

# సదిశల సంకలనం

## అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1.  $\overline{OA} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ ,  $\overline{AB} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$ ,  
 $\overline{BC} = \bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}$ ,  $\overline{CD} = 2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$ , అయితే  $\overline{OD}$  సదిశను కనుక్కోండి.

సాధన.  $\therefore \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{OD}$   
 $\Rightarrow \overline{OD} = (\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}) + (3\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k})$   
 $+ (\bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}) + (2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k})$   
 $\Rightarrow \overline{OD} = 7\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$

2.  $\bar{a} = 2\bar{i} + 5\bar{j} + \bar{k}$ ,  $\bar{b} = 4\bar{i} + m\bar{j} + n\bar{k}$  లు సరేఖీయ సదిశలైతే  $m, n$  లను కనుక్కోండి.

సాధన.  $\bar{a} = 2\bar{i} + 5\bar{j} + \bar{k}$ ,  $\bar{b} = 4\bar{i} + m\bar{j} + n\bar{k}$  లు సరేఖీయ సదిశలు కనుక

$$\Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{5}{m} = \frac{1}{n}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{5}{m} = \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow m = 10, n = 2$$

3.  $\bar{a} = 2\bar{i} + 4\bar{j} - 5\bar{k}$ ,  $\bar{b} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ ,  $\bar{c} = \bar{j} + 2\bar{k}$  అయితే  $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$  సదిశకు అభిముఖ దిశలో యూనిట్ సదిశను కనుక్కోండి

సాధన.:  $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$   
 $= (2\bar{i} + 4\bar{j} - 5\bar{k}) + (\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}) + (\bar{j} + 2\bar{k})$   
 $\Rightarrow \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 3\bar{i} + 6\bar{j} - 2\bar{k}$   
 $|\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}| = |3\bar{i} + 6\bar{j} - 2\bar{k}|$   
 $= \sqrt{(3)^2 + (6)^2 + (-2)^2}$   
 $= \sqrt{9 + 36 + 4} = \sqrt{49} = 7$

$\therefore \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$  సదిశకు వ్యతిరేక దిశలో యూనిట్ సదిశ

$$= -\frac{\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}}{|\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}|}$$
$$= -\frac{(3\bar{i} + 6\bar{j} - 2\bar{k})}{7}$$

4.  $3\bar{i}+6\bar{j}+2\bar{k}$  సదిశ నిరూపక అక్షాలతో ధనాత్మక దిశలో  $\alpha, \beta, \gamma$  కోణాలను చేస్తుంటే,  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  లను కనుక్కోండి

సాధన. నిరూపక అక్షాలతో యూనిట్ సదిశ వరుసగా  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ .

$$\text{Let } \bar{p} = 3\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}$$

$$\text{Given } (\bar{p}, \bar{i}) = \alpha, (\bar{p}, \bar{j}) = \beta \text{ మరియు}$$

$$(\bar{p}, \bar{k}) = \gamma$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{\bar{p} \cdot \bar{i}}{p \cdot i}$$

$$= \frac{(3\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}) \cdot \bar{i}}{3\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{9+36+4(1)}} = \frac{3}{7}$$

$$\text{అదేవిధంగా } \cos \beta = \frac{\bar{p} \cdot \bar{j}}{p \cdot j}$$

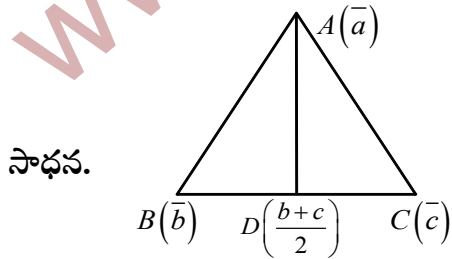
$$= \frac{(3\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}) \cdot \bar{j}}{|3\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}| |\bar{j}|} = \frac{-6}{7} = -\frac{6}{7}$$

$$\cos \gamma = \frac{\bar{p} \cdot \bar{k}}{p \cdot k}$$

$$= \frac{(3\bar{k} - 6\bar{j} + 2\bar{k}) \cdot \bar{k}}{3\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k} \cdot \bar{k}} = \frac{2}{7}$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{3}{7}, \cos \beta = -\frac{6}{7} \text{ మరియు } \cos \gamma = \frac{2}{7}$$

5.  $A, B, C$  బిందువులు ఒక త్రిభుజ శీర్షాలు, వాటి స్థాన సదిశలు క్రమంగా  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  అయితే  $A$  గుండాపోయే మధ్యగతరేఖ సదిశా సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.



సాధన.

$$\overline{OA} = \bar{a}, \overline{OB} = \bar{b}, \overline{OC} = \bar{c} \text{ అనుకొనుము.}$$

$$\text{సదిశా సమీకరణం} = (1-t)\bar{a} + t\bar{b} = \bar{r}$$

$$\bar{r} = (1-t)\bar{a} + t\left(\frac{\bar{b} + \bar{c}}{2}\right)$$

6.  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$  బిందువుల స్థాన సదిశలు పరుసగా

$\bar{a} + 2\bar{b}, 2\bar{a} - \bar{b}, \bar{a}, 3\bar{a} + \bar{b}$  అయితే  $\overline{AC}, \overline{DA}, \overline{BA}, \overline{BC}$  సదిశలను,  $\bar{a}, \bar{b}$  లలో రాయండి.

సాధన.  $\bar{O}$  ను మూలబిందువు అనుకొనుము  $\overline{OA} = \bar{a} + 2\bar{b}, \overline{OB} = 2\bar{a} - \bar{b}, \overline{OC} = \bar{a}$  మరియు

$$\overline{OD} = 3\bar{a} + \bar{b}$$

$$\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = \bar{a} - (\bar{a} + 2\bar{b}) = -2\bar{b}$$

$$\overline{DA} = (\bar{a} + 2\bar{b}) - (3\bar{a} + \bar{b}) = -2\bar{a} + \bar{b}$$

$$\overline{BA} = (\bar{a} + 2\bar{b}) - (2\bar{a} - \bar{b}) = 3\bar{b} - \bar{a}$$

$$\overline{BC} = \bar{a} - (2\bar{a} - \bar{b}) = \bar{b} - \bar{a}$$

7.  $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}, \bar{b} = 3\bar{i} + \bar{j}, \bar{a} + \bar{b}$  దిశలో యూనిట్ సదిశను కనుక్కోండి.

సాధన.  $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}; \bar{b} = 3\bar{i} + \bar{j}$

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k} + 3\bar{i} + \bar{j}$$

$$= 4\bar{i} + 3\bar{j} + 3\bar{k}$$

$$\bar{a} + \bar{b} \text{ దిశలో యూనిట్ సదిశ} = \pm \frac{\bar{a} + \bar{b}}{|\bar{a} + \bar{b}|}$$

$$= \pm \frac{4\bar{i} + 3\bar{j} + 3\bar{k}}{|4\bar{i} + 3\bar{j} + 3\bar{k}|}$$

$$= \pm \frac{4\bar{i} + 3\bar{j} + 3\bar{k}}{|16 + 9 + 9|}$$

$$= \pm \frac{4\bar{i} + 3\bar{j} + 3\bar{k}}{\sqrt{34}}$$

8. సదిశలు  $-3\bar{i} + 4\bar{j} + \lambda\bar{k}, \mu\bar{i} + 8\bar{j} + 6\bar{k}$  సరేఖీయాలైతే  $\lambda, \mu$  కనుక్కోండి.

సాధన.  $\bar{a} = -3\bar{i} + 4\bar{j} + \lambda\bar{k}, \bar{b} = \mu\bar{i} + 8\bar{j} + 6\bar{k}$  అనుకోండి. దత్తాంశం నుండి  $\bar{a}, \bar{b}$  లు సరేఖీయాలు కావున

$$\bar{a} = t\bar{b}$$

$$\Rightarrow -3\bar{i} + 4\bar{j} + \lambda\bar{k} = t(\mu\bar{i} + 8\bar{j} + 6\bar{k})$$

$$-3\bar{i} + 4\bar{j} + \lambda\bar{k} = \mu t\bar{i} + 8t\bar{j} + 6t\bar{k}$$

ఇరువైపులా  $i, j, k$  గుణకాలను పోల్చగా

$$\mu t = -3 \Rightarrow \mu = -\frac{3}{t} = -\frac{3}{-\frac{1}{2}} = -6 \Rightarrow \boxed{\mu = -6}$$

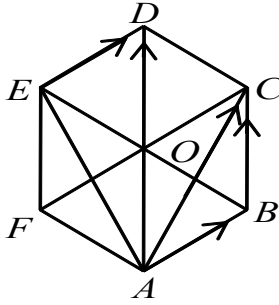
$$8t = 4 \Rightarrow t = \frac{4}{8} \Rightarrow \boxed{t = \frac{1}{2}}$$

$$6t = \lambda \Rightarrow 6 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\lambda = 3}$$

9.  $ABCDEF$  క్రమషడ్భుజికేంద్రం  $O$  అయితే

$\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} + \overline{AE} + \overline{AF} = 3\overline{AD} = 6\overline{AO}$  అని చూపండి.

సాధన.



పటము నుండి,  $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} + \overline{AE} + \overline{AF}$

$$= (\overline{AB} + \overline{AE}) + \overline{AD} + (\overline{AC} + \overline{AF})$$

$$= (\overline{AE} + \overline{ED}) + \overline{AD} + (\overline{AC} + \overline{CD})$$

$$(\overline{AB} = \overline{ED}, \overline{AF} = \overline{CD})$$

$$= \overline{AD} + \overline{AD} + \overline{AD} = 3\overline{AD}$$

$$= 6\overline{AO} \quad (O \text{ కేంద్రం మరియు } \overline{OD} = \overline{AO})$$

10.  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  ధన నిరూపకాక్షాల వెంబడి యూనిట్ సదిశలైతే,  $4\bar{i}+5\bar{j}+\bar{k}$ ,  $-\bar{j}-\bar{k}$ ,  $3\bar{i}+9\bar{j}+4\bar{k}$   
 $-4\bar{i}+4\bar{j}+4\bar{k}$  అనే నాలుగు బిందువుల సతలీయాలని చూపండి.

సాధన.

$$\begin{bmatrix} \overline{AB} & \overline{AC} & \overline{AD} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -6 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ -8 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -4(12+3) + 6(-3+24) - 2(1+32)$$

$$= -60 + 126 - 66 = 0$$

సదిశలు  $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$  లు సతలీయాలు

$\Rightarrow$  బిందువులు  $A, B, C, D$  లు సతలీయాలు

11. సదిశ  $a = i - 2j$  దిశలో 7 యూనిట్ల పరిమాణం గలిగిన ఒక సదిశను కనుక్కోండి.

సాధన. సదిశ  $a$  దిశలో యూనిట్ సదిశ

$$\hat{a} = \frac{1}{a} a = \frac{1}{\sqrt{5}} (i - 2j) = \frac{1}{\sqrt{5}} i - \frac{2}{\sqrt{5}} j$$

కాబట్టి  $a$  దిశలో కి సమానమయ్యే పరిమాణం గలిగిన సదిశ

$$7a = 7 \left( \frac{1}{\sqrt{5}} i - \frac{2}{\sqrt{5}} j \right) = \frac{7}{\sqrt{5}} i - \frac{14}{\sqrt{5}} j$$

12.  $a = 2i + 2j - 5k$ ,  $b = 2i + j + 3k$  సదిశల సంకలన దిశలోని యూనిట్ సదిశకు కనుక్కోండి.

సాధన. దత్త సదిశల మొత్తం  $a + b (= c$  అనుకొంటే)

$$= 4i + 3j - 2k$$

$$|c| = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$$

$$\therefore \hat{c} = \frac{4\bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{k}}{\sqrt{29}}$$

13. సదిశ  $a=i+j-2k$  యొక్క దిక్ నిష్పత్తులను రాసి, తద్వారా దిక్ కొసైన్లను గణన చేయండి.  
సాధన. సదిశ  $r=xi+yj+zk$  యొక్క దిక్ నిష్పత్తులు  $a,b,c$  వరసగా ఆసదిశ అంశలు  $x,y,z$  లు అవుతాయని గమనించండి.

$$\text{కాబట్టి, దత్త సదిశకి } a=1, b=1, c=-2$$

అంతేకాక దత్త సదిశకు  $l,m,n$  దిక్ కొసైన్లు అయితే,

$$|r|=\sqrt{6} \text{ అయితే } l=\frac{a}{|r|}=\frac{1}{\sqrt{6}}, m=\frac{b}{|r|}=\frac{1}{\sqrt{6}},$$

$$n=\frac{c}{r}=\frac{-2}{\sqrt{6}}$$

$$\therefore a \text{ దిక్ కొసైన్లు } \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right)$$

14. స్థాన సదిశలను  $OP=3a-2b$ ,  $OQ=a+b$  గా గలిగిన రెండు బిందువులు  $P,Q$  లను తీసుకోండి.  $P,Q$  లను కలిపే సరళరేఖను 2:1 నిష్పత్తిలో (i) అంతరంగాను (ii) బాహ్యంగాను విభజించే బిందువు  $R$  స్థాన సదిశను కనుక్కోండి.

సాధన. i)  $P,Q$ లను కలిపే సరళరేఖను 2:1 నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజించే బిందువు  $R$  స్థాన సదిశ

$$OR=\frac{2(a+b)+(3a-2b)}{2+1}=\frac{5a}{3}$$

ii)  $P,Q$  లను కలిపే సరళరేఖను 2:1 నిష్పత్తిలో బాహ్యంగా విభజించే బిందువు  $R$  స్థాన సదిశ

$$OR=\frac{2(a+b)-(3a-2b)}{2-1}=4b-a$$

15.  $A(2i-j+k)$ ,  $B(i-3j-5k)$ ,  $C(3i-4j-4k)$  బిందువుల ఒక లంబకోణ త్రిభుజం శీర్షాలని చూపండి.

సాధన.  $AB=(1-2)i+(-3+1)j+(-5-1)k$

$$=-i-2j-6k$$

$$BC=(3-1)i+(-4+3)j+(-4+5)k$$

$$=2i-j+k$$

$$CA=(2-3)i+(-1+4)j+(1+4)k$$

$$=-i+3j+5k$$

$$\text{దీనితో } |AB|=|BC|^2+|CA|^2$$

16.  $A, B, C, D$  బిందువుల స్థాన సదిశలు వరుసగా  $\bar{a} + 2\bar{b}$ ,  $2\bar{a} - \bar{b}$ ,  $\bar{a}, 3\bar{a} + \bar{b}$   $\overline{AC}$ ,  $\overline{DA}, \overline{BA}, \overline{BC}$  సదిశలను  $\bar{a}, \bar{b}$  లలో రాయండి.

సాధన.  $A, B, C, D$  బిందువుల స్థాన సదిశలు  $O$  దృష్ట్యా

$$\overline{OA} = 2\bar{a} + \bar{b} \quad \overline{OB} = 2\bar{a} - \bar{b}$$

$$\overline{OC} = \bar{a} \quad \overline{OD} = 3\bar{a} + \bar{b}$$

$$\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = \bar{a} - (2\bar{a} + \bar{b}) = -\bar{a} - \bar{b}$$

$$\overline{DA} = \overline{OA} - \overline{OD} = (2\bar{a} + \bar{b}) - (3\bar{a} + \bar{b})$$

$$= -\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} - \bar{a}$$

$$\overline{BA} = \overline{OA} - \overline{OB} = (2\bar{a} + \bar{b}) - (2\bar{a} - \bar{b})$$

$$= 2\bar{b}$$

$$\overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB} = \bar{a} - (2\bar{a} - \bar{b}) = \bar{b} - \bar{a}$$

16.  $2\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}$  బిందువు గుండా పోతూ,  $4\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}$  సదిశకు సమాంతరంగా ఉండే రేఖ సదిశా సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన.  $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}$ ,  $\bar{b} = 4\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}$  లు అనుకుందా.

$\therefore \bar{a}$  బిందువు గుండా పోతూ,  $\bar{b}$  సదిశకు సమాంతరంగా ఉండే రేఖా సదిశా సమీకరణం

$$\bar{r} = \bar{a} + t(\bar{b}), t \in R$$

$$(i.e.,) \bar{r} = (2\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}) + t(4\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k})$$

$$(i.e.,) \bar{r} = (2 + 4t)\bar{i} + (3 - 2t)\bar{j} + (1 + 3t)\bar{k}$$

17.  $OABC$  సమాంతర చతుర్భుజంలో,  $\overline{OA} = \bar{a}, \overline{OC} = \bar{c}$  అయితే  $BC$  రేఖ సదిశా సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన.  $OABC$  సమాంతర చతుర్భుజం

$$\overline{OA} = \bar{a}, \overline{OC} = \bar{c} = \overline{AB}$$

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} = \bar{a} + \bar{c}$$

$BC$  రేఖ సదిశా సమీకరణం

$$\bar{r} = (1-t)\bar{c} + t(\bar{a} + \bar{c})$$

$$= (1-t+t)\bar{c} + t\bar{a} = \bar{c} + t\bar{a}, t \in R$$

18.  $2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$ ,  $-4\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$  బిందువులను కలిపే రేఖ సదిశా సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన.  $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$ ,  $\bar{b} = -4\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$

$\bar{a}, \bar{b}$  బిందువులను కలిపే రేఖ సదిశా సమీకరణం

$$\bar{r} = (1-t)\bar{a} + t\bar{b}, t \in R$$

$$\Rightarrow \bar{r} = (1-t)(2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}) + t(-4\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k})$$

$$(i.e.,) \bar{r} = (2 - 2t - 4t)\bar{i} + (1 - t + 3t)\bar{j}$$

$$+(3-3t-t)\bar{k}$$

$$(i.e.,)\bar{r} = 2(1-3t)\bar{i} + (1+2t)\bar{j}$$

$$+(3-4t)\bar{k}, t \in R$$

19.  $\bar{i}-2\bar{j}+5\bar{k}$ ,  $-5\bar{j}-\bar{k}$ ,  $-3\bar{i}+5\bar{k}$  బిందువుల గుండా పోయే తలం సదిశా సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన.  $\bar{a}=\bar{i}-2\bar{j}+5\bar{k}$ ,  $\bar{b}=-5\bar{j}-\bar{k}$ ,  $\bar{c}=-3\bar{i}+5\bar{j}$  అనుకుందా.

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  బిందువుల గుండా పోయే తలం సదిశా సమీకరణం

$$\bar{r} = (1-s-t)\bar{a} + s\bar{b} + t\bar{c}; s, t \in R$$

$$(i.e.,)\bar{r} = (1-s-t)(\bar{i}-2\bar{j}+5\bar{k}) + s(-5\bar{j}-\bar{k})$$

$$+t(-3\bar{i}+5\bar{j})$$

$$(i.e.,)r = (1-s-t)(\bar{i}-2\bar{j}+5\bar{k}) - s(5\bar{j}+\bar{k})$$

$$-t(3\bar{i}-5\bar{j}); s, t \in R$$

20.  $\overline{OA} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ ,  $\overline{AB} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$ ,  $\overline{BC} = \bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}$ ,

$\overline{CD} = 2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$  అయితే  $\overline{OD}$  ను కనుక్కోండి.

సాధన.  $\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$

$$= \bar{i} + \bar{j} + \bar{k} + 3\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k} + \bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k} + 2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$$

$$\overline{OD} = 7\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$$



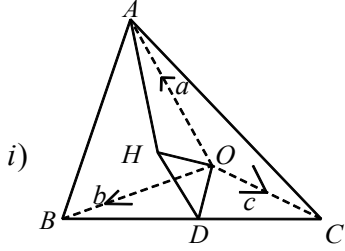
## స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1.  $\Delta ABC$  లో,  $O$  పరివృత్తకేంద్రం,  $H$  లంబకేంద్రం అయితే

i)  $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OH}$

ii)  $\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} = 2\overline{HO}$  అని చూపండి.

సాధన.  $BC$  మధ్య బిందువు  $D$  అనుకొందాం.



పరివృత్త కేంద్రం  $O$  ను మూలబిందువు అనుకొందాం.

i)  $\overline{OA} = \overline{a}; \overline{OB} = \overline{b}, \overline{OC} = \overline{c}$  అనుకొందాం

(పటం ద్వారా)

$$\overline{OD} = \frac{\overline{b} + \overline{c}}{2}$$

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OA} + 2\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AH} = \overline{OH}$$

(ఇక్కడ గమనించదగిన విషయం ఏమిటంటే

$$\overline{AH} = 2R \cos A, \overline{OD} = R \cos A, R \text{ అనేది } \Delta ABC \text{ యొక్క పరివ్యాసార్థం కాబట్టి } \overline{AH} = 2\overline{OD})$$

ii)  $\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} = \overline{HA} + 2\overline{HD} = \overline{HA} + 2(\overline{HO} + \overline{OD})$

$$= \overline{HA} + 2\overline{HO} + 2\overline{OD} = \overline{HA} + 2\overline{HO} + \overline{AH} = 2\overline{HO}$$

(గమనిక. పై లెక్కలో పరికేంద్రం మూలబిందువుగా లంబకేంద్రం స్థాన సదిశ, త్రిభుజ, శీర్షాల స్థాన సదిశల మొత్తానికి సమానమైంది)

2.  $\Delta ABC$  త్రిభుజంలో  $A, B, C$  స్థాన సదిశలు వరుసగా  $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$  అయితే, దాని కేంద్రభాసం

(centroid) స్థాన సదిశ  $\frac{1}{3}(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c})$  అని చూపండి.

సాధన.  $\Delta ABC$  లో  $G$  కేంద్రభాసం శీర్షం  $A$  గుండా గీచిన మధ్యగత రేఖ  $AD$ . అప్పుడు

$$AG : GD = 2 : 1 \text{ 'O' మూలబిందువు}$$

$$\overline{OA} = \overline{a}, \overline{OB} = \overline{b}, \overline{OC} = \overline{c}$$

$\therefore D, BC$ కి మధ్యబిందువు  $D$  స్థాన సదిశ

$$\overline{OD} = \frac{1}{2}(\overline{b} + \overline{c})$$

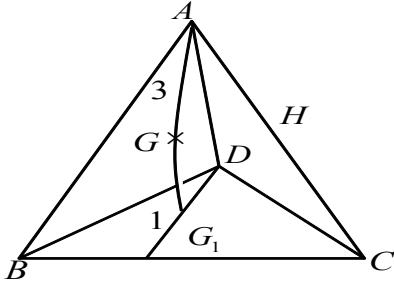
$G, AD$  ను 2:1 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది

$\therefore G$  స్థాన సదిశ

$$\overline{OG} = \frac{2\left(\frac{\overline{b} + \overline{c}}{2}\right) + 1(\overline{a})}{2+1} = \frac{\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}}{3}$$

3. ఒక చతుర్ముఖి శీర్షాలు  $A, B, C, D$  వీటి స్థాన సదిశలు క్రమంగా  $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$  అయితే ఆ శీర్షాలను ఎదుటి ముఖాల కేంద్రభాసాలకు కలిపే రేఖలు అనుషక్తాలవుతాయని చూపండి. (ఈ బిందువును చతుర్ముఖి కేంద్రభాసం లేదా కేంద్రం అంటారు)

సాధన.



$ABCD$  ఒక చతుర్ముఖి.  $O$  మూలబిందువు అనుకోండి.  $A, B, C, D$  ల స్థాన సదిశలు వరసగా  $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ .  $\triangle ABC, \triangle CAD, \triangle ABD, \triangle ABC$  ల కేంద్రభాసాలు వరసగా

$G_1, G_2, G_3, G_4$  లు అనుకొందాం (పటం ద్వారా)

$$\overline{OG}_1 = \frac{\overline{b} + \overline{c} + \overline{d}}{3}$$

$\overline{AG}_1$  ను 3:1 నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువు  $P$  అనుకొందాం.

$$\overline{OP} = \frac{3(\overline{b} + \overline{c} + \overline{d}) + 1\overline{a}}{4}$$

$$\overline{OP} = \frac{1}{4}(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \overline{d})$$

ఇదేవిధంగా  $\overline{BG}_2, \overline{CG}_3, \overline{DG}_4$  లను 3:1 నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువుల స్థానసదిశలు

$\frac{1}{4}(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \overline{d})$  అవుతాయని చూడవచ్చు.

కాబట్టి  $P$  బిందువు  $\overline{AG}_1, \overline{BG}_2, \overline{CG}_3, \overline{DG}_4$  లలో ప్రతిదానిపై ఉంటుంది.

4.  $3\bar{i} - 2\bar{j} - \bar{k}, 2\bar{i} + 3\bar{j} - 4\bar{k}, -\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$

$4\bar{i} + 5\bar{j} + \lambda\bar{k}$  సదిశలను స్థాన సదిశలుగా గల బిందువులు సతలీయాలైతే  $\lambda$  విలువ  $\frac{-146}{7}$  అని చూపండి.

సాధన. ఇచ్చిన బిందువులను వరుసగా

$A, B, C, D$  అనుకొందాం

$$\overline{AB} = -\bar{i} + 5\bar{j} - 3\bar{k}, \overline{AC} = -4\bar{i} + 3\bar{j} + 3\bar{k}$$

$$\overline{AD} = \bar{i} + 7\bar{j} + (\lambda + 1)\bar{k}$$

$A, B, C, D$  సతలీయ బిందువులు కాబట్టి

$$\overline{AD} = x\overline{AB} + y\overline{AC} \text{ అనుకోవచ్చు.}$$

$$\bar{i} + 7\bar{j} + (\lambda + 1)\bar{k}$$

$$= x(-\bar{i} + 5\bar{j} - 3\bar{k}) + y(-4\bar{i} + 3\bar{j} + 3\bar{k})$$

రెండు వైపులా  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  ల గుణకాలు సమానం. కాబట్టి

$$-x - 4y = 1, 5x + 3y = 7, -3x + 3y = \lambda + 1$$

మొదటి రెండు సమీకరణాల సాధనం మూడో సమీకరణాన్ని తృప్తిపరుస్తుంది.

మొదటి రెండు సమీకరణాలను సాదిస్తే,

$$x = \frac{31}{17}, y = -\frac{12}{17}$$

ఈ విలువలను మూడో సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపిస్తే

$$\lambda = -3x + 3y - 1 = -\frac{146}{17}$$

5.  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  అతలీయ సదిశలైతే  $3\bar{a} - 2\bar{b} - 4\bar{c}, -\bar{a} + 2\bar{c}, -2\bar{a} + \bar{b} + 3\bar{c}$  సదిశలు అస్వతంత్ర సదిశలని చూపండి.

సాధన.  $\alpha = 3\bar{a} - 2\bar{b} - 4\bar{c}, \beta = -\bar{a} + 2\bar{c}, \gamma = -2\bar{a} + \bar{b} + 3\bar{c}$  అనుకొందాం. 3.6.7 ప్రకారం  $\alpha, \beta, \gamma$  లలో ఒకటి మిగిలిన రెండింటి రుజు సంయోగం అయితే అవి అస్వతంత్ర సదిశలవుతాయని తెలుసు.

$$\gamma = x\alpha + y\beta \text{ అనుకొంటే}$$

$$-2\bar{a} + \bar{b} + 3\bar{c} = x(3\bar{a} - 2\bar{b} - 4\bar{c}) + y(-\bar{a} + 2\bar{c})$$

$$3x - y = -2, -2x = 1, -4x + 2y = 3$$

$$x = \frac{-1}{2}, y = \frac{1}{2}$$

$\alpha, \beta, \gamma$  లు అస్వతంత్ర సదిశలు

6. ద్విపరిమాణ నిరూపక తలంలో సదిశా పద్ధతులనుపయోగించి, నిరూపకాక్షాల మీద 'a','b'

అంతర ఖండాలు చేసే రేఖ సమీకరణం  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  అవుతుందని రుజువు చూపండి.

సాధన.: OXYZ ద్విపరిమాణ నిరూపక తలం

$\bar{i}, \bar{j}$  లు వరుసగా ధన  $x, y$  అక్షాల మీద యూనిట్ సదిశలు.

$$\bar{a} = a\bar{i}, \quad \bar{b} = b\bar{j}$$

O మూలబిందువు  $\overline{OA} = \bar{a}$ ,  $\overline{OB} = \bar{b}$  అయ్యేటట్లు A, B లు తలం మీద రెండు బిందువులు

$\overline{AB}$  రేఖా సదిశా సమీకరణం

$$\bar{r} = (1-t)\bar{a} + t\bar{b}$$

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} \text{ అయితే,}$$

$$\text{అప్పుడు } x = (1-t)a, \quad y = tb$$

$$'t' \text{ ను తొలగింపని } x = \left(1 - \frac{y}{b}\right)a$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} = 1 - \frac{y}{b}$$

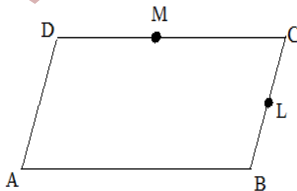
$$\Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

7. ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో BC, CD ల మధ్య బిందువులు వరుసగా L, M అయితే

i)  $\overline{AL}, \overline{AM}$  లను  $\overline{AB}, \overline{AD}$  లలో కనుక్కోండి

ii)  $\overline{AM} = \lambda \overline{AD} - \overline{LM}$  అయితే  $\lambda$  విలువ కనుక్కోండి.

సాధన.:



ABCD సమాంతర చతుర్భుజం

$$\Rightarrow \overline{AB} = \overline{DC}, \overline{BC} = \overline{AD}$$

BC మధ్య బిందువు L కనుక

$$\overline{BL} = \frac{1}{2}(\overline{BC}) = \frac{1}{2}(\overline{AD})$$

$AD$  మధ్యబిందువు  $M$  కనుక

$$\overline{DM} = \frac{1}{2}(\overline{DC}) = \frac{1}{2}(\overline{AB})$$

$$(i) \overline{AL} = \overline{AB} + \overline{BL} = \overline{AB} + \frac{1}{2}(\overline{AD})$$

$$\overline{AM} = \overline{AD} + \overline{DM} = \overline{AD} + \frac{1}{2}(\overline{AB})$$

ii) దత్తాంశం నుండి

$$\overline{AM} = \lambda \overline{AD} - \overline{LM} \rightarrow (1)$$

$A$  మూలబిందువు అనుకొందాం

$\overline{AB} = \bar{b}$ , మరియు  $\overline{AD} = \bar{d}$  అనుకొండి

$$\begin{aligned} \therefore \overline{AC} &= \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{AD} \\ &= \bar{b} + \bar{d} \end{aligned}$$

$\therefore BC$  మధ్యబిందువుల  $L$  కనుక

$$\overline{AL} = \frac{1}{2}(\bar{b} + \bar{b} + \bar{d}) = \frac{1}{2}(2\bar{b} + \bar{d})$$

$CD$  మధ్య బిందువు  $M$  కనుక

$$(1) \text{ నుండి, } \overline{AM} = \lambda(\overline{AD}) - \overline{LM}$$

$$\Rightarrow \overline{AM} + \overline{LM} = \lambda(\overline{AD})$$

$$\Rightarrow (\overline{AM}) + (\overline{AM} - \overline{AL}) = \lambda(\overline{AD})$$

$$\Rightarrow 2\overline{AM} - \overline{AL} = \lambda(\overline{AD})$$

$$\Rightarrow 2 \left[ \frac{1}{2}(\bar{b} + 2\bar{d}) \right] - \left[ \frac{1}{2}(2\bar{b} + \bar{d}) \right] = \lambda(\bar{d})$$

$$\Rightarrow \bar{b} + 2\bar{d} - \bar{b} - \frac{\bar{d}}{2} = \lambda\bar{d}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\bar{d} = \lambda\bar{d}$$

$$\therefore \lambda = \frac{3}{2}$$

8.  $OABC$  సమాంతర చతుర్భుజంలో  $OA$  మధ్య బిందువు  $D$  అయితే,  $CD$  రేఖాఖండం కర్ణం  $OB$  పరస్పరం త్రిభాకరించుకొంటాయని చూపండి.

సాధన.  $\overline{OA} = \bar{a}$ ,  $\overline{OC} = \bar{b}$  అనుకుందాం

$$\overline{OB} = \bar{a} + \bar{b}, \quad \overline{OD} = \frac{1}{2}(\bar{a}) \text{ అవుతాయి}$$

$OB, CD$  లు  $M$  వద్ద ఖండించుకున్నాయనుకుందాం

$OM : MB = k : 1, CM : MD = l : 1$  అనుకుందాం

$$\therefore \overline{OM} = \frac{k(\bar{a} + \bar{b})}{k+1}$$

$$\overline{OM} = \frac{l\left(\frac{\bar{a}}{2}\right) + 1(\bar{b})}{l+1} = \frac{l\bar{a} + 2\bar{b}}{2(l+1)}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\left(\frac{l}{l+1}\right) = \frac{k}{k+1} = \frac{1}{l+1}$$

$$\therefore l = 2, k = \frac{1}{2}$$

కాబట్టి  $CD, OB$  ని  $OB, CD$  ని త్రిభాకరించుకుంటాయి.

9.  $\bar{a}, \bar{b}$  లు సరేఖీయాలు కాని సదిశలు.  $3\bar{\alpha} = 2\bar{\beta}$  అయ్యేటట్లు

$$\bar{\alpha} = (x+4y)\bar{a} + (2x+y+1)\bar{b}, \text{ ఉంటే}$$

$$\bar{\beta} = (y-2x+2)\bar{a} + (2x-3y-1)\bar{b} \quad x, y \text{ లను కనుక్కోండి.}$$

సాధన.  $3\bar{\alpha} = 2\bar{\beta}$

$$\Rightarrow 3(x+4y)\bar{a} + 3(2x+y+1)\bar{b}$$

$$= 2(y-2x+2)\bar{a} + 2(2x-3y-1)\bar{b}$$

$\bar{a}, \bar{b}$  గుణకాలను సమానం చేస్తే

$$3x+12y = 2y-4x+4 \Rightarrow 7x+10y = 4 \rightarrow (1)$$

$$6x+3y+3 = 4x-6y-2$$

$$\Rightarrow 2x+9y = -5 \rightarrow (2)$$

(1), (2) ల నుండి.

$$x = 2, y = -1$$

10.  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  ధన నిరూపకాక్షాల వెంబడి యూనిట్ సదిశలైతే,  $4\bar{i}+5\bar{j}+\bar{k}$ ,  $-\bar{j}-\bar{k}$ ,  $3\bar{i}+9\bar{j}+4\bar{k}$   
 $-4\bar{i}+4\bar{j}+4\bar{k}$  అనే నాలుగు బిందువుల సతలీయాలని చూపండి

సాధన. 'O' మూలబిందువు  $A, B, C, D$  లు దత్త బిందువులు

$$\overline{OA} = 4\bar{i} + 5\bar{j} + \bar{k}$$

$$\overline{OB} = -\bar{j} - \bar{k}$$

$$\overline{OC} = 3\bar{i} + 9\bar{j} + 4\bar{k}$$

$$\overline{OD} = -4\bar{i} + 4\bar{j} + 4\bar{k}$$

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$$

$$= -(\bar{j} - \bar{k}) - (4\bar{i} + 5\bar{j} + \bar{k})$$

$$= -4\bar{i} - 6\bar{j} - 2\bar{k}$$

$$\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA}$$

$$= (3\bar{i} + 9\bar{j} + 4\bar{k}) - (4\bar{i} + 5\bar{j} + \bar{k})$$

$$= -\bar{i} + 4\bar{j} + 3\bar{k}$$

$$\overline{AD} = \overline{OD} - \overline{OA}$$

$$= (-4\bar{i} + 4\bar{j} + 4\bar{k}) - (4\bar{i} + 5\bar{j} + \bar{k})$$

$$= -8\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$$

$$\overline{AB} = x(\overline{AC}) + y(\overline{AD}) \text{ అనుకొండి}$$

( $x, y$  అదిశలు)

$$\Rightarrow -4\bar{i} - 6\bar{j} - 2\bar{k} = x(-\bar{i} + 4\bar{j} + 3\bar{k})$$

$$+ y(-8\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k})$$

$$\Rightarrow (x + 8y - 4)\bar{i} + (-4x + y - 6)\bar{j}$$

$$+ (-3x - 3y - 2)\bar{k} = 0$$

$\therefore \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  లు అతలీయ సదిశకు కనుక

$$\text{కనుక } x + 8y - 4 = 0 \rightarrow (1)$$

$$-4x + y - 6 = 0 \rightarrow (2)$$

$$3x + 3y + 2 = 0 \rightarrow (3)$$

(1), (3) లను సాధించగా

$$x + 8y - 4 = 0$$

$$3x + 3y + 2 = 0$$

$$\frac{x}{16+12} = \frac{y}{-12-12} = \frac{1}{3-24}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{28} = \frac{y}{-14} = \frac{1}{-21}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{4}{3} \text{ మరియు } y = \frac{2}{3}$$

$x, y$  విలువలు (2) లో వ్రాస్తే

$$\begin{aligned} -4\left(-\frac{4}{3}\right) + \frac{2}{3} - 6 &= \frac{16}{3} + \frac{2}{3} - 6 \\ &= 6 - 6 = 0 \end{aligned}$$

సదిశలు  $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$  లు సతలీయాలు

$\Rightarrow$  బిందువులు  $A, B, C, D$  లు సతలీయాలు

11.  $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$  లు అతలీయ సదిశలైతే,

i)  $-2\overline{a} + 3\overline{b} + 5\overline{c}, \overline{a} + 2\overline{b} + 3\overline{c}, 7\overline{a} - \overline{c}$

ii)  $3\overline{a} - 4\overline{b} + 3\overline{c}, -4\overline{a} + 5\overline{b} - 6\overline{c}, 4\overline{a} - 7\overline{b} + 6\overline{c}$

iii).  $2\overline{a} + 5\overline{b} - 4\overline{c}, \overline{a} + 4\overline{b} - 3\overline{c}, 4\overline{a} + 7\overline{b} - 6\overline{c}$  లను స్థాన సదిశలుగా గల బిందువుల సరేఖీయాలని చూపండి.

సాధన.  $O$  మూల బిందువు,  $P, Q, R$  లు దత్త బిందువులు అనుకుందా.

$$\overline{OP} = -2\overline{a} + 3\overline{b} + 5\overline{c}$$

$$\overline{OQ} = \overline{a} + 2\overline{b} + 3\overline{c}$$

$$\overline{OR} = 7\overline{a} - \overline{c}$$

$$\overline{PQ} = \overline{OR} - \overline{OQ}$$

$$= (7\overline{a} - \overline{c}) - (\overline{a} + 2\overline{b} + 3\overline{c})$$

$$= 6\overline{a} - 2\overline{b} - 4\overline{c}$$

$$= 2(3\overline{a} - \overline{b} - 2\overline{c})$$

$$= 2(\overline{PQ})$$

$$\therefore \overline{QR} = 2(\overline{PQ})$$

$\Rightarrow P, Q, R$  లు సరేఖీయాలు

12.  $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$  లు అతలీయ సదిశలైతే సరళరేఖ

$$\overline{r} = 2\overline{a} + \overline{b} + t(\overline{b} - \overline{c}) \text{ తలం}$$

$$\overline{r} = \overline{a} + x(\overline{b} - \overline{c}) + y(\overline{a} + 2\overline{b} - \overline{c}) \text{ ని ఖండించే బిందువును కనుక్కోండి.}$$

సాధన. సరళరేఖ, తలం ఖండించుకొనే బిందువు వద్ద,

$$2\overline{a} + \overline{b} + t(\overline{b} - \overline{c}) = \overline{a} + x(\overline{b} - \overline{c}) + y(\overline{a} + 2\overline{b} - \overline{c})$$

అవుతుంది.



అనురూప గుణకాలను పోలిస్తే,

$$2 = 1 + y$$

అంటే  $y = 1$

$$\Rightarrow 1 + t = x + 2y$$

అంటే  $t - x = 1$

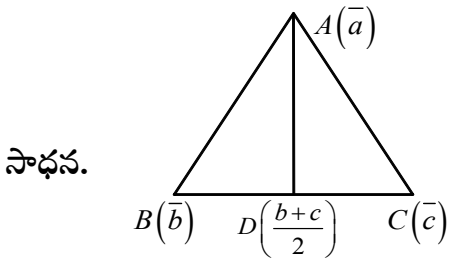
$$\Rightarrow -t = x - y$$

అంటే,  $t + x = 1$

$$t = 1, x = 0, y = 1$$

ఖండన బిందువు  $= 2\bar{a} + 2\bar{b} - \bar{c}$

13.  $A, B, C$  బిందువులు ఒక త్రిభుజి శీర్షాలు, వాటి స్థాన సదిశలు క్రమంగా  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  అయితే  $A$  గుండాపోయే మధ్యగతరేఖ సదిశా సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.



$$\overline{OA} = \bar{a}, \overline{OB} = \bar{b}, \overline{OC} = \bar{c} \text{ అనుకొనుము.}$$

$$\text{సదిశా సమీకరణం} = (1-t)\bar{a} + t\bar{b} = \bar{r}$$

$$\bar{r} = (1-t)\bar{a} + t\left(\frac{\bar{b} + \bar{c}}{2}\right)$$

## ధీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు

1.  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  లు అతలీయసదిశలు అయితే  $2\bar{a}+3\bar{b}-\bar{c}, 3\bar{a}+4\bar{b}-2\bar{c}$  బిందువులను కలిపేరేఖ,  $\bar{a}-2\bar{b}+3\bar{c}, \bar{a}-6\bar{b}+6\bar{c}$  బిందువులను కలిపే రేఖను ఖండించే బిందువును కనుక్కోండి.

సాధన.  $\overline{OA} = 2\bar{a}+3\bar{b}-\bar{c}, \overline{OB} = 3\bar{a}+4\bar{b}-2\bar{c}$

$\overline{OC} = \bar{a}-2\bar{b}+3\bar{c}, \overline{OD} = \bar{a}-6\bar{b}+6\bar{c}$  అనుకోండి.

$\overline{OA}, \overline{OB}$  బిందువులను కలిపే రేఖ సదిశా సమీకరణం

$$\bar{r} = \overline{OA} + t(\overline{OB} - \overline{OA}), t \in R$$

$$= 2\bar{a}+3\bar{b}-\bar{c} + t[3\bar{a}+4\bar{b}-2\bar{c} - 2\bar{a}-3\bar{b}+\bar{c}]$$

$$\bar{r} = 2\bar{a}+3\bar{b}-\bar{c} + t(\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}) \dots \dots (1)$$

$\overline{OC}, \overline{OD}$  బిందువులను కలిపే రేఖ సదిశా సమీకరణం

$$r = \overline{OC} + s(\overline{OD} - \overline{OC}), s \in R$$

$$= \bar{a}-2\bar{b}+3\bar{c} + s(\bar{a}-6\bar{b}+6\bar{c} - \bar{a}+2\bar{b}-3\bar{c})$$

$$\bar{r} = \bar{a}-2\bar{b}+3\bar{c} + s(-4\bar{b}+3\bar{c}) \dots \dots (2)$$

$$= \bar{a} + (-2-4s)\bar{b} + (3+3s)\bar{c}$$

$$(2+t)\bar{a} + (3+t)\bar{b} + (-1-t)\bar{c}$$

$$= \bar{a} + (-2-4s)\bar{b} + (3+3s)\bar{c}$$

ఇరువపులా  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  గుణకాలను పోల్చగా

$$2+t=1 \quad \Rightarrow \boxed{t=-1}$$

$$3+t-2-4s \quad \Rightarrow 2 = -2+4s \Rightarrow s = -1$$

$$-1-t = 3+3s \quad \Rightarrow 3s+t = -4$$

(1) లో  $t$  విలువను ప్రతిక్షేపించగా,

$$r = 2\bar{a}+3\bar{b}-\bar{c} + (-1)(\bar{a}+\bar{b}-\bar{c})$$

$$= 2\bar{a}+3\bar{b}-\bar{c} - \bar{a} - \bar{b} + \bar{c}$$

$$\bar{r} = \bar{a} + 2\bar{b}$$

1(బి).  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  లు అతలియ సదిశలైతే,  $6\bar{a} - 4\bar{b} + 4\bar{c}$ ,  $-4\bar{c}$  బిందువులను కలిపే రేఖ,  $-\bar{a} - 2\bar{b} - 3\bar{c}$ ,  $\bar{a} + 2\bar{b} - 5\bar{c}$  బిందువులను కలిపే రేఖల ఖండన బిందువు  $-4\bar{c}$  అని చూపండి.

2.  $4\bar{i} - 3\bar{j} - \bar{k}, 3\bar{i} + 7\bar{j} - 10\bar{k}, 2\bar{i} + 5\bar{j} - 7\bar{k}$  బిందువుల ద్వారా పోయే తలంసదిశా సమీకరణం కనుక్కోని  $\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$  బిందువు ఈ తలంలో ఉంటుందని చూపండి.

సాధన.  $\bar{a} = 4\bar{i} - 3\bar{j} - \bar{k}, \bar{b} = 3\bar{i} + 7\bar{j} - 10\bar{k}$

$\bar{c} = 2\bar{i} + 5\bar{j} - 7\bar{k}$  అనుకొనుము

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  ల గుండాపోయే తలం సమీకరణం

$$\bar{r} = (1-s-t)\bar{a} + s\bar{b} + t\bar{c}, s, t \in \mathbb{R}$$

$$= \bar{a} + s(\bar{b} - \bar{a}) + t(\bar{c} - \bar{a})$$

$$= 4\bar{i} - 3\bar{j} - \bar{k} + s(3\bar{i} + 7\bar{j} - 10\bar{k} - 4\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k})$$

$$+ t(2\bar{i} + 5\bar{j} - 7\bar{k} - 4\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k})$$

$$\bar{r} = 4\bar{i} - 3\bar{j} - \bar{k} + s(-\bar{i} + 10\bar{j} - 9\bar{k})$$

$$+ t(-2\bar{i} + 8\bar{j} - 6\bar{k})$$

$\bar{r} = \bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$  అనేది తలంలో ఉందనుకొనుము

$$\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k} = 4\bar{i} - 3\bar{j} - \bar{k} + s(-\bar{i} + 10\bar{j} - 9\bar{k})$$

$$+ (-2\bar{i} + 8\bar{j} - 6\bar{k})$$

ఇరువైపులా  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  లను పోల్చగా,

$$1 = 4 - s - 2t \Rightarrow 2t + s = 3 \dots (1)$$

$$2 = -3 + 10s + 8t \Rightarrow 8t + 10s = 5 \dots (2)$$

$$-3 = -1 - 9s - 6t \Rightarrow 6t + 9s = 2 \dots (3)$$

$$(1) \times 3 - (3) \Rightarrow 6t + 3s = 9$$

$$6t + 9s = 2$$

$$-6s = 7$$

$$\Rightarrow s = -\frac{7}{6}$$

$$(1) \text{ నుండి, } 2t = 3 + \frac{7}{6} = \frac{25}{6}$$

$$t = \frac{25}{12}$$

$s, t$  లను (2) లో ప్రతిక్షేపించగా,

$$8. \frac{25}{12} + 10 \left( -\frac{7}{6} \right) = 5$$

$$\Rightarrow \frac{50}{3} - \frac{35}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{15}{3} = 5 \quad \Rightarrow 5 = 5$$

దత్త సదిశలు సరేఖీయాలు

బిందువు  $\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$  అదే తలంలో ఉంటుంది

3. కార్టీసియన్ తలంలో మూలబిందువు  $O$ . ఒక వ్యక్తి  $O$  నుంచి ఈశాన్య దిశలో 3 యూనిట్లు నడిచి  $P$  అనే బిందువును చేరుకున్నాడు. అక్కడనుంచి వాయవ్య దిశకు సమాంతరంగా 4 యూనిట్లు నడిచి,  $Q$  అనే బిందువును చేరుకున్నాడు.  $OQ$  సదిశను  $\bar{i}, \bar{j}$  లలో కనుక్కోండి (ఇక్కడ  $\angle XOP = 45^\circ$ ).

సాధన. 'O' మూలబిందువు

$$\angle XOP = 45^\circ$$

వ్యక్తి  $O$  నుంచి ఈశాన్య దిశలో 3 యూనిట్లు నడిచి  $P$  బిందువు చేరుకున్నాడు.

$$\therefore \overline{OP} = (3 \cos 45^\circ)\bar{i} + (3 \sin 45^\circ)\bar{j}$$

$$\Rightarrow \overline{OP} = \left( \frac{3}{\sqrt{2}} \right)\bar{i} + \left( \frac{3}{\sqrt{2}} \right)\bar{j}$$

$PR, OX$  కు సమాంతరము  $\angle RPQ = 135^\circ$

$PQ = 4$  యూనిట్లు

$PQ$  రేఖ వాయవ్య దిశకు సమాంతరంగా ఉంది.

$$\overline{PQ} = 4 \cos(135^\circ)\bar{i} + 4(\sin 135^\circ)$$

$$= -\frac{4}{\sqrt{2}}\bar{i} + \frac{4}{\sqrt{2}}\bar{j}$$

$$\therefore \overline{OQ} = \overline{OP} + \overline{PQ}$$

$$= \left[ \left( \frac{3}{\sqrt{2}} \right)\bar{i} + \left( \frac{3}{\sqrt{2}} \right)\bar{j} \right] + \left[ -\frac{4}{\sqrt{2}}\bar{i} + \frac{4}{\sqrt{2}}\bar{j} \right]$$

$$\Rightarrow \overline{OQ} = -\frac{\bar{i} + 7\bar{j}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\bar{i} + 7\bar{j})$$

4.  $PQ$  రేఖాఖండాన్ని  $E$  బిందువు  $1:2$  నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజిస్తుంది.  $PQ$  రేఖ పై లేని బిందువు  $R$ .  $QF:FR = 2:1$  అయ్యేటట్లు  $QR$  మీద  $F$  ఒక బిందువు అయితే  $PR$  కు  $EF$  సమాంతరంగా ఉంటుందని చూపండి.

సాధన. 'O' మూలబిందువు  $\overline{OP} = \overline{p}$ ,  $\overline{OQ} = \overline{q}$ ,  $\overline{OR} = \overline{r}$

$\therefore E, PQ$  ను  $1:2$  నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది.

$$\begin{aligned} E \text{ స్థాన సదిశ } \overline{OE} &= \frac{1(\overline{q}) + 2(\overline{p})}{2+1} \\ &= \frac{2\overline{p} + \overline{q}}{3} \end{aligned}$$

$\therefore QR$  మీ  $F$  ఒక బిందువు  $QF:FR = 2:1$

(i.e.,)  $F, QR$  ను  $2:1$  నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది.

$$\therefore F \text{ స్థాన సదిశ } \overline{OF} = \frac{2(\overline{r}) + 1(\overline{q})}{2+1} = \frac{\overline{q} + 2\overline{r}}{3}$$

$$\begin{aligned} \overline{EF} &= \overline{OF} - \overline{OE} \\ &= \left( \frac{\overline{q} + 2\overline{r}}{3} \right) - \left( \frac{2\overline{p} + \overline{q}}{3} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3}(\overline{r} - \overline{p})$$

$$= \frac{2}{3}(\overline{OR} - \overline{OP})$$

$$= \frac{2}{3}\overline{PR}$$

$$\therefore \overline{EF} = \frac{2}{3}\overline{PR}$$

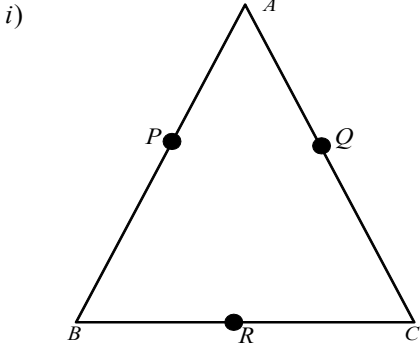
$\Rightarrow EF, PR$  లు సమాంతరాలు

5.  $\Delta ABC$  లో  $AB, BC, CA$  ల మధ్య బిందువులు వరుసగా  $P, Q, R, D$  ఏదైనా బిందువు అయితే,

i)  $\overline{DA} + \overline{DB} + \overline{DC}$  ను  $\overline{DP} + \overline{DQ} + \overline{DR}$  లలో వ్యక్తపరచండి.

ii)  $\overline{PQ} + \overline{QB} + \overline{RC} = \overline{a}$  అయితే,  $\overline{a}$  ను కనుక్కోండి.

సాధన.



$D$  మూలబిందువు అనుకొందాం.

$$\overline{DA} = \overline{a}, \overline{DB} = \overline{b}, \overline{DC} = \overline{c}$$

$$\Rightarrow \overline{DP} = \frac{\overline{a} + \overline{b}}{2}, \overline{DQ} = \frac{\overline{b} + \overline{c}}{2}, \overline{DR} = \frac{\overline{a} + \overline{c}}{2}$$

$$\overline{DA} + \overline{DB} + \overline{DC} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$$

$$\overline{DP} + \overline{DQ} + \overline{DR} = \frac{1}{2} [\overline{a} + \overline{b} + \overline{b} + \overline{c} + \overline{c} + \overline{a}]$$

$$= \frac{1}{2} [2\overline{a} + 2\overline{b} + 2\overline{c}]$$

$$= \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{DA} + \overline{DB} + \overline{DC}$$

$$\overline{DA} + \overline{DB} + \overline{DC} = \overline{DP} + \overline{DQ} + \overline{DR} \dots (1)$$

ii)  $\overline{PA} + \overline{QB} + \overline{RC} = \overline{a}$

$$\Rightarrow \overline{DA} - \overline{DP} + \overline{DB} - \overline{DQ} + \overline{DC} - \overline{DR} = \overline{a}$$

$$\Rightarrow [\overline{DA} + \overline{DB} + \overline{DC}] - [\overline{DP} + \overline{DQ} + \overline{DR}] = \overline{a}$$

$$\Rightarrow [\overline{DP} + \overline{DQ} + \overline{DR}] - [\overline{DP} + \overline{DQ} + \overline{DR}] = \overline{a}$$

[(1) నుండి]

$$\overline{0} = \overline{a}$$

$$\boxed{\overline{a} = \overline{0}}$$

6.  $A, B, C$  బిందువుల స్థాన సదిశలు వరుసగా  $-2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}, -4\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}, 6\bar{i} - 3\bar{j} - 13\bar{k}$  అయి

$\overline{AB} = \lambda \overline{AC}$  అయితే  $\lambda$  ను కనుక్కోండి.

సాధన.  $O$  మూలబిందువు అనుకోండి  $\overline{OA} = -2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k},$

$$\overline{OB} = -4\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}, \overline{OC} = 6\bar{i} - 3\bar{j} - 13\bar{k}$$

దత్తాంశం నుండి  $\overline{AB} = \lambda \overline{AC}$

$$\overline{OB} - \overline{OA} = \lambda [\overline{OC} - \overline{OA}]$$

$$-4\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k} + 2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k} =$$

$$\lambda [6\bar{i} - 3\bar{j} - 13\bar{k} + 2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}]$$

$$-2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k} = \lambda [8\bar{i} - \bar{j} - 12\bar{k}]$$

$\bar{i}$  గుణకాన్ని ఇరువైపులా పోల్చగా

$$-2 = \lambda 8 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{8} \Rightarrow \boxed{\lambda = -\frac{1}{4}}$$

7. i)  $a, b, c$  లు అతలీయ సదిశలైతే

$$i) -\bar{a} + 4\bar{b} - 3\bar{c}, 3\bar{a} + 2\bar{b} - 5\bar{c}, -3\bar{a} + 8\bar{b} - 5\bar{c},$$

$$-3\bar{a} + 2\bar{b} + \bar{c}$$

ii)  $6\bar{a} + 2\bar{b} - \bar{c}, 2\bar{a} - \bar{b} + 3\bar{c}, -\bar{a} + 2\bar{b} - 4\bar{c}, 12\bar{a} - \bar{b} - \bar{c}$  లు సతలీయాలని చూపండి.

సాధన. i)  $\overline{OA} = -\bar{a} + 4\bar{b} - 3\bar{c}, \overline{OB} = 3\bar{a} + 2\bar{b} - 5\bar{c}$

$\overline{OC} = -3\bar{a} + 8\bar{b} - 5\bar{c}, \overline{OD} = -3\bar{a} + 2\bar{b} + \bar{c}$  అనుకోండి.

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = 3\bar{a} + 2\bar{b} - 5\bar{c} + \bar{a} - 4\bar{b} + 3\bar{c}$$

$$= 4\bar{a} - 2\bar{b} - 2\bar{c}$$

$$\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = -3\bar{a} + 8\bar{b} - 5\bar{c} + \bar{a} - 4\bar{b} + 3\bar{c}$$

$$= -2\bar{a} + 4\bar{b} - 2\bar{c}$$

$$\overline{AD} = \overline{OD} - \overline{OA}$$

$$= -3\bar{a} + 2\bar{b} + \bar{c} + \bar{a} - 4\bar{b} + 3\bar{c} = -2\bar{a} - 2\bar{b} + 4\bar{c}$$

$\overline{AB} = x\overline{AC} + y\overline{AD}; x, y$  లు అదిశలు

$$4\bar{a} - 2\bar{b} - 2\bar{c} = x[-2\bar{a} + 4\bar{b} - 2\bar{c}]$$

$$+y[-2\bar{a}-2\bar{b}+4\bar{c}]$$

$$4 = -2x - 2y \dots\dots\dots(1)$$

$$-2 = 4x - 2y \dots\dots\dots(2)$$

$$-2 = -2x + 4y \dots\dots\dots(3)$$

$$(1) - (3) \Rightarrow -2x - 2y = 4$$

$$-2x + 4y = -2$$

$$-6y = 6$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -1}$$

$$(3) -2x = -2 - 4y$$

$$= -2 + 4$$

$$-2x = 2$$

$$x = -1$$

$x, y$  లను (2) లో ప్రతిక్షేపించగా  $-2 = -4 + 2$

$$-2 = -2$$

$x, y$  విలువలు సమీకరణము (2) ను ధృవపరిచినవి. కావున దత్త సదిశలు సతలీయములు.

8.  $ABCD$  చతుర్భుజంలో, ఒక జత ఎదుటి భుజాల మధ్య బిందువులూ, దాని కర్ణాలు ఖండన బిందువు సరేఖీయాలైతే, ఆ చతుర్భుజం సమలంబ చతుర్భుజం అవుతుందని సదిశా పద్ధతుల ద్వారా నిరూపించండి.

సాధన.  $A$  మూలబిందువు  $\overline{AB} = \bar{b}$ ,  $\overline{AC} = \bar{c}$ ,  $\overline{AD} = \bar{d}$

$M, N, AB, CD$  ల మధ్యబిందువులు

$$\therefore M \text{ స్థాన సదిశ } \overline{AM} = \frac{1}{2}\bar{b}$$

$$N \text{ స్థాన సదిశ } \overline{AN} = \frac{1}{2}(\bar{c} + \bar{d})$$

సరేఖీయ బిందువు  $P$  అనుకుందాం

$$P \text{ స్థాన సదిశ } \overline{AP} = \bar{r}$$

రేఖ  $\overline{AC}$  సదిశా సమీకరణం

$$\bar{r} = t\bar{c}, t \in R \rightarrow (1)$$

రేఖ  $\overline{BD}$  సదిశా సమీకరణము

$$\bar{r} = (1-s)\bar{b} + s\bar{d}, s \in R \rightarrow (2)$$



రేఖ  $\overline{MN}$  సదిశా సమీకరణము

$$\bar{r} = (1-x)\frac{\bar{b}}{2} + x.\frac{1}{2}(\bar{c} + \bar{d})x \in R \rightarrow (3)$$

$$\Rightarrow 2\bar{r} = (1-x)\bar{b} + x(\bar{c} + \bar{d}) \rightarrow (4)$$

$$\Rightarrow \bar{r} + \bar{r} = (1-x)\bar{b} + x(\bar{c} + \bar{d})$$

$$\Rightarrow t\bar{c} + (1-s)\bar{b} + s\bar{d}$$

$$= (1-x)\bar{b} + x(\bar{c} + \bar{d}) ; (1), (2) \text{ ల నుండి}$$

$\bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$  గుణకాలను పోల్చగా,

$$1-s = 1-x \Rightarrow s = x$$

$$t = x$$

$$\therefore s = t = x$$

(1), (2) ల నుండి

$$t\bar{c} = (1-s)\bar{b} + s\bar{d}$$

$$\Rightarrow s\bar{c} = (1-s)\bar{b} + s\bar{d}, \therefore t = s$$

$$\Rightarrow (1-s)\bar{b} + (s)(\bar{c} - \bar{d})$$

$$\Rightarrow \bar{b}, \bar{c} - \bar{d} \text{ లు సమాంతరములు}$$

$$\Rightarrow \overline{AB}, \overline{CD} \text{ లు సమాంతరములు}$$

$\therefore ABCD$  సమలంబ చతుర్భుజం

9.  $2\bar{i} + 4\bar{j} + 2\bar{k}$ ,  $2\bar{i} + 3\bar{j} + 5\bar{k}$  బిందువుల గుండా పోతూ, సదిశ  $3\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$  కు సమాంతరంగా ఉండే తలం సదిశా సమీకరణం కనుక్కుని,  $2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$ ,  $4\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}$  బిందువులను కలిపే రేఖను ఈ తలం ఖండించే బిందువును కూడ కనుక్కోండి.

సాధన.  $\bar{a} = 2\bar{i} + 4\bar{j} + 2\bar{k}$ ,  $\bar{b} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 5\bar{k}$  బిందువుల గుండా పోతూ,  $\bar{c} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$  సదిశకు సమాంతరంగా ఉండే తలం సదిశా సమీకరణం

$$\bar{r} = t\bar{b} + s\bar{c}; t, s \in R$$

$$\Rightarrow \bar{r} = (1-t)(2\bar{i} + 4\bar{j} + 2\bar{k}) + t(2\bar{i} + 3\bar{j} + 5\bar{k})$$

$$s = (3\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k})$$

$$\Rightarrow \bar{r} = (2+3s)\bar{i} + (4-t-2s)$$

$$\bar{j} + (2+3t+s)\bar{k} \rightarrow (1)$$

$\bar{p} = 2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$ ,  $\bar{q} = 4\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}$  బిందువుల గుండా పోయే రేఖా సదిశా సమీకరణం

$$\bar{r} = (1-x)\bar{p} + x\bar{q}; x \in R$$

$$(i.e.,) \bar{r} = (1-x)(2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k})$$

$$+ x(4\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k})$$

$$\Rightarrow \bar{r} = (2-2x+4x)\bar{i} + (1-x-2x)\bar{j}$$

$$+(3-3x+3x)\bar{k}$$

$$\Rightarrow \bar{r} = (2+2x)\bar{i} + (1-3x)\bar{j} + 3\bar{k}, \quad x \in R \rightarrow (2)$$

(1), (2) ల ఖండన బిందువు  $P$ , దాని స్థాన సదిశ  $\bar{r}$  అయితే (1), (2) ల నుండి

$$(2+3s)\bar{i} + (4-t-2s)\bar{j} + (2+3t+s)\bar{k}$$

$$= (2+2x)\bar{i} + (1-3x)\bar{j} + 3\bar{k}$$

$\therefore \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  లు అతలీయ సదిశలు కనుక

$$2+3s = 2+2x \Rightarrow 2x-3s = 0 \rightarrow (3)$$

$$4-t-2s = 1-3x \Rightarrow 3x-2s-t = -3 \rightarrow (4)$$

$$2+3t+s = 3 \Rightarrow s+3t = 1 \rightarrow (5)$$

(5) నుండి  $3t = 1-s$

$$\therefore t = \frac{1-s}{3}$$

' $t$ ' విలువ (4) లో వ్రాస్తే,

$$3x-2s - \left(\frac{1-s}{3}\right) = -3$$

$$\Rightarrow 9x-6s-1+s = -9$$

$$\Rightarrow 9x-5s = -8$$

$$(i.e.,) 9x-5s+8=0 \rightarrow (6)$$

$$2x-3s+0=0 \rightarrow (3)$$

సాధించగా

$$\frac{x}{0+24} = \frac{s}{16-0} = \frac{1}{-27+10}$$

$$\Rightarrow x = \frac{24}{-17}$$

$$x = \frac{-24}{17} \text{ ను (2) లో వ్రాయగా}$$

$$\bar{r} = \left(2 - \frac{48}{17}\right)\bar{i} + \left(1 + \frac{72}{17}\right)\bar{j} + 3\bar{k}$$

$$(i.e.,) \bar{r} = \left(\frac{-14}{17}\right)\bar{i} + \left(\frac{89}{17}\right)\bar{j} + 3\bar{k}$$

$$\therefore \text{ఖండన బిందువు } P\left(\frac{-14}{17}, \frac{89}{17}, 3\right)$$

10.  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  లు అతలీయ సదిశలైతే,  $-2\bar{a}+3\bar{b}+5\bar{c}$ ,  $\bar{a}+2\bar{b}+3\bar{c}$ ,  $7\bar{a}-\bar{c}$  లను స్థాన సదిశలుగా గల బిందువుల సరేఖీయాలని చూపండి.

సాధన.  $O$  మూల బిందువు,  $P, Q, R$  లు దత్త బిందువులు అనుకుండా.

$$\overline{OP} = -2\bar{a} + 3\bar{b} + 5\bar{c}$$

$$\overline{OQ} = \bar{a} + 2\bar{b} + 3\bar{c}$$

$$\overline{OR} = 7\bar{a} - \bar{c}$$

$$\overline{PQ} = \overline{OR} - \overline{OQ}$$

$$= (7\bar{a} - \bar{c}) - (\bar{a} + 2\bar{b} + 3\bar{c})$$

$$= 6\bar{a} - 2\bar{b} - 4\bar{c}$$

$$= 2(3\bar{a} - \bar{b} - 2\bar{c})$$

$$= 2(\overline{PQ})$$

$$\therefore \overline{OR} = 2(\overline{PQ})$$

$$\Rightarrow P, Q, R \text{ లు సరేఖీయాలు}$$

12.  $2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$  సదిశకు సమాంతరంగా ఉంటూ,  $(3\bar{i} + \bar{j} - \bar{k})$  ని స్థాన సదిశగా గలిగిన బిందువు  $A$  గుండా పోయే రేఖ సదిశా సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.  $AP = 15$  అయ్యేటట్లు ఈ రేఖమీద  $P$  అనే బిందువు ఉండే,  $P$  స్థాన సదిశ కనుక్కోండి.

సాధన. బిందువు  $A$  స్థాన సదిశ  $\bar{a} = 3\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$  గుండా పోతూ సదిశ

$\bar{b} = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$  కు సమాంతరంగా ఉండే సరళరేఖ

$$\bar{r} = \bar{a} + t\bar{b}, t \in R$$

$$(i.e) \bar{r} = (3\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}) + t(2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k})$$

$$\Rightarrow \bar{r} - \bar{a} = t\bar{b}$$

$$\Rightarrow \overline{AP} = t\bar{b}$$

$$\Rightarrow \overline{AP} = t(2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k})$$

$$\Rightarrow |\overline{AP}| = AP = |t| \sqrt{4+1+4} = |3t| = 15 \text{ (దత్తాంశం నుండి)}$$

$$\therefore t = 5, t = -5$$

$$\therefore \overline{AP} = 5\bar{b}$$

$$\Rightarrow \overline{OP} - \overline{OA} = 5\bar{b}$$

$$\Rightarrow \overline{OP} = \bar{a} + 5\bar{b} = (3\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}) + 5(2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}) = 13\bar{i} - 4\bar{j} + 9\bar{k}$$

$$\text{(లేదా)} \overline{AP} = -5\bar{b}$$

$$\Rightarrow \overline{OP} = \bar{a} - 5\bar{b} = (3\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}) - 5(2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k})$$

$$= -7\bar{i} + 6\bar{j} - 11\bar{k}$$

$$\therefore \overline{OP} = 13\bar{i} - 4\bar{j} + 9\bar{k} \text{ (లేదా)} -7\bar{i} + 6\bar{j} - 11\bar{k}$$