

$$=\left(\frac{\bar{a}, \bar{b}}{|\bar{a}|^2}\right)\bar{a}=\frac{\left[(\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}).(2\bar{i}+3\bar{j}+\bar{k})\right]}{|\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}|^2}(\bar{i}+\bar{j}+\bar{k})$$

$$=\frac{(2+3+1)}{\left(\sqrt{3}\right)^2}=(\bar{i}+\bar{j}+\bar{k})=2(\bar{i}+\bar{j}+\bar{k})$$

దాని పరిమాణం

$=2|\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}|$

$=2\sqrt{1+1+1}$

$=2\sqrt{3}$ యూనిట్లు

$ii)$ $\bar{a}$ **దిశలో** $\bar{b}$ **యొక్క సదిశ**

అంశం $\bar{a}=\left(\frac{\bar{a}, \bar{b}}{|\bar{a}|^2}\right)\bar{a}$

$=2(\bar{i}+\bar{j}+\bar{k})$

$\bar{a}$ దిశకు లంబ దిశలో $\bar{b}$ యొక్క సదిశ అంశం

$=\bar{b}-\frac{(\bar{a}.\bar{b})a}{|\bar{a}|^2}$

$=(2\bar{i}+3\bar{j}+\bar{k})-2(\bar{i}+\bar{j}+\bar{k})$

$=2\bar{i}+3\bar{j}+\bar{k}-2\bar{i}-2\bar{j}-2\bar{k}$

$=\bar{j}-\bar{k}$

3. $\bar{a} = 2\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}, \bar{b} = 3\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$ **సదిశలైతే,** $2\bar{a} + \bar{b}, \bar{a} + 2\bar{b}$ **సదిశల మధ్య కోణాన్ని కనుక్కోండి.**

సాధన. ఇక్కడ $\bar{a} = 2\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$

$\bar{b} = 3\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$

$$\bar{\alpha} = 2\bar{a} + \bar{b}$$
$$= 2(2\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}) + (3\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k})$$
$$= 7\bar{i} + 3\bar{j} - 4\bar{k}$$

$$\bar{\beta} = \bar{a} + \bar{b}$$
$$= (2\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}) + 2(3\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k})$$

$= 8\bar{i} + \bar{k}$ అనుకుంటే

$2\bar{a} = +\bar{b}, \bar{a} + 2\bar{b}$ ల మధ్య కోణం 'θ'

$(i.e.,)(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \theta$ అయిన

$$\cos\theta = \frac{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}{|\bar{\alpha}||\bar{\beta}|}$$
$$= \frac{(7\bar{i} + 3\bar{j} - 4\bar{k}).(8\bar{i} + \bar{k})}{|7\bar{i} + 3\bar{j} - 4\bar{k}||8\bar{i} + \bar{k}|}$$
$$= \frac{(7)(8) + 3(0) + (-4)(1)}{\sqrt{49 + 9 + 16}\sqrt{64 + 1}} = \frac{52}{\sqrt{74 \times 65}}$$
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{52}{\sqrt{74 \times 65}}\right)$$

4. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ **సదిశలు క్రమంగా** $\bar{b} + \bar{c}, + \bar{c} + \bar{a}, \bar{a} + \bar{b}$ **లకు లంబంగా ఉండి,** $|\bar{a}| = 2, |\bar{b}| = 3, |\bar{c}| = 4$ **అయితే** $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$ **పరిమాణం కనుక్కోండి.**

సాధన. $|\bar{a}| = 2, |\bar{b}| = 3, |\bar{c}| = 4$

$(i.e.,)\bar{a} \perp (\bar{b} + \bar{c})$

$(i.e.,)\bar{a}.(\bar{b} + \bar{c}) = 0 \Rightarrow \bar{a}.\bar{b} + \bar{c}.\bar{a} = 0$

$\bar{b}.(\bar{c} + \bar{a}) = 0 \Rightarrow \bar{b}.\bar{c} + \bar{a}.\bar{b} = 0$ ఇదేవిధంగా

$\bar{c}.(\bar{a} + \bar{b}) = 0 \Rightarrow \bar{c}.\bar{a} + \bar{b}.\bar{c} = 0$

కలపగా $2(\bar{a}.\bar{b} + \bar{b}.\bar{c} + \bar{c}.\bar{a}) = 0$ (1)

ఇప్పుడు $|\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}|^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(\bar{a}.\bar{b} + \bar{b}.\bar{c} + \bar{c}.\bar{a})$

$= (2)^2 + (3\_^2 + (4)^2 + 2(0)$

$= 4 + 9 + 16 = 29$

$\therefore |\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}| = \sqrt{29}$ యూనిట్లు

5. $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$ బిందువు గుండా పోతూ $3\bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k}$ సదిశకు లంబంగా ఉండే తలం సమీకరణాన్ని, మూలబిందువు నుంచి ఈ తలానికి గల దూరాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన. $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$ బిందువు గుండాపోతూ, సదిశ

$\bar{n} = 3\bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k}$ కు లంబంగా ఉండే తలం సమీకరణం

$(\bar{r} - \bar{a}).\bar{n} = 0 \Rightarrow \bar{r}.\bar{n} = \bar{a}.\bar{n}$

$\Rightarrow \bar{r}.(3\bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k}) = (2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k})(3\bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k})$

$\Rightarrow \bar{r}.(3\bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k}) = (2)(3) + (3)(2-) + (-1)(-2)$

$\Rightarrow \bar{r}.(\bar{r}.(3\bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k}) = 2$

మూలబిందువు నుంచి తలంనకు లంబ దూరం

$$= \frac{\bar{a}.\bar{n}}{|\bar{n}|} = \frac{(2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}).(3\bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k})}{|3\bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k}|}$$

$= \frac{(6-6+2)}{\sqrt{9+4+4}} = \frac{2}{\sqrt{17}}$ యూనిట్లు

6. $\bar{a}, \bar{b}.\bar{c}, \bar{d}$ నాలుగు సతలీయ బిందువుల స్థాన సదిశలు

లు $(\bar{a}, \bar{b}).(\bar{b} - \bar{c}) = (\bar{b} - \bar{d}).(\bar{c} - \bar{a}) = 0$

సమీకరణాలను ధ్రువపరిస్తే, $\bar{d}$ బిందువు $\bar{a}, \bar{b}.\bar{c}$ లు శీర్షాలుగా గల త్రిభుజ లంబ కేంద్రం అవుతుందని చూపండి.

సాధన. A, B, C, D బిందువుల స్థాన సదిశలు $\bar{a}, \bar{b}.\bar{c}, \bar{d}$ లు

$\overline{DA} = \bar{a}, \bar{d}$

$\overline{CA} = \bar{b} - \bar{c}$

$\overline{DB} = \bar{b} - \bar{d}$

$\overline{AC} = \bar{c} - \bar{b}$

దత్తాంశం నుండి $(\bar{a}, \bar{b})(\bar{c} - \bar{a}) = 0$

$\Rightarrow \overline{DA}.\overline{CB} = 0$

$\Rightarrow \overline{DA} \perp BC$

$\therefore AD, \Delta ABC$ కు ఉన్నతి

ఇట్లే $(\bar{b} - \bar{d}).(\bar{c} - \bar{a}) = 0$

$\Rightarrow \overline{BD} \perp \overline{AC}$

$\Rightarrow \overline{BD} \perp AC$

$\therefore BD, \Delta ABC$ కు ఉన్నతి

ఉన్నతులు AD, BD లు D వద్ద ఖండించుకుంటాయి.

$\therefore D, \Delta ABC$ కు లంబ కేంద్రం.

8. $(5,-1,1),(7,-4,7),(1,-6,10),(-1,-3,4)$ **బిందువులు, ఒక సమ చతురస్రం** $(r\,\text{hom}\,bus)$ **శీర్షాలవుతాయని చూపండి.**

సాధన. $A(5,-1,1), B(7,-4,7), C(1,-6,10), D(-1,-3,4)$ దత్త బిందువులు.

$$AB = \sqrt{(7-5)^2+(-4+1)^2+(7-1)^2}$$
$$= \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$$

$$BC = \sqrt{(1-7)^2+(-6+4)^2+(10-7)^2}$$
$$= \sqrt{36+4+9} = \sqrt{49} = 7$$

$$CD = \sqrt{(-1-1)^2+(-3+6)^2+(4-10)^2}$$
$$= \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$$

$$DA = \sqrt{(5+1)^2+(-1+3)^2+(1-4)^2}$$
$$= \sqrt{36+4+9} = \sqrt{49} = 7$$

$$AC = \sqrt{(1-5)^2+(-6+1)^2+(10-1)^2}$$
$$= \sqrt{16+25+81} = \sqrt{122}$$

$$BD = \sqrt{(-1-7)^2+(-3+4)^2+(4-7)^2}$$
$$= \sqrt{64+1+9} = \sqrt{74}$$

$\therefore AB = BC = CD = DA = 7$ యూనిట్లు

$AC \neq BD$

$\therefore A, B, C, D$ బిందువులు సమచతురస్ర శీర్షాలు.

9. $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$ **అయితే** $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{b}\times\bar{c}=\bar{c}\times\bar{a}$ **అని నిరూపించండి.**

సాధన. $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}, \bar{a}=-\bar{b}-\bar{c}$

$\bar{a}\times\bar{b}=(-\bar{b}-\bar{c})\times\bar{b}$

$\therefore \bar{a}\times\bar{b}=\bar{b}\times\bar{c} \qquad (1)$

$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$

$\Rightarrow \bar{c}=-\bar{a}-\bar{b},$

$\bar{c}\times\bar{a}=(-\bar{a}-\bar{b})\times\bar{a}$

$=-\bar{a}\times\bar{a}-\bar{b}\times\bar{a}=\bar{0}+\bar{a}\times\bar{b}$

$\therefore \bar{c}\times\bar{a}=\bar{a}\times\bar{b} \qquad -(2)$

(1)(2) ల నుండి $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{b}\times\bar{c}=\bar{c}\times\bar{a}$

10. $\bar{a}=2\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}, \bar{b}=-\bar{i}+2\bar{j}-4\bar{k}$, $\bar{c}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$ **అయితే** $(\bar{a}\times\bar{b}).(\bar{b}\times\bar{c})$ **కనుక్కోండి.**

సాధన.

$\bar{a}=2\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}, \bar{b}=-\bar{i}+2\bar{j}-4\bar{k}, \bar{c}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & 2 & -4\end{vmatrix}=\bar{i}(-4+2)-\bar{j}(-8-1)+\bar{k}(4+1)$$

$=2\bar{i}+9\bar{j}+5\bar{k}$

$$\bar{b}\times\bar{c}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -1 & 2 & -4\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\bar{i}(2+4)-\bar{j}(-1+4)+\bar{k}(-1-2)$$

$=6\bar{i}-3\bar{j}-3\bar{k}$

$(\bar{a}\times\bar{b}).(\bar{b}\times\bar{c})=(2\bar{i}+9\bar{j}+5\bar{k}).(6\bar{i}-3\bar{j}-3\bar{k})$

$=(-2)(6)+(9)(-3)+5(-3)$

$=-12-27-15$

$=-54 \therefore (\bar{a}\times\bar{b}).(\bar{b}\times\bar{c})=-54$

11. $\bar{a},\bar{b}$ **లు** $|\bar{a}|=|\bar{b}|=5,\ (\bar{a},\bar{b})=45^\circ$ **తృప్తిపరిచే సదిశలు అనుకొందాం.** $\bar{a}-2\bar{b}, 3\bar{a}+2\bar{b}$ **సదిశలు భుజాలుగా గల త్రిభుజ వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.**

సాధన. $\bar{a},\bar{b}$ లు రెండుసదిశలు.

$$|\bar{a}|=|\bar{b}|=5,\ (\bar{a},\bar{b})=45^\circ$$

$$\bar{c}=\bar{a}-2\bar{b}, \bar{d}=3\bar{a}+2\bar{b}$$

$\bar{c},\bar{d}$ లు ఆసన్న భుజాలుగా గల త్రిభుజ వైశాల్యం $=\dfrac{|\bar{c}\times\bar{d}|}{2}$

$$|\bar{c}\times\bar{d}|=\left|(\bar{a}-2\bar{b})\times(3\bar{a}+2\bar{b})\right|$$

$$=\left|3(\bar{a}\times\bar{a})+2(\bar{a}\times\bar{b})-6(\bar{b}\times\bar{a})-4(\bar{b}\times\bar{b})\right|$$

$$=\left|3(0)+2(\bar{a}\times\bar{b})+6(\bar{a}\times\bar{b})-4(0)\right|$$

$$=\left|8(\bar{a}\times\bar{b})\right|$$

$$=8|\bar{a}\times\bar{b}|$$

$$=8|\bar{a}||\bar{b}|\sin(\bar{a},\bar{b})$$

$$=8.5.5\sin 45^\circ$$

$$=200.\frac{1}{\sqrt{2}}=100\sqrt{2}$$

$\therefore$ వైశాల్యం $=\dfrac{|\bar{c}\times\bar{d}|}{2}=\dfrac{100\sqrt{2}}{2}$

$=50\sqrt{2}$ చ. యూనిట్లు.

12. $\bar{a}.\bar{b}=\bar{a}.\bar{c},\ \bar{a}\times\bar{b}=\bar{a}\times\bar{c}, a\neq 0$ **అయితే** $\bar{b}=\bar{c}$ **అని చూపండి.**

ª ^ #. దత్తాంశం నుండి,

$$\bar{a}\,.\,\bar{b}=\bar{a}\,.\,\bar{c}\Rightarrow\bar{a}.(\bar{b}-\bar{c})=0.........(1)$$

$$\bar{a}\times\bar{b}=\bar{a}\times\bar{c}\Rightarrow\bar{a}\times(\bar{b}-\bar{c})=0.........(2)$$

$(1),(2)$ ల నుండి $(\bar{b}-\bar{c})$ సదిశ $\bar{a}$ కు లంబంగాను లేక సమాంతరముగాను ఉండదు.

$\therefore \bar{b}-\bar{c}=0 \qquad (a\neq b)$

$\therefore \bar{b}=\bar{c}$

13. $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ **లు సతలీయ యూనిట్ సదిశలైతే** $\left[2\overline{a}-\overline{b}\ 2\overline{b}-\overline{c}\ 2\overline{c}-a\right]$ **ను కనుక్కోండి.**

సాధన. $|\overline{a}|=|\overline{b}|=|\overline{c}|=1$

$$\left[2\overline{a}-\overline{b}\ 2\overline{b}-\overline{c}\ 2\overline{c}-a\right]$$
$$=\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ -1 & 0 & 2\end{vmatrix}\left[\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right]$$
$$=[2(4-0)+1(0-1)+0(0+2)]\left[\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right]$$
$$=(8-1)\left[\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right]$$

$=7(0)=0$ ($\therefore \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$ లు సతలీయ యూనిట్ సదిశలు

$(i.e.,)\left[\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right]=0$)

14. $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ **లు అతలీయ సదిశలు** $\alpha=\overline{a}+2\overline{b}+3\overline{c}$**,** $\overline{\beta}=2\overline{a}+\overline{b}-2\overline{c},\overline{\gamma}=3\overline{a}-7\overline{c}$ $\left[\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma}\right]$ **అయితే ను కనుక్కోండి.**

సాధన. $\alpha=\overline{a}+2\overline{b}+3\overline{c}$

$\overline{\beta}=2\overline{a}+\overline{b}-2\overline{c}$

$\overline{\gamma}=3\overline{a}-7\overline{c}$

$\therefore \overline{a},\overline{b},\overline{c}$ అతలీయ సదిశలు, $\left[\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right]\neq 0$

అప్పుడు $\left[\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma}\right]=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & 0 & -7\end{bmatrix}\left[\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right]$

$$=1(-7-0)-2(-14+6)+3(0-3)(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$$
$$=(-7+16-9)\left|\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right|$$
$$\therefore\left[\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma}\right]=0$$

15. $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ **లు అతలీయ సదిశలు.**

$[2\bar{a}-\bar{b}+3\bar{c},\bar{a}+\bar{b}-2\bar{c},\bar{a}+\bar{b}-3\bar{c}]=\lambda\left[\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right]$ **అయితే** λ **విలువను కనుక్కోండి.**

సాధన. $[2\bar{a}-\bar{b}+3\bar{c},\bar{a}+\bar{b}-2\bar{c},\bar{a}+\bar{b}-3\bar{c}]$

$$=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -3\end{vmatrix}\left[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right]$$

$$=[2(-3+2)+1(-3+2)+3(1-1]$$
$$\left[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right]$$

$$=(-2-1-0)\left[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right]$$

$$=-3\left[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right] \qquad (1)$$

$$\therefore [2\bar{a}-\bar{b}+3\bar{c},\bar{a}+\bar{b}-2\bar{c},\bar{a}+\bar{b}-3\bar{c}]=$$
$$\lambda\left[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right] \qquad (2)$$

$(1),(2)$ ల నుండి

$\Rightarrow \lambda=-3$

16. $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ **లు అతలీయసదిశలైతే,** $-\bar{a}+4\bar{b}-3\bar{c},$
$3\bar{a}+2\bar{b}-5\bar{c},\ -3\bar{a}+8\bar{b}-5\bar{c},-3\bar{a}+2\bar{b}+\bar{c}$ **అనే నాలుగు బిందువులు సతలీయాలని చూపండి.**

సాధన. ఇచ్చిన బిందువులను వరుసగా A,B,C,D అనుకొందాం

$\therefore \overline{AB}=4\bar{a}-2\bar{b}-2\bar{c},\ \overline{AC}=-2\bar{a}+4\bar{b}-2\bar{c}$

$\overline{AD}=-2\bar{a}-2\bar{b}+4\bar{c}$

$\therefore\left[\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD}\right]$

$$=\begin{vmatrix}4 & -2 & -2\\ -2 & 4 & -2\\ -2 & -2 & 4\end{vmatrix}\left[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right]$$

$$=\left[4(16-4)+2(-8-4)-2(4+8)\right]\left[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right]$$

$$=[48-24-24]\left[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right]=0$$

$\therefore \overline{AB},\ \overline{AC},\overline{AD}$ సదిశలు సతలీయ సదిశలు

$\therefore A,B,C,D$ బిందువులు సతలీయాలవుతాయి

17. $\overline{a} = 2\overline{i} + 3\overline{j} + 4\overline{k}, \overline{b} = \overline{i} + \overline{j} - \overline{k},\ \overline{c} = \overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$ **అయితే** $\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c})$ **ని గణన చేయండి. ఈ సదిశ** $\overline{a}$ **కి లంబంగా ఉంటుందని సరిచూడండి.**

సాధన.

$$\overline{b} \times \overline{c} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \overline{i}(1-1) - \overline{j}(1+1) + \overline{k}(-1-1)$$
$$= -2\overline{j} - 2\overline{k}$$

$$\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c}) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \overline{i}(-6+8) - \overline{j}(-4-0) + \overline{k}(-4-0)$$
$$= 2\overline{i} + 4\overline{j} - 4\overline{k}$$

ఇప్పుడు $\left[(\overline{a} \times \overline{b}) \times \overline{c}\right].\overline{a} = (2\overline{i} + 4\overline{j} - 4\overline{k}).$

$$(2\overline{i} + 4\overline{j} - 4\overline{k})$$

$\therefore \overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c}), \overline{a}$

కు లంబంగా ఉంటుంది.

18. $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ **లు సమాన పరిమాణం గల సదిశలు,** $|\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}|=\sqrt{6}$ **మరియు** $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ **లలో ప్రతి ఒక సదిశ ఇంకొక దానితో చేసే కోణం** $\frac{\pi}{3}$ **అయితే,** $|\bar{a}|$ **విలువను కనుక్కోండి.**

సాధన. $|\bar{a}|=|\bar{b}|=|\bar{c}|=\lambda$ (అనుకోండి)

$$(\bar{a}.\bar{b})=(\bar{b}.\bar{c})=(\bar{c}.\bar{a})=60^\circ$$
$$(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})^2=|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2+|\bar{c}|^2$$
$$+2(\bar{a}.\bar{b}+\bar{b}.\bar{c}+\bar{c}.\bar{a})$$
$$=\lambda^2+\lambda^2+\lambda^2+2|\bar{a}||\bar{b}|\cos(60^\circ)$$
$$+2|\bar{b}||\bar{c}|\cos(60^\circ)+2|\bar{c}||\bar{a}|\cos(60^\circ)$$
$$=3\lambda^2+2\lambda^2\left(\frac{1}{2}\right)+2\lambda^2\left(\frac{1}{2}\right)+2\lambda^2\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=6\lambda^2$$
$$\therefore|\bar{a},\bar{b},\bar{c}|=\sqrt{6}\lambda$$
$$|\bar{a},\bar{b},\bar{c}|=\sqrt{6}\Rightarrow\lambda=1$$
$$|\bar{a}|=1$$

19. **యూనిట్ సదిశలు** $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ **లతో** $\bar{a}$ **సదిశ** $\bar{b},\bar{c}$ **లు రెండింటికీ లంబంగా ఉండి,** $\bar{b},\bar{c}$ **ల మధ్య కోణం** $\frac{\pi}{3}$ **అయితే** $|\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}|$ **విలువను కనుక్కోండి.**

సాధన. $|\bar{a}|+|\bar{b}|+|\bar{c}|=1$

$\therefore\bar{a}$ సదిశ $\bar{b},\bar{c}$ సదిశలున్న తలానికి లంబంగా ఉంది.

$$\Rightarrow\bar{a}.\bar{b}=0,\bar{a}.\bar{c}=0$$
$$(\bar{b}.\bar{c})=\frac{\pi}{3}$$

ఇప్పుడు $|\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}|=|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2+|\bar{c}|^2$

$$+2(\bar{a}.\bar{b})+2(\bar{b}.\bar{c})+2(\bar{c},\bar{a})$$
$$=1+1+1+2(0)$$
$$+2|\bar{b}||\bar{c}|\cos\frac{\pi}{3}+2(0)$$
$$=3+2(1)(1)\times\frac{1}{2}=4$$

20. $3\bar{i}-5\bar{j}-\bar{k}, -\bar{i}+5\bar{j}+7\bar{k}$ **సదిశలను స్థాన సదిశలుగా గల బిందువుల గుండా పోతూ, $3\bar{i}-\bar{j}+7\bar{k}$ సదిశకు సమాంతరంగా ఉండే తలం సమీకరణం $3x+2y-z=0$ అని చూపండి.**

సాధన. $A(3\bar{i}-5\bar{j}-\bar{k}), B(-\bar{i}+5\bar{j}+7\bar{k})$ బిందువుల గుండా పోతూ, $c=3\bar{i}-\bar{j}+7\bar{k}$ సదిశలకు సమాంతరంగా ఉండే తలం సమీకరణం

$$
\begin{aligned}
b = \overrightarrow{AB} &= (-\bar{i}+5\bar{j}+7\bar{k})-(3\bar{i}-5\bar{j}-\bar{k}) \\
&= -\bar{i}+5\bar{j}+7\bar{k}-3\bar{i}-5\bar{j}-\bar{k} \\
&= -4\bar{i}+10\bar{j}+8\bar{k}
\end{aligned}
$$

తలం సమీకరణం $\left[\bar{r}\,\bar{b}\,\bar{c}\right]=\left[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right]$

$$
\left|\bar{r}\,\bar{b}\,\bar{c}\right| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ -4 & 10 & 8 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= x(70+8)-y(-28-24)+z(4-30) \\
&= 78x+52z-26z \\
&= 26(3x+2y-z)
\end{aligned}
$$

$$
\left|\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -1 \\ -4 & 10 & 8 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 3(70+8)+5(-28-24)-1(4-30) \\
&= 234-269+26=0
\end{aligned}
$$

$\therefore$ కావలసిన తలం సమీకరణం $26(3x+2y-z)=0$

$i.e., 3x+2y-z=0$

21. $\bar{a}=\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k},\quad \bar{b}=2\bar{i}+\bar{j}+\bar{k},$

$\bar{c}=\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$ **,** $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}),\ \left|(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}\right|$ **లను కనుక్కోండి.**

సాధన. $\bar{b}\times\bar{c}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}$

$=\bar{i}[-1-2]-\bar{j}[-2-]+\bar{k}[4-4]$

$\bar{b}\times\bar{c}=-3\bar{i}+3\bar{j}+3\bar{k}$

$a\times(b\times c)=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & -2 & 1\\ -3 & 3 & 3\end{vmatrix}$

$=\bar{i}(-6-3)-\bar{j}(3+3)+\bar{k}(3-6)$

$\therefore\ \bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})=-9\bar{i}-6\bar{j}-3\bar{k}$

$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}$

$=\bar{i}[-2-1]-\bar{j}[1-2]+\bar{k}[1+4]$

$\bar{a}\times\bar{b}=-3\bar{i}+\bar{j}+5\bar{k}$

$(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -3 & 1 & 5\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}$

$=\bar{i}(-1-10)-\bar{j}(3-5)+\bar{k}(-6-1)$

$(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}=-11\bar{i}+2\bar{j}-7\bar{k}$

$\left|(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}\right|=\sqrt{(-11)^2+(2)^2+(-7)^2}$

$=\sqrt{121+4+49}$

$\therefore\ \left|(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}\right|=\sqrt{174}$

22. $A(3,2,1), B(4,\lambda,5), C(4,2,-2), D(6,5,-1)$ **బిందువులు సతలీయాలైతే λ ను కనుక్కోండి.**

సాధన. $'O'$ మూలబిందువు

$$\overline{OA} = 3\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$$
$$\overline{OB} = 4\overline{i} + \lambda\overline{j} + 5\overline{k}$$
$$\overline{OC} = 4\overline{i} + 2\overline{j} - 2\overline{k}$$
$$\overline{OD} = 6\overline{i} + 5\overline{j} - \overline{k}$$
$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \overline{i} + (\lambda - 2)\overline{j} + 4\overline{k}$$
$$\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = \overline{i} + (0)\overline{j} - 3\overline{k}$$
$$\overline{AD} = \overline{OD} - \overline{OA} = 3\overline{i} + 3\overline{j} - 2\overline{k}$$

$\therefore A, B, C, D$ లు సతలీయాలు

$\Rightarrow \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ లు సతలీయాలు

$$\Rightarrow \left|\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & (\lambda-2) & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 1(0+9) - (\lambda-2)(-2+9) + 4(3-0) = 0$$
$$\Rightarrow 9 - (\lambda-2)(7) + 12 = 0$$
$$\Rightarrow 9 - 7\lambda + 14 + 12 = 0$$
$$\Rightarrow 7\lambda = 35$$
$$\Rightarrow \lambda = 5$$

23. $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}, \bar{b} = \bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k},$

$\bar{c} = -\bar{i} + \bar{j} - 4\bar{k}, \bar{d} = \bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k},$ **అయితే**

$\left|\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right|$ **ను గణన చేయండి.**

సాధన. $$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \bar{i}(1-6) - \bar{j}(2+3) + \bar{k}(-4-1)$$

$$\bar{a}\times\bar{b} = -5\bar{i} - 5\bar{j} - 5\bar{k}$$

$$\bar{c}\times\bar{d}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -1 & 1 & -4\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\bar{i}(1+4)-\bar{j}(-1+4)+\bar{k}(-1-1)$$

$$\bar{c}\times\bar{d}=5\bar{i}-3\bar{j}-2\bar{k}$$

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -5 & -5 & -5\\ 5 & -3 & -2\end{vmatrix}$$

$$=\bar{i}(10-15)-\bar{j}(10+25)+\bar{k}(15+25)$$

$$=-5\bar{i}-35\bar{j}+40\bar{k}$$

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)=+5\left[-\bar{i}-7\bar{j}+8\bar{k}\right]$$

$$\left|\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right|=+5\sqrt{1+49+64}$$

$$\therefore\left|\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right|=+5\sqrt{114}$$

24. $(1,2,1)(3,2,5),(2,-1,0),(-1,0,1)$ **శీర్షాలుగా గల చతుర్ముఖి ఘనపరిమాణాన్ని కనుక్కోండి.**

సాధన. $'O'$ మూలబిందువు. A,B,C,D లు చతుర్ముఖి శీర్షాలు.

$$\overline{OA}=\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$$

$$\overline{OB}=3\bar{i}+2\bar{j}+5\bar{k}$$

$$\overline{OC}=2\bar{i}-\bar{j}$$

$$\overline{OD}=-\bar{i}+\bar{k}$$

$$\overrightarrow{AB}=(3\bar{i}+2\bar{j}+5\bar{k})-(\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k})$$

$$=3\bar{i}+2\bar{j}+5\bar{k}-\bar{i}-2\bar{j}-\bar{k}$$

$$=2\bar{i}+4\bar{k}$$

$$\overrightarrow{AC}=(2\bar{i}-\bar{j})-(\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k})$$

$$=2\bar{i}-\bar{j}-\bar{i}-2\bar{j}-\bar{k}$$

$$=\bar{i}-3\bar{j}-\bar{k}$$

$$\overrightarrow{AD}=(-1+\bar{k})=(\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k})$$

$$=-\bar{i}+\bar{k}-\bar{i}-2\bar{j}-\bar{k}$$

$$=-2\bar{i}-2\bar{j}$$

చతుర్ముఖి ఘనపరిమాణం

$$=\frac{1}{6}\left[\left(\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right)\right]=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\left|2(0-2)-0(0-2)+4(-2-6)\right|$$

$$=\frac{1}{6}\left|-4+0-32\right|$$

$$=\frac{36}{6}=6$$ ఘనపు యూనిట్లు

25. $\bar{a}=\bar{i}-2\bar{j}+3\bar{k},\quad \bar{b}=2\bar{i}-\bar{j}+\bar{k},$

$\bar{c}=\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$ **అయితే** $\left|\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right|, \left|\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right|$ **లు కనుక్కోండి.**

సాధన. $$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\bar{i}(-2-3)-\bar{j}(1-6)+\bar{k}(1+4)$$

$$\bar{a}\times\bar{b}=-5\bar{i}+5\bar{j}+5\bar{k}$$

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -5 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=\bar{i}(10-5)-\bar{j}(-10-5)+\bar{k}(-5-5)$$

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}=5\bar{i}+15\bar{j}-10\bar{k}$$

$$\left|\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right|=5\sqrt{1+9+4}$$

$$\left|\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right|=5\sqrt{14}$$

$$\bar{b}\times\bar{c}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=\bar{i}(2-1)-\bar{j}(4-1)+\bar{k}(2-1)=\bar{i}-3\bar{j}+\bar{k}$$

$$\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & -2 & 3\\ 1 & -3 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\bar{i}\left(-2+9\right)-\bar{j}\left(1-3\right)+\bar{k}\left(-3+2\right)$$

$$\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)=7\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}$$

$$\left|\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right|=\sqrt{49+4+1}$$

$$\therefore\ \left|\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right|=\sqrt{54}$$

26. ఒక ఘనంలో రెండు కర్ణాల మధ్య చిన్న కోణం θ అయితే $\cos=\frac{1}{3}$ అని చూపండి.

సాధన. సార్వత్రికతకు భంగం లేకుండా ఘనం యొక్క భుజం పరిమాణం 1 అనుకోవచ్చు.

$\therefore\ \overline{OA}=\bar{i},\ \overline{OC}=\bar{j},\ \overline{OG}=\bar{k}$

$\therefore\ \overline{OE}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k},\ \overline{BG}=-\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}$ లు రెండు కర్ణ సదిశలు

OE, BG కర్ణాల మధ్య చిన్న కోణం θ అనుకొంటే

$$\cos\theta=\frac{|OE.BG|}{|OE||BG|}=\frac{|-1-1+1|}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{1}{3}$$

27. $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ లు మూడు సదిశలైతే,

$$\left[\bar{b}+\bar{c}\ \ \bar{c}+\bar{a}\ \ \bar{a}+\bar{b}\right]=2\left[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}\right].$$

సాధన. $\left[\bar{b}+\bar{c}\ \ \bar{c}+\bar{a}\ \ \bar{a}+\bar{b}\right]$

$$=\left(\bar{b}+\bar{c}\right).\left\{\left(\bar{c}+\bar{a}\right)\times\left(\bar{a}+\bar{b}\right)\right\}$$

$$=\left(\bar{b}+\bar{c}\right).\left\{\bar{c}\times\bar{a}+\bar{c}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{b}\right\}$$

$$=\bar{b}.\left(\bar{c}\times\bar{a}\right)+\bar{b}.\left(\bar{c}\times\bar{b}\right)+\bar{b}.\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)$$

$$+\bar{c}.\left(\bar{c}\times\bar{a}\right)+\bar{c}.\left(\bar{c}\times\bar{b}\right)+\bar{c}.\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)$$

$$=\left[\bar{b}\ \bar{c}\ \bar{a}\right]+0+0+0\left[\bar{c}\ \bar{a}\ \bar{b}\right]$$

$$=2\left[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}\right]$$

28. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ **లు యూనిట్ సదిశలు,** $\bar{b}, \bar{c}$ **లు సమానితరాలు కావు.** $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \frac{1}{2}\bar{b}$ **అయితే,** $\bar{a}$ **సదిశ** $\bar{b}, \bar{c}$ **లతో చేసే కోణాలను కనుక్కోండి.**

సాధన. $\frac{1}{2}\bar{b} = \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a}.\bar{c})\bar{b} - (\bar{a}.\bar{b})\bar{c}$

$\bar{b}, \bar{c}$ సదిశలు సమాంతరాలు కావు కాబట్టి రెనిడువైపులా అనురూప గుణకాలను పోలిస్తే

$\bar{a}.\bar{c} = \frac{1}{2}, \bar{a}.\bar{b} = 0$

$\therefore$ $\bar{a}.\bar{c}$ ల మధ్య కోణం $\frac{\pi}{3}$. $\bar{a}, \bar{b}$ లు పరస్పర లంబ సదిశలు

29. $A = (2, 3-1), B = (4, 5, 6), C\ (3, 6, 5)$ **బిందువులగుండా పోయే తలం సమీకరణం కనుక్కోండి.**

సాధన. 'O' మూలబిందువు. ΔABC తలంలో P ఏదైనా బిందువు స్థాన దిశను $r = xi + yj + zk$ అనుకొందాం.

$\therefore \overline{AP}, \overline{AB}, \overline{AC}$ సదిశలు సతలీయాలవుతాయి.

$\therefore \left[\overline{AP}\ \overline{AB}\ \overline{AC}\right] = 0$

ఇప్పుడు $AP = (x-2,\ y-3,\ z+1)$

$\overline{AB} = (2, 2, 3), \overline{AC} = (1, 3, 6)$

$\therefore \left[\overline{AP}\ \overline{AB}\ \overline{AC}\right] = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

అంటే, $(x-2)(12-9) - (y-3)(12-3) + (z+1)(6-2) = 0$

అంటే $3x - 9y + 4z + 25 = 0$

30. $A=(3,-2,-1)$ **బిందువుగుండా పోతూ**

$\bar{b}=\bar{i}-2\bar{j}+4\bar{k},\ \bar{c}=3\bar{i}+2\bar{j}-5\bar{k}$ **సదిశ సమాంతరంగా ఉండే తలంసమీకరణం కనుక్కోండి.**

సాధన. $\bar{a}=3\bar{i}-2\bar{j}-\bar{k}$ అనుకొందాం. తలంలో P అనే బిందువు స్థాన సదిశ $\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$ అనుకొనుము

$$\therefore \left[\bar{r}-\bar{a}\ \ \bar{b}\ \bar{c}\right]=0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z+1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (x-3)(10-8)-(y+2)(-5-12)$$

$$+(z+1)(2+6)=0$$

$$\Rightarrow 2x+17y+8z+36=0$$

31 . $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)^2+\left(\bar{a}.\bar{b}\right)^2=|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2$ **అని రుజువు చేయండి.**

సాధన. $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)^2+\left(\bar{a}.\bar{b}\right)^2$

$$=|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2\sin^2\left(\bar{a},\bar{b}\right)+|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2\cos^2\left(\bar{a},\bar{b}\right)$$

$$=|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2\left[\sin^2\left(\bar{a},\bar{b}\right)+\cos^2\left(\bar{a},\bar{b}\right)\right]$$

$$=|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

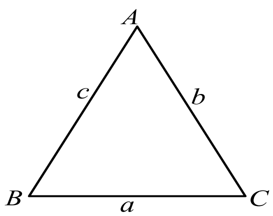
$$=|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2$$

ధీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు

1. ΔABC **లో** $BC, CA, AB,$ **ల పొడవులు వరుసగా** a,b,c **అయి, దాని కేంద్రభాసం** G **అయితే**

$a^2+b^2+c^2 = \quad 3\left(OA^2+OB^2+OC^2\right)-9\left(OG\right)^2$ **('O' ఏదైనా బిందువు)**

సాధన.



ఇచ్చుట $BC=a, CA=b, AB=C$

'O' ఆది బిందువనుకొనుము.

$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=3\overline{OG}$

$a^2=\overline{BC}=\left(\overline{OC}-\overline{OB}\right)^2=\overline{OC}^2+\overline{OB}^2-2\overline{OC}.\overline{OB}$

$b^2=\overline{CA}^2=\left(\overline{OA}-\overline{OC}\right)^2=\overline{OA}^2+\overline{OC}^2-2\overline{OA.OC}$

$c^2=\overline{AB}^2=\left(\overline{OB}-\overline{OA}\right)^2=\overline{OB}^2+\overline{OA}^2-2\overline{OB}.\overline{OA}$

$a^2+b^2+c^2=2\left[\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2\right]-2[\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2]$

$-2[\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OB}.\overline{OC}+\overline{OC}.\overline{OA}]$ -----------------(1)

$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=3\overline{OG}$

ఇరువైపులా వర్గము చేయగా

$\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2+2\left(\overline{OA}.\overline{OB}+\overline{OB}.\overline{OC}+\overline{OC}.\overline{OA}\right) \quad =9\overline{OG}^2$

$\Rightarrow -2\left(\overline{OA}.\overline{OB}+\overline{OB}.\overline{OC}+\overline{OC}.\overline{OA}\right) \quad =\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2-9\overline{OG}^2$ (2)

సమీకరణం (1) లో ప్రతిక్షేపించగా,

$a^2+b^2+c^2=2\left[\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2\right]+\left[\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2\right]-9\overline{OG}^2$

$a^2+b^2+c^2=3\left[\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2\right]-9\overline{OG}^2$

2. ఘనం కర్ణాలతో ఒక రేఖ చేసే కోణాలు $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ అయితే

$\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 + \cos^2\theta_4 = \frac{4}{3}$ అవుతుందని చూపండి.

సాధన.'O' మూలబిందువు ఘనం ప్రతి భుజం $= a, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ లు యూనిట్ సదిశలు

$$\overline{OA} = a\bar{i}, \overline{OB} = a\bar{j} \text{ and } \overline{OC} = a\bar{k}$$

$$\overline{OP} = \overline{ON} + \overline{NP}$$

$$= \overline{OC} + \overline{CN} + \overline{OB}$$

$$= \overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB} = a(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k})$$

$$\overline{CL} = \overline{CO} + \overline{OA} + \overline{AL}$$

$$= -\overline{OC} + \overline{OA} + \overline{OB} = a(\bar{i} + \bar{j} - \bar{k})$$

$$\overline{BN} = \overline{BO} + \overline{ON}$$

$$= -\overline{OB} + \overline{OC} + \overline{CN}$$

$$= -\overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OA} = (\bar{i} - \bar{j} + \bar{k})$$

$$\overline{AM} = \overline{AO} + \overline{OC} + \overline{CM}$$

$$= -\overline{OA} + \overline{OC} + \overline{OB} = a(-\bar{i} + \bar{j} + \bar{k})$$

$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ రేఖ ఘనం కర్ణాలతో $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ కోణాలు చేస్తుంది అనుకోండి.

అప్పుడు $\cos\theta_1 = \dfrac{\bar{r}.\overline{OP}}{|\bar{r}||\overline{OP}|}$

$$= \frac{(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}).a(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k})}{|x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}||\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}|}$$

$$= \frac{a(x + y + z)}{a\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(\sqrt{3})}$$

$$\therefore \cos\theta_1 = \frac{x + y + z}{\sqrt{3}(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}$$

ఇదేవిధంగా $\cos\theta_2 = \dfrac{x + y - z}{\sqrt{3}(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}$

$$\cos\theta_3 = \frac{x - y + z}{\sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos\theta_4 = \frac{-x + y + z}{\sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

ఇప్పుడు $\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 + \cos^2\theta_4$

$$= \frac{(x+y+z)^2+(x+y-z)^2+(x-y+z)^2+(-x+y+z)^2}{3(x^2+y^2+z^2)}$$

$$= \frac{4(x^2+y^2+z^2)}{3(x^2+y^2+z^2)} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 + \cos^2\theta_4 = \frac{4}{3}$$

3. $\bar{a} = \bar{i}+\bar{j}+\bar{k}, \bar{c} = \bar{j}-\bar{k}$ **అయితే,** $\bar{a}\times\bar{b} = \bar{c}$ **మరియు** $\bar{a}.\bar{b} = 3$ **తృప్తిపరచే** $\bar{b}$ **కనుక్కోండి.**

సాధన. $\bar{b} = b_1\bar{i}+b_2\bar{j}+b_3\bar{k}$ అనుకొందాం.

$$\bar{a}.\bar{b} = 3$$
$$\Rightarrow (\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}).(b_1\bar{i}+b_2\bar{j}+b_3\bar{k}) = 3$$
$$\Rightarrow b_1+b_2+b_3 = 3 \qquad -(1)$$
$$\bar{a}\times\bar{b} = \bar{c}$$
$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (\bar{j}-\bar{k})$$

$$\Rightarrow \bar{i}(b_3-b_2) - \bar{j}(b_3-b_1) + \bar{k}(b_2-b_1) = \bar{j}-\bar{k}$$
$$\Rightarrow \bar{i}(b_3-b_2) + \bar{j}(b_1-b_3) - \bar{k}(b_1-b_2) = \bar{j}-\bar{k}$$
$$\Rightarrow b_3-b_2 = 0 \Rightarrow b_2 = b_3 \qquad (2)$$

$$b_1 - b_3 = 1$$
$$b_1 - b_2 = 1$$

$(1),(2)$ ల నుండి

$$b_1+b_2+b_3 = 3$$
$$b_1+2b_2 = 3$$

$$b_1 - b_2 = 1 \qquad -(4)$$

$$3b_2 = 2 \Rightarrow b_2 = \frac{2}{3}, b_3 = \frac{2}{3}$$

$$\therefore b_1 - b_2 = 1$$

$$\Rightarrow b_1 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\therefore \overline{b} = b_1\overline{i} + b_2\overline{j} + b_3\overline{k}$$

$$= \frac{5}{3}\overline{i} + \frac{2}{3}\overline{j} + \frac{2}{3}\overline{k}$$

$$= \frac{1}{3}(5\overline{i} + 2\overline{j} + 2\overline{k})$$

4. $\overline{a}, \overline{b}$ **లు ఏవైనా సదిశలైతే** $(1+|\overline{a}|^2)(1+|\overline{b}|^2) \quad = 1 - |\overline{a}.\overline{b}|^2 + |\overline{a} + \overline{b} + \overline{a} \times \overline{b}|^2$ **అని చూపండి.**

సాధన. $(\overline{a}.\overline{b}) = \theta$ అనుకోండి

$$RHS = |1 - \overline{a}.\overline{b}|^2 + |\overline{a} + \overline{b} + \overline{a} \times \overline{b}|^2$$

$$= \left|1 + (\overline{a}.\overline{b})^2 - 2(\overline{a}.\overline{b}) + |\overline{a}|^2 + |\overline{b}|^2 + |\overline{a} \times \overline{b}|\right|^2 + 2(\overline{a}.\overline{b}) + 2[\overline{b}.(\overline{a} \times \overline{b})] + 2[(\overline{a} \times \overline{b}).\overline{a}]$$

$$= 1 + |\overline{a}|^2 |\overline{b}|^2 \cos^2\theta - 2(\overline{a}, \overline{b}) + |\overline{a}|^2 + |\overline{b}|^2 + |\overline{a} \times \overline{b}|^2 + 2(\overline{a}, \overline{b}) + 0 + 0$$

ఇక్కడ $\overline{b}.(\overline{a} \times \overline{b}) = 0, (\overline{a} \times \overline{b}).\overline{a} = 0$

$$= 1 + |\overline{a}|^2 + |\overline{b}|^2 (1 - \sin^2\theta) + |\overline{a}|^2 + |\overline{b}|^2 + |\overline{a} \times \overline{b}|^2$$

$$= 1 + |\overline{a}|^2 |\overline{b}|^2 - |\overline{a}|^2 |\overline{b}|^2 \sin^2\theta + |\overline{a}|^2 + |\overline{b}|^2 + |\overline{a} \times \overline{b}|^2$$

$$= 1 + |\overline{a}|^2 |\overline{b}|^2 - |\overline{a} \times \overline{b}|^2 + |\overline{a}|^2 + |\overline{b}| + |\overline{a} \times \overline{b}|^2$$

$$= 1 + |\overline{a}|^2 + |\overline{b}|^2 + |\overline{a}|^2 |\overline{b}|^2$$

$$= (1 + |\overline{a}|^2)(1 + |\overline{b}|^2)$$

LHS

5. $\bar{a}-=3\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k},\bar{b}=-\bar{i}+3\bar{j}+2\bar{k},\bar{c}=4\bar{i}+5\bar{j}-2\bar{k},\bar{d}=-\bar{i}+3\bar{j}+5\bar{k}$

అయితే ఈ కింది వాటిని గణించండి.

i) $(\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{c}\times\bar{d})$

ii) $(\bar{a}\times\bar{b}).\bar{c}-(\bar{a}\times\bar{d}).\bar{b}$

సాధన. i) $(\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{c}\times\bar{d})$

$\therefore \bar{a}-=3\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k},\bar{b}=-\bar{i}+3\bar{j}+2\bar{k}$

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & -1 & 2\\ -1 & 3 & 2\end{vmatrix}$$

$$=\bar{i}(-2-6)-\bar{j}(6+2)+\bar{k}(9-1)$$
$$=-8\bar{i}-8\bar{j}+8\bar{k}=8(-\bar{i}-\bar{j}+\bar{k})$$

$\bar{c}=4\bar{i}+5\bar{j}-2\bar{k}=\bar{d}=-\bar{i}+3\bar{j}+5\bar{k}$

$$\bar{c}\times\bar{d}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 4 & 5 & -2\\ 1 & 3 & 5\end{vmatrix}$$

$$=\bar{i}(25+6)-\bar{j}(20+2)+\bar{k}(12-5)$$
$$=31\bar{i}-22\bar{j}+7\bar{k}$$

$\bar{a}\times\bar{b}=8(-\bar{i}-\bar{j}+\bar{k})$

$\bar{c}\times\bar{d}=31\bar{i}-22\bar{j}+7\bar{k}$

$$(\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{c}\times\bar{d})=8\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -1 & -1 & -\\ 31 & -22 & 7\end{vmatrix}$$

$$=8[\bar{i}(-7+22)=\bar{j}(-7-31)+\bar{k}(22+31)]$$
$$\therefore(\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{c}\times\bar{d})=8[15\bar{i}+28\bar{j}+5\overline{3}]$$

ii) $(\bar{a}\times\bar{b}).\bar{c}-(\bar{a}\times\bar{d}).\bar{b}$

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & -1 & 2\\ -1 & 3 & 2\end{vmatrix}$$

$=\bar{i}(-2-6)-\bar{j}(6+2)+\bar{k}(9-1)$

$=-8\bar{i}-8\bar{j}+8\bar{k}=8(-\bar{i}-\bar{j}+\bar{k})$

$\therefore(\bar{a}\times\bar{b}).\bar{c}=8(-\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}).(4\bar{i}+5\bar{j}-2\bar{k})$

$=8[-4-5-2]=-88 \qquad (1)$

$$\bar{a}\times\bar{d}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & -1 & 2\\ 1 & 3 & 5\end{vmatrix}$$

$=\bar{i}(-5-6)-\bar{j}(15-2)+\bar{k}(9+1)$

$=-11\bar{i}=13\bar{j}+10\bar{k}$

$\therefore(\bar{a}\times\bar{d}).\bar{b}=(-11\bar{i}-13\bar{j}+10\bar{k})$

$(-\bar{i}+3\bar{j}+2\bar{k})$

$=11-39+20=-8 \qquad -(2)$

ఇప్పుడు

$(\bar{a}\times\bar{b}).\bar{c}-(\bar{a}\times\bar{d}).\bar{b}=(-88)-(-8) \quad =80$

6. $\left[\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d}\right]+\left[\bar{c}\,\bar{a}\,\bar{d}\right]+\left[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{d}\right]=\left[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right]$ **అయితే** $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d}$ **లు స్థాన సదిశలుగా గల బిందువులు సతలీయాలని చూపండి.**

సాధన. $\left[\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d}\right]+\left[\bar{c}\,\bar{a}\,\bar{d}\right]+\left[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{d}\right]$

$=\left[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right] \qquad (1)$

$'O'$ మూలబిందువు A,B,C,D లు దత్త బిందువులు అనుకొందాం.

$\overline{OA}=\bar{a},\overline{OB}=\bar{b},\overline{OC}=\bar{c},\overline{OD}=\bar{d}$

$\overline{AB}=\bar{b}-\bar{a},\overline{AC}=\bar{c}-\bar{a},\overline{AD}=\bar{d}-\bar{a}$

A,B,C,D లు సతలీయాలు కనుక

$\left[\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}\right]=0$

$\Rightarrow\left[\bar{b}-\bar{a}\;\bar{c}-\bar{a}\;\bar{d}-\bar{a}\right]=0$

$$\Leftrightarrow (\bar{b}-\bar{a}).\left[(\bar{c}-\bar{a})\times(\bar{d}-\bar{a})\right]=0$$
$$\Leftrightarrow (\bar{b}-\bar{a}).\left[(\bar{c}\times\bar{d}-\bar{a}\times\bar{d}-\bar{c}\times\bar{a}+\bar{a}\times\bar{a}\right]=0$$
$$\Leftrightarrow (\bar{b}-\bar{a}).\left[\bar{c}\times\bar{d}-a\times\bar{d}-\bar{c}\times\bar{a}\right]=0$$
$$\Leftrightarrow (\bar{b}-\bar{a}).\left[\bar{c}\times\bar{d}-\bar{a}\times\bar{d}-\bar{c}\times\bar{a}\right]=0$$

$$\Rightarrow \bar{b}.(\bar{c}\times\bar{d})-\bar{b}(\bar{a}\times\bar{d})-\bar{b}(\bar{c}\times\bar{a})=0$$
$$-\bar{a}.(\bar{c}\times\bar{d})+\bar{a}(\bar{a}\times\bar{d})-\bar{a}(\bar{c}\times\bar{a})=0$$
$$\Rightarrow\left[\bar{b}\;\bar{c}\;\bar{d}\right]-\left[\bar{b}\;\bar{a}\;\bar{d}\right]-\left[\bar{b}\;\bar{c}\;\bar{a}\right]-\left[\bar{a}\;\bar{c}\;\bar{d}\right]$$
$$+\left[\bar{a}\;\bar{a}\;\bar{d}\right]-\left[\bar{a}\;\bar{c}\;\bar{a}\right]=0$$
$$\left[\bar{b}\bar{c}\bar{d}\right]+\left[\bar{a}\bar{b}\bar{d}\right]-\left[\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right]+\left[\bar{c}\bar{a}\bar{d}\right]=0$$
$$\Rightarrow\left[\bar{b}\bar{c}\bar{d}\right]+\left[\bar{a}\bar{b}\bar{d}\right]+\left[\bar{c}\bar{a}\bar{d}\right]=\left[\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right]$$

7. $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ లు అతలీయ సదిశలైతే $2\bar{a}+3\bar{b}-\bar{c}$, $\bar{a}-2\bar{b}+3\bar{c}, 3\bar{a}+4\bar{b}-2\bar{c}, \bar{a}-6\bar{b}+6\bar{c}$, లు స్థాన సదిశలుగా గల నాలుగు బిందువులు సతలీయాలని చూపండి.

సాధన. A,B,C,D లు దత్త బిందువులు

$$\overrightarrow{AB}=(\bar{a}-2\bar{b}+3\bar{c})-(2\bar{a}+3\bar{b}-\bar{c})$$
$$=\bar{a}-2\bar{b}+3\bar{c}-2\bar{a}-3\bar{b}+\bar{c}$$
$$=\bar{a}-5\bar{b}+4\bar{c}$$

$$\overrightarrow{AC}=(3\bar{a}+4\bar{b}-2\bar{c})-(2\bar{a}+3\bar{b}-\bar{c})$$
$$=3\bar{a}+4\bar{b}-2\bar{c}-2\bar{a}-3\bar{b}+c=\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}$$
$$\overrightarrow{AD}=(\bar{a}-6\bar{b}+6\bar{c})-(2\bar{a}+3\bar{b}-\bar{c})$$
$$=\bar{a}-6\bar{b}+6\bar{c}-2\bar{a}-3\bar{b}+\bar{c}$$

$$= -\bar{a} - 9\bar{b} + 7\bar{c},$$

$$\left[\left(\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right)\right]$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -5 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -9 & 7 \end{vmatrix} \left[\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right] \qquad -(1)$$

$$= \left[-1(7-9) + 5(7-1) + 4(-9+1)\right]\left[\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right]$$

$$= \left[2 + 30 - 32\right]\left[\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right] = 0$$

$$\therefore \left[\left(\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right)\right] = 0$$

సదిశలు $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}$ లు సతలీయాలు

బిందువులు A, B, C, D లు సతలీయాలు

8. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ లు శూన్యేతర, సరేఖీయాలు కాని సదిశలు, $\theta \neq 0, \bar{b}, \bar{c}$ ల మధ్య కోణం $\theta \left|(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = \frac{1}{3}|\bar{b}||\bar{c}||\bar{a}|\right|$ అయితే , $\sin\theta$ విలువ కనుక్కోండి.

సాధన. $|\bar{a}| \neq 0, |\bar{b}| \neq 0, |\bar{c}| = 0, (\bar{b}, \bar{c}) = \theta$

$$\left|(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = \frac{1}{3}|\bar{b}||\bar{c}||\bar{a}|\right|$$

$$\Rightarrow \left|(\bar{a}, \bar{c})\bar{b} - |\bar{b}.\bar{c}|\bar{a} = \frac{1}{3}|\bar{b}||\bar{c}||\bar{a}|\right|$$

$\therefore \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ లు శూన్యేతర సరేఖీయాలు కాని సదిశలు

$$\Rightarrow \bar{a}, \bar{c} = 0, |\bar{b}.\bar{c}| = \frac{1}{3}|\bar{b}||\bar{c}||\bar{a}|$$

$$\Rightarrow |\bar{b}||\bar{c}|\cos\theta = \frac{1}{3}|\bar{b}||\bar{c}|$$

$$\Rightarrow c\,\mathrm{os}(\theta) = \frac{1}{3}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} \;\therefore 0 < \theta\pi$$

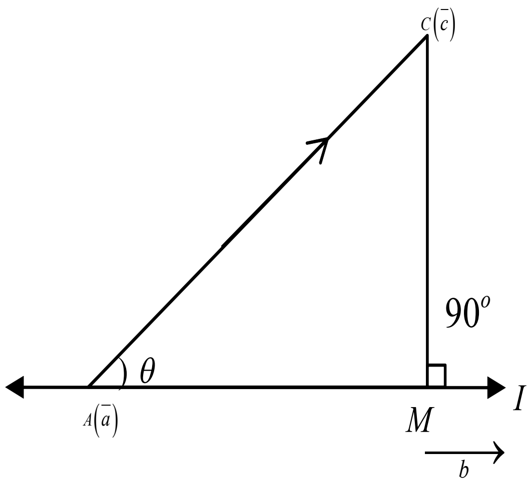
$$= \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

9. $\bar{c}$ **బిందువు నుంచి** $\bar{r}=\bar{a}+t\bar{b}$ **రేఖ మీదకు లంబదూరాన్ని కనుక్కొని** $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ **బిందువులు శీర్షాలుగా గల త్రిభుజ వైశాల్యం**

$\frac{1}{2}\left|\bar{b}\times\bar{c}+\bar{c}\times\bar{a}+\bar{a}\times\bar{b}\right|$ **అవుతుందని చూపండి.**

సాధన. $\bar{r}=\bar{a}+t\,\bar{b}$ సూచించే రేఖను l అనుకొందాం l రేఖ, $A(\bar{a})$ బిందువుగుండాపోతూ $\bar{b}$ సదిశకు సమాంతరంగా ఉంటుంది. పటం నుంచి c స్థాన సదిశగా గల బిందువును C అనుకొందాం. C నుంచి '1' రేఖకు గీసిన లంబపాదం M.



$\therefore M=\bar{a}+t_1\bar{b}, t_1\in\bar{R}.$

$\angle MAC=\theta$ అనుకొందాము

$\therefore CM=\left[(AM)(AC)\sin\theta\right]\div(AM)$

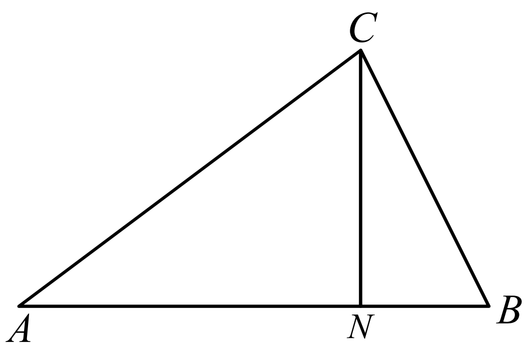
$=\left|\overline{AM}\times\overline{AC}\right|\div(AM)$

$=\left|\left(\bar{a}+t_1\bar{b}-\bar{a}\right)\times\left(\bar{c}-\bar{a}\right)\right|$

$\div\left|\bar{a}+t_1\,\bar{b}-\bar{a}\right|=\dfrac{\left|\bar{b}\times\left(\bar{c}-\bar{a}\right)\right|}{\left|\bar{b}\right|}$

$\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ లు శీర్షాలుగా గల త్రిభుజాన్ని ΔABC అనుకొందాం, ΔABC వైశాల్యాన్ని Δ తో సూచిద్దాం. ఇప్పుడు, AB రేఖను l గా తీసుకొంటే, దాని సమీకరణం

$r=\bar{a}+t\left(\bar{b}-\bar{a}\right), t\in R$



పైన చెప్పినట్లుగా C నుండి AB కు గీసిన లంబదూరం

$$CN = \frac{\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|}{\left|\overline{AB}\right|} = \frac{\left|\left(\bar{b}-\bar{a}\right)\times\left(\bar{c}-\bar{a}\right)\right|}{\left|\bar{b}-\bar{a}\right|}$$

అందువల్ల $\Delta = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\right|(CN)$

$$= \frac{1}{2}\left|\bar{b}-\bar{a}\right| \frac{\left|\left(\bar{b}-\bar{a}\right)\times\left(\bar{c}-\bar{a}\right)\right|}{\left|\bar{b}-\bar{a}\right|}$$

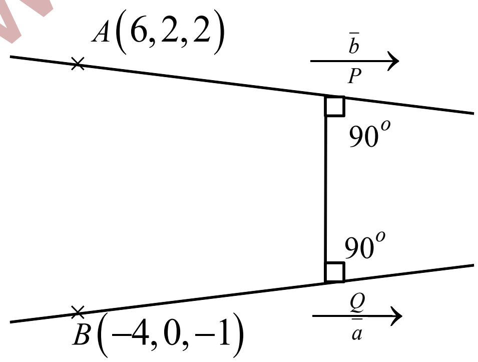
$$= \frac{1}{2}\left|\left(\bar{b}-\bar{a}\right)\times\left(\bar{c}-\bar{a}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\bar{b}\times\bar{c}+\bar{c}\times\bar{a}+\bar{a}\times\bar{b}\right|$$

10. $\bar{r} = \left(6\bar{i}+2\bar{j}+2\bar{k}\right)+t\left(\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k}\right)$

$\bar{r} = \left(-4\bar{i}-\bar{k}\right)+s\left(3\bar{i}-2\bar{j}-2\bar{k}\right)$ **సూచించే అసౌష్ఠవ రేఖల మధ్య కనిష్ఠ దూరాన్ని కనుక్కోండి.**

సాధన.



మొదటి రేఖ, $A(6,2,2)$ బిందువుగుండా పోతూ $\bar{b}=\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k}$ సదిశకు సమాంతరంగా ఉంటుంది. రెండవ రేఖ $C(-4,0,-1)$ బిందువుగుండా పోతూ $\bar{d}=3\bar{i}-2\bar{j}-2\bar{k}$ సదిశకు సమాంతరంగా ఉంటుంది.

కనిష్ఠ దూరం $=\dfrac{\left[\overline{AC}\ \bar{b}\ \bar{d}\right]}{\left|\bar{b}\times\bar{d}\right|}$

$$\left[\overline{AC}\ \bar{b}\ \bar{d}\right]=\begin{vmatrix}-10 & -2 & -3\\ 1 & -2 & 2\\ 3 & -2 & -2\end{vmatrix}=-108$$

$$\bar{b}\times\bar{d}=\begin{vmatrix}-10 & -2 & -3\\ 1 & -2 & 2\\ 3 & -2 & -2\end{vmatrix}$$

$\left|\bar{b}\times\bar{d}\right|=12$

కనిష్ఠ దూరం $=\dfrac{\left[\overline{AC}\ \bar{b}\ \bar{d}\right]}{\left|\bar{b}\times\bar{d}\right|}=\dfrac{108}{12}=9$

11. $\bar{a}=\bar{i}-2\bar{j}-3\bar{k},\bar{b}=2\bar{i}+\bar{j}-\bar{k},\bar{c}=\bar{i}+3\bar{j}-2\bar{k}$ **అయితే,** $\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)=\left(\bar{a}.\bar{c}\right)\bar{b}-\left(\bar{a}.\bar{b}\right)\bar{c}$ **అని సరిచూడండి.**

సాధన. $\bar{b}\times\bar{c}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & -2 & -3\\ 1 & 3 & 5\end{vmatrix}$

$=\bar{i}(-10+9)-\bar{j}(5+3)+\bar{k}(3+2)$

$=-\bar{i}-8\bar{j}+5\bar{k}$

$RHS=\left(\bar{a}.\bar{c}\right)\bar{b}-\left(\bar{a}.\bar{b}\right)\bar{c}$

$=\left[\left(\bar{i}-2\bar{j}-3\bar{k}\right).\left(\bar{i}+3\bar{j}-2\bar{k}\right)\right]$

$\left(2\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}\right)$

$=\left[\left(\bar{i}-2\bar{j}-3\bar{k}\right).\left(2\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}\right)\right]$

$\left(\bar{i}+3\bar{j}-2\bar{k}\right)$

$(1-6+6)\left(2\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}\right)$

$$-(2-2+3)\left(\bar{i}+3\bar{j}-2\bar{k}\right)$$

$= 2\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}-3\bar{i}-9\bar{j}+6\bar{k}$

$= -\bar{i}-8\bar{j}+5\bar{k}$

$LHS = RHS$

12. మూల బిందువు నుంచి $(1,0,5),(1,-5,-1),(-3,5,0)$ బిందువులగుండా పోయే తలానికి గల లంబదూరము కనుక్కోండి.

సాధన.

O అది బిందువు అనుకొనుము $\overline{OA}=\bar{i}+5\bar{k}, \overline{OB}=\bar{i}-5\bar{j}-\bar{k}$

$\overline{OC}=-3\bar{i}+5\bar{j}$

$\overline{OP}=\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$ అయ్యేట్లు $P(x,y,z)$

అనేది తలంలో ఏదేని బిందువనుకొనుము

$\overline{AP}=\overline{OP}-\overline{OA}=\left(x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}\right)-\left(\bar{i}+5\bar{k}\right)$

$\quad = (x-1)\bar{i}+y\bar{j}+(z-5)\bar{k}$

$\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=-5\bar{j}-6\bar{k}$

$\overline{AC}=\overline{OC}-\overline{OA}=-4\bar{i}+5\bar{j}-5\bar{k}$

$\overline{AP}, \overline{AB}, \overline{AC}$ లు సతలీయాలు

$\left[\overline{AP} \quad \overline{AB} \quad \overline{AC}\right]=0$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-5 \\ 0 & -5 & -6 \\ -4 & 5 & -5 \end{vmatrix}=0$$

$\Rightarrow (x-1)(25+30)-y(0-24)+(z-5)(0-20)=0$

$\Rightarrow 55(x-1)+24y-20(z-5)=0$

$\Rightarrow 55x-55+24y-20z+100=0$

$\Rightarrow 55x+24y-20z+45=0$

లంబదూరము $=\dfrac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$$= \frac{45}{\sqrt{(55)^2 + (24)^2 + (-20)^2}}$$

$$= \frac{45}{\sqrt{3025 + 576 + 400}} = \frac{45}{\sqrt{4001}}$$

13. ఒక త్రిభుజ శీర్షాల స్థాన సదిశలు $\bar{a}, \bar{b}$ అయి దాని వైశాల్యం Δ అయితే $4\Delta^2 = |\bar{a}||\bar{b}| - (\bar{a}.\bar{b})^2$ అవుతుందని చూపండి.

సాధన.

OAB త్రిభుజమనుకొనుము

O అది బిందువనుకొనుము

ΔABC వైశాల్యం $= \frac{1}{2}|\overline{OA} \times \overline{OB}|$

$$\Delta = \frac{1}{2}|\bar{a} \times \bar{b}|$$

$$2\Delta = |\bar{a} \times \bar{b}|$$

ఇరువైపులా వర్గము చేయగా,

$$4\Delta^2 = |\bar{a} \times \bar{b}|^2$$

$$= |\bar{a}||\bar{b}|^2 \sin^2(\bar{a}, \bar{b})$$

$$= |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 [1 - \cos^2(\bar{a}, \bar{b})]$$

$$= |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 - |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 \cos^2(\bar{a}, \bar{b})$$

$$= |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 - [|\bar{a}||\bar{b}| \cos(\bar{a}, \bar{b})]^2$$

$$= |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 - (\bar{a}, \bar{b})^2$$

14. చతుర్ముఖి శీర్షాలు $A(1,-1,2), B(1,0,2), C(2,-2,3), D(4,2,1)$ అయితే D బిందువు నుంచి ΔABC తలానికి లంబదూరాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన.

$A(1,-1,2), B(1,0,2), C(2,-2,3)$ లు చతుర్ముఖి శీర్షాలు

O అది బిందువనుకొనుము

$\overline{OA} = \overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$

$\overline{OB} = \overline{i} + 2\overline{k}$

$\overline{OC} = 2\overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k}$

ABC తలంలో $P(x, y, z)$ అనే ఏదేని బిందువుకొనుము.

$\overline{OA} = \overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$

$\overline{AP} = \overline{OP} - \overline{OA}$

$= (x-1)\overline{i} + (y+1)\overline{j} + (z-2)\overline{k}$

$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \overline{j}$

$\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = \overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$

$\overline{AP}, \overline{AB}, \overline{AC}$ లు సతలీయాలు

$= \left[\overline{AP}\ \ \overline{AB}\ \ \overline{AC}\right] = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow 1(x-1-z+2) = 0$

$x - z + 1 = 0$

$D(4,2,1)$ నుండి $x - z + 1 = 0$ తలానికి గల లంబదూరం

$$P = \left|\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|$$

$$= \frac{|4-1+1|}{\sqrt{1+(-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

15. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ **మూడు సదిశలై** $|\bar{b}| = |\bar{c}|$ **అయితే**

$\left[\left(\bar{a}+\bar{b}\right)\times\left(\bar{a}+\bar{c}\right)\right]\times\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right].\left(\bar{b}+\bar{c}\right)=0$ **అవుతుందని చూపండి.**

సాధన. $|\bar{b}| = |\bar{c}|$

$$\left(\bar{a}+\bar{b}\right)\times\left(\bar{a}+\bar{c}\right)=\bar{a}\times\bar{a}+\bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{a}+\bar{b}\times\bar{c}$$

$$\bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{a}+\bar{b}\times\bar{c}$$

$$\left[\left(\bar{a}\times\bar{c}\right)+\left(\bar{b}\times\bar{a}\right)+\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right]$$

$$\left[\left(\bar{a}\times\bar{c}\right)\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)+\left(\bar{b}\times\bar{a}\right)\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right]$$

$$+\left(\bar{b}\times\bar{a}\right)\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)$$

$$=\left(\bar{a}\times\bar{c}\right)\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)+\left(\bar{b}\times\bar{a}\right)\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)+0$$

$$=\left[\left(\bar{a}.\bar{b}\times\bar{c}\right)\bar{c}-\left(\bar{c}.\bar{b}\times\bar{c}\right)\bar{a}\right]+$$

$$=\left[\left(\bar{b}.\bar{c}\times\bar{b}\right)\bar{a}-\left(\bar{b}.\bar{c}\times\bar{a}\right)\bar{b}\right]$$

$$=\left[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}\right]\bar{c}-0+0-\left[\bar{b}\ \bar{c}\ \bar{a}\right]\bar{b}$$

$$=\left[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}\right]\bar{c}-\left[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}\right]\bar{b}$$

$$=\left[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}\right]\left[\bar{c}-\bar{b}\right]$$

$$LHS=\left[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}\right]\left[\bar{c}-\bar{b}\right].\left(\bar{c}+\bar{b}\right)$$

$$\left[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}\right]\left\{\left(\bar{c}-\bar{b}\right).\left(\bar{c}+\bar{b}\right)\right\}$$

$$\left[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}\right]\left[\bar{c}^2-\bar{b}^2\right]$$

$$\left[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}\right]\left[|\bar{c}|^2-|\bar{b}|^2\right]$$

$$\left[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}\right].[0] \qquad |\bar{b}|=|\bar{c}|$$

$$=0$$

$$=RHS$$