కణాల వ్యవస్థలు, భ్రమణ గమనం

ముఖ్య విషయాలు

1. వస్తువులోని ద్రవ్యరాశి కేంద్రీకృతమైనట్లు భావింపబడు బిందువును ద్రవ్యరాశి కేంద్రము అంటారు.
2. వస్తువు పై పనిచేయు గురుత్వాకర్షణ బలం కేంద్రీకృతమైనట్లు భావింపబడు బిందువును గరిమనాభి అంటారు.
3. రెండు కణాల వ్యవస్థలో ద్రవ్యరాశులు m_1, m_2 మరియు వాటి స్థానాలు x_1 , x_2 అయితే,

ఎ) ద్రవ్యరాశి కేంద్రం నిరూపకాలు $x_c = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$

బి) నిరూపక వ్యవస్థ మూలబిందువు m_1 తోటి ఏకీభవించితే,

$$x_c = \frac{m_2x_2}{m_1 + m_2} \text{ లేక } x_c = \frac{m_2d}{m_1 + m_2}$$ ఇక్కడ $d = m_1, m_2$ మధ్యదూరం

సి) ద్రవ్యరాశి కేంద్రం నుండి వస్తువుల దూరాల మధ్య నిష్పత్తి $\dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{m_2}{m_1}$

4. **అనేక కణాల వ్యవస్థకు**

ఎ) $X_{c.m} = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots\ldots\ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots + m_n} = \dfrac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_ix_i$

బి) $Y_{c.m} = \dfrac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots\ldots\ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots + m_n} = \dfrac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_iy_i$

సి) $Z_{c.m} = \dfrac{m_1z_1 + m_2z_2 + \ldots\ldots\ldots + m_nz_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots + m_n} = \dfrac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_iz_i$

డి) ద్రవ్యరాశి కేంద్ర స్థాన సదిశ

$$\bar{r}_{c.m} = \frac{m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2 + \ldots\ldots\ldots + m_n\bar{r}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots + m_n} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_ir_i$$

ఇ) ద్రవ్యరాశి కేంద్రం వేగం $V_{cm} = \dfrac{m_1v_1 + m_2v_2 + \ldots.. + m_nv_n}{m_1 + m_2 + \ldots.. + m_n}$

ఎఫ్) ద్రవ్యరాశి కేంద్రం ద్రవ్యవేగం $P_c = mv_c = \sum_{i=1}^{n} m_iv_i$ లేదా $m\bar{v}_c = m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 + \ldots\ldots + m_n\bar{v}_n$

లేదా $\overline{P_c} = \overline{P_1} + \overline{P_2} + ...\overline{P_n}$

బి) ద్రవ్యరాశి కేంద్రం త్వరణం $a = \frac{F_C}{M} = \sum_{i=1}^{n} a_i m_i$

$$\therefore a = \frac{m_1a_1 + m_2a_2 + m_3a_3 + ... + m_na_n}{m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_n}$$

5. ఏకరీతి గురుత్వాకర్షణ క్షేత్రంలో ఒక వ్యవస్థ ద్రవ్యరాశి కేంద్రం, గరిమనాభి ఏకీభవిస్తాయి. క్షేత్రం ఏకరీతిగా లేకుంటే ఏకీభవించవు.

6. ద్రవ్యరాశి కేంద్ర గమనాన్ని వ్యవస్థలోని అంతర్గత బలాలు ప్రభావితం చేయవు.

7. సదిశా లబ్ధము

రెండు సదిశల పరిమాణాలు మరియు వాటి మధ్య కోణం యొక్క Sin విలువల లబ్ధాన్ని వాటి సదిశాలబ్ధము అంటారు. $\vec{A}$ మరియు $\vec{B}$ అనే రెండు సదిశలు θ కోణంచేస్తూ వుంటే వాటి సదిశాలబ్ధం

$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta \hat{n}$. ఇందు $\hat{n}$ అనునది $\vec{A}$ మరియు $\vec{B}$ లను కల్గియున్న తలానకు లంబంగా గల ఏకాంక సదిశ.

ఉదా : 1) టార్క్ $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

$\vec{\tau}$ దిశ $\vec{r}$ మరియు $\vec{F}$ లకు లంబముగా ఉంటుంది.

8. సదిశ లబ్ధ ధర్మాలు

1) సదిశా లబ్ధము ఒక సదిశరాశి.

2) సదిశా లబ్ధము స్థిత్యంతర ధర్మాన్ని పాటించదు. $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$ మరియు $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

3) విభాగ న్యాయమును పాటించును.

$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

4) $i \times i = j \times j = k \times k = 0$

$i \times j = k \qquad j \times i = -k$

$j \times k = i \qquad k \times j = -i$

$k \times i = j \qquad i \times k = -j$

5) If $\vec{A} = A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}$ మరియు $\vec{B} = B_1\hat{i} + B_2\hat{j} + B_3\hat{k}$ అయిన,

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & -\hat{j} & \hat{k}\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}=\hat{i}\left(A_2B_3-A_3B_2\right)-\hat{j}\left(A_1B_3-A_3B_1\right)+\hat{k}\left(A_1B_2-A_2B_1\right)$$

9. వివిధ కణాల ద్రవ్య రాశులు మరియు భ్రమణాక్షం నుండి వాటి లంబ దూరాల వర్గాల లబ్దాల మొత్తాన్ని ఆ అక్షం పరంగా దృఢ వస్తువు యొక్క జడత్వ భ్రామకం అని నిర్వచిస్తాము.
10. m ద్రవ్యరాశి గల బిందు రూప ద్రవ్యరాశి జడత్వ భ్రామకం $I=mr^2$.ఇందు r అనునది భ్రమణాక్షం నుండి బిందురూప ద్రవ్యరాశి లంబ దూరం.
11. జడత్వ భ్రామకం SI ప్రమాణం kgm^2, మితి ఫార్ములా $[ML^2T^0]$.
12. వస్తువు మొత్తం ద్రవ్యరాశి ఏ బిందువు వద్ద కేంద్రీకరింపబడి ఉంటుందో మరియు ద్రవ్యరాశి వితరణతో దాని జడత్వ భ్రామకం సమానమవుతుందో ఆ బిందువుకు మరియు భ్రమణాక్షానికి మధ్యగల దూరాన్ని భ్రమణ వ్యాసార్ధం అంటారు. .

13. లంబాక్ష సిద్ధాంతము

ఒక సమతల పటలానికి లంబంగా,ఏదో ఒక బిందువు గుండా పోయే అక్షం పరంగా జడత్వ భ్రామకము, ఆ పటల తలంలో సరస్పరము లంబంగా ఉండి అదే బిందువు గుండా పోయే రెండు అక్షాల పరంగా గల జడత్వ భ్రామకాల మొత్తానికి సమానము.

$I_z=I_x+I_y$

14. సమాంతరాక్ష సిద్ధాంతం

ఏదేని ఒక అక్షం పరంగా దృడ వస్తువు జడత్వ భ్రామకం, దాని ద్రవ్యరాశి కేంద్రం గుండా పోయే సమాంతర అక్షం పరంగా దాని జడత్వ భ్రామకం మరియు వస్తు ద్రవ్యరాశి, రెండు సమాంతరాక్షాల మధ్య దూరం వర్గాల లబ్ధాల మొత్తానికి సమానం.

$I=I_0+Mr^2$,ఇందు I_0 అనేది వస్తుద్రవ్యరాశి కేంద్రం గుండా పోతున్న సమాంతర అక్షం పరంగా జడత్వ భ్రామకం మరియు r రెండు సమాంతరాక్షాల మధ్య దూరం.

15. టార్క్ τ మరియు కోణీయ త్వరణం α ల మధ్య సంబంధం $\tau=I\alpha$.
16. కణం రేఖీయ ద్రవ్యవేగం మరియు ఒక బిందువు నుండి కణం గమన రేఖకు గల లంబ దూరాల లబ్దాన్ని ఆ బిందువు దృష్ట్యా కణం యొక్క కోణీయ ద్రవ్యవేగం అంటారు. సదిశా రూపంలో $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$.
17. కోణీయ ద్రవ్యవేగం $L=mvr$.
18. కోణీయ ద్రవ్యవేగం $L=I\omega$.

19. కోణీయ ద్రవ్యవేగం నిత్యత్వ నియమం ప్రకారం $I\omega$ = స్థిరం

$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 =$ స్థిరం (వస్తువు పై బాహ్య టార్క్ పనిచేయనపుడు)

20. **సన్నని కడ్డీ జడత్వ భ్రామకము**

ఎ) పొడవుకు లంబముగా సన్నని కడ్డీ మధ్య బిందువు ద్వారా పోవు అక్షము పరంగా జడత్వ భ్రామకం

$I = \frac{Ml^2}{12}; K = \frac{l}{\sqrt{12}}$

బి) పొడవుకు లంబంగా కడ్డీ చివర ఉన్న బిందువు ద్వారా పోవు అక్షము పరంగా జడత్వం భ్రామకం

$I = \frac{ml^2}{3}; K = \frac{l}{\sqrt{3}}$

21. **రింగు జడత్వ భ్రామకము**

ఎ) రింగు కేంద్రము గుండాపోతూ దాని తలమునకు లంబంగా ఉన్న అక్షం పరంగా జడత్వ భ్రామకం $I = MR^2, K = R$

బి) ఏదైనా వ్యాసం పరంగా రింగు జడత్వ భ్రామకం $I = \frac{MR^2}{2}; K = \frac{R}{\sqrt{2}}$

సి) రింగు తలంలోని ఏదైనా స్పర్శరేఖ పరంగా జడత్వ భ్రామకం $I = \frac{3}{2}MR^2; K = \sqrt{\frac{3}{2}}\,R$

22. **గుండ్రని పళ్ళెము భ్రామకం**

ఎ) గుండ్రని పళ్ళెం కేంద్రం గుండా పోతూ తలానికి లంబంగా ఉన్న అక్షం పరంగా జడత్వ భ్రామకం

$$I = \frac{MR^2}{2}; \quad K = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

బి) పళ్ళెంలోని ఏదైనా వ్యాసం పరంగా జడత్వ భ్రామకం $I = \frac{MR^2}{4}; \; K = \frac{R}{2}$

సి) పళ్ళెం తలంలోని స్పర్శరేఖ పరంగా జడత్వ భ్రామకం $I = \frac{5}{4}MR^2; \; K = \frac{\sqrt{5}}{2}R$

23. **సమతల పటలము యొక్క జడత్వ భ్రామకం**

ఎ) తలానికి లంబంగా మధ్య బిందువు ద్వారా పోయే అక్షం పరంగా

$$I = M\frac{(l^2 + b^2)}{12}; K = \sqrt{\frac{l^2 + b^2}{12}}$$

బి) పొడవుకు సమాంతరంగా మధ్యబిందువు ద్వారా పోయే అక్షం పరంగా $I = \frac{Mb^2}{12}$; $K = \frac{b}{\sqrt{12}}$

సి) వెడల్పుకు సమాంతరంగా మధ్యబిందువు ద్వారా పోయే అక్షం పరంగా $I = \frac{Ml^2}{12}$; $K = \frac{l}{\sqrt{12}}$

24. **ఘనగోళం యొక్క జడత్వ భ్రామకం**

ఎ) వ్యాసం పరంగా జడత్వ భ్రామకం $I = \frac{2}{5}MR^2$; $K = \sqrt{\frac{2}{5}}\, R$

బి) ఏదైనా స్పర్శరేఖ పరంగా $I = \frac{7}{5}MR^2$; $K = \sqrt{\frac{7}{5}}\, R$

25. **గుల్ల గోళం యొక్క జడత్వ భ్రామకం**

ఎ) వ్యాసం పరంగా జడత్వ భ్రామకం $I = \frac{2}{3}MR^2$; $K = \sqrt{\frac{2}{3}}\, R$

బి) ఏదైనా స్పర్శరేఖ పరంగా జడత్వ భ్రామకం $I = \frac{5}{3}MR^2$; $K = \sqrt{\frac{5}{3}}\, R$

26. **ఘన స్థూపం జడత్వ భ్రామకం**

ఎ) స్థూపం అక్షం పరంగా జడత్వ భ్రామకం $I = \frac{MR^2}{2}$; $K = \frac{R}{\sqrt{2}}$

బి) పొడవుకు లంబంగా, కేంద్రం ద్వారా పోయే అక్షం పరంగా జడత్వ భ్రామకం

$$I = M\left(\frac{l^2}{12} + \frac{R^2}{4}\right); \quad K = \sqrt{\frac{l^2}{12} + \frac{R^2}{4}}$$

27. **గుల్ల స్థూపము జడత్వ భ్రామకం**

ఎ) స్థూపం అక్షం పరంగా జడత్వ భ్రామకం $I = MR^2$; $K = R$

బి) పొడవుకు లంబంగా, కేంద్రం ద్వారా పోయే అక్షం పరంగా $I = M\left(\frac{l^2}{12} + \frac{R^2}{2}\right)$; $K = \sqrt{\frac{l^2}{12} + \frac{R^2}{2}}$

28. **నిలువు వృత్తంలో చలనము**

ఎ) వస్తువు నిలువు వృత్త మార్గంలో పూర్తిగా చలించడానికి ఉన్నతమ బిందువు వద్ద ఉండవలసిన కనీస వేగం

$$v_2 = \sqrt{gR}$$

బి) వస్తువు నిలువు వృత్త మార్గంలో పూర్తిగా చలించడానికి నిమ్నతమ బిందువు వద్ద ఉండవలసిన కనీస వేగం

$$v_1 = \sqrt{5gR}$$

సి) నిమ్నతమ బిందువు వద్ద తీగలో తన్యత $T = mg + \frac{mv_1^2}{R}$

డి) ఉన్నతమ బిందువు వద్ద తీగలో తన్యత $T = mg + \frac{mv_1^2}{R}$

అతి స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. ఒక వ్యవస్థ ద్రవ్యరాశి కేంద్ర స్థానం వద్ద ద్రవ్యరాశి ఉండవలసిన అవసరం ఉందా?

జ : లేదు. ద్రవ్యరాశి కేంద్రం వస్తువు లోపలగానీ లేక వెలుపలగానీ ఉండవచ్చు.

2. ఒక అమ్మాయి బరువులున్న ఒక సంచీని ఒక చేతిలో పట్టుకొని నిలబడింది. ఇంకొక అమ్మాయి అంతే బరువు వున్న రెండు సంచులను తన రెండు చేతులతో పట్టుకొని నిలబడింది. ఆ అమ్మాయి ద్రవ్యరాశి కేంద్ర స్థానాలలో మార్పులెలా ఉంటాయి ?

జ: ఒక సంచీని ఒక చేతిలో పట్టుకొని నిలుచున్న అమ్మాయి ద్రవ్యరాశి కేంద్ర స్థానం, సంచీ ఉన్న వైపుకు జరుగును. రెండు సంచులను తన రెండు చేతులతో పట్టుకొని నిలుచున్న అమ్మాయి ద్రవ్యరాశి కేంద్రస్థానంలో మార్పు ఉండదు.

3. సైకిల్ చక్రాలను కమ్మీలు ఎందుకు అమర్చుతారు ?

జ: సైకిల్ చక్రాలను కమ్మీల వలన, చక్రం ద్రవ్యరాశి ఎక్కువగా వితరణ పొందుతుంది. కావున జడత్వ భ్రామకం పెరుగుతుంది ఫలితంగా సైకిల్ ఏకరీతి చలనంను కలిగి ఉంటుంది.

4. మడత బందుల వద్ద బలాన్ని ప్రయోగించి ఒక తలుపును తెరవడం లేదా మూయడం సాధ్యం కాదు. ఎందువల్ల?

జ: టార్క్ $(\tau) = \vec{r} \times \vec{F} = rF\sin\theta$ = స్థిరము. మడత బందు వద్ద బలంను ప్రయోగించుట వలన టార్క్ శూన్యమగును. కావున తలుపును తెరవడం లేదా మూయడం సాధ్యం కాదు.

5. టేబుల్ తలం పై ఒక గుడ్డును బొంగరం వలె తిప్పి అది ఉడికినదీ లేనిదీ ఎలా నిర్ధారించగలం?

జ: ఉడకని గుడ్డును తిప్పితే అపకేంద్రబలం వల్ల, ద్రవ కణాలు అంచువైపు జరిగి, జడత్వ భ్రామకం పెరుగుతుంది. కోణీయ ద్రవ్యవేగం నిత్యత్వ నియమం ప్రకారం, ఉడికిన గుడ్డు కోణీయవేగం ఉడకని

గుడ్డు కోణీయవేగం కన్న ఎక్కువ. కావున ఉడకని గుడ్డు త్వరగా అగుతుంది.

6. ఒక హెలికాప్టర్‌కు ఎందుకు రెండు ప్రొపెల్లర్‌లు తప్పక ఉండి తీరాలి ?

జ: కోణీయ ద్రవ్యవేగ నిత్యత్వ నియమం వల్ల,హెలికాప్టర్‌కు ఒకే ఒక ప్రొపెల్లర్ ఉంటే, హెలికాప్టర్ తనంతట తాను వ్యతిరేక దిశలో తిరుగును. కావున హెలికాప్టర్‌కు రెండు ప్రొపెల్లర్‌లు తప్పక ఉండి తీరాలి.

7. భూగోళ ధ్రువాల వద్ద ఉన్న మంచు పూర్తిగా కరిగిపోతే ఒక రోజు కాల వ్యవధి ప్రభావితమౌవుతుంది.

జ: భూమి తన ధృవ అక్షం వెంట భ్రమణం చెందుతుంది.

భూమి ధృవాల వద్ద మంచు పర్వతాలు ద్రవీభవనం చెందితే, భ్రమణాక్షం వెంట కేంద్రీకృతమైన ద్రవ్యరాశి వెలుపలకు నెట్టబడి, జడత్వ భ్రామకం పెరుగుతుంది

ఒక రోజు కాల వ్యవధి కూడ పెరుగుతుంది.($I\omega =$ స్థిరం మరియు $\omega = \frac{2\pi}{T}$)

స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. ద్రవ్యరాశి కేంద్రం, గరిమనాభుల మధ్య వ్యత్యాసాలను గుర్తించండి.

జ : ద్రవ్యరాశి కేంద్రము, గరిమనాభిల మధ్య తేడాలు

ద్రవ్యరాశి కేంద్రము	గరిమనాభి
1) వస్తువులోని ద్రవ్యరాశి కేంద్రీకృతమైనట్లు భావింపబడు బిందువును ద్రవ్యరాశి కేంద్రము అంటారు.	1) వస్తువు పై పనిచేయు గురుత్వాకర్షణ బలం కేంద్రీకృతమైనట్లు భావింపబడు బిందువును గరిమనాభి అంటారు.
2) క్రమాకారం కలిగిన చిన్న వస్తువులకు ద్రవ్యరాశి కేంద్రం మరియు గరిమనాభి ఏకీభవిస్తుంది.	2) వస్తువు చాలా పెద్దదిగా ఉండి ద్రవ్యరాశి వితరణ ఏకరీతిగా లేనపుడు ద్రవ్యరాశి కేంద్రం మరియు గరిమనాభి గరిమనాభులు ఏకీభవించకపోవచ్చును.
3) ద్రవ్యరాశి కేంద్రపరంగా వస్తువులో గల కణముల	3) గరిమనాభిపరంగా వస్తువులో గల

ద్రవ్యరాశుల భ్రామకాల బీజీయ మొత్తం శూన్యము.	కణాల భారాల భ్రామకాల బీజీయ మొత్తం శూన్యం .
4) వస్తువు స్థానాంతరణ గమనాన్ని వివరించడానికి ద్రవ్యరాశి కేంద్రాన్ని వాడతారు.	4) వస్తువుకు స్థిరత్వము కలిగించడానికి ఆధారాన్ని కల్పించు ప్రక్రియలో గరిమనాభిని వాడతారు.

2. బాహ్య బల ప్రభావానికి గురయిన ఒక కణవ్యవస్థ ఆ బలం వ్యవస్థ ద్రవ్యరాశి కేంద్రం వద్ద ప్రయోగించినట్లుగా గమనంలో ఉంటుందని చూపండి.

జ: ఒక వ్యవస్థ యొక్క కణాల ద్రవ్యరాశులు $m_1, m_2, -----, m_n$ లు $V_1, V_2 ----, V_n$ వేగాలతో చలిస్తూ ఉన్నాయనుకుంటే.

$$M = m_1 + m_2 + ----- + m_n$$

$$\overrightarrow{V_{cm}} = \frac{1}{M}\left(m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} + ---- + m_n\vec{v_n}\right)$$

ద్రవ్యరాశి కేంద్ర త్వరణం $\overrightarrow{a_{cm}} = \frac{d\overrightarrow{V_{cm}}}{dt} = \frac{1}{M}(m_1\frac{d\vec{v_1}}{dt} + m_2\frac{d\vec{v_2}}{dt} + ---- + m_n\frac{d\vec{v_n}}{dt})$

లేక

$$\overrightarrow{a_{cm}} = \frac{1}{M}\left(m_1\vec{a_1} + m_2\vec{a_2} + ---- + m_n\vec{a_n}\right)$$

న్యూటన్ రెండవ గమన సూత్రం, $\overrightarrow{a_{cm}} = \frac{1}{M}\left[\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ------ + \vec{F}_n\right]$

$$\therefore M\overrightarrow{a_{cm}} = \sum \vec{F}_n = \vec{F}_{ext}$$

బాహ్య బల ప్రభావానికి గురయిన ఒక కణవ్యవస్థ ఆ బలం వ్యవస్థ ద్రవ్యరాశి కేంద్రం వద్ద ప్రయోగించినట్లుగా గమనంలో లోనికి వస్తుంది.

3. భూమి–చంద్రుడు వ్యవస్థ ద్రవ్యరాశి కేంద్రం పరంగా సూర్యుని చుట్టూ భ్రమణాలను వివరించండి.

జ : భూమి – చంద్రుడు వ్యవస్థ ద్రవ్యరాశి కేంద్రం భూకేంద్రానికి దగ్గరగా ఉంటుంది. సూర్యుని వల్ల గురుత్వాకర్షణ బలం ఈ వ్యవస్థ ద్రవ్యరాశి కేంద్రం వద్ద మాత్రమే ప్రయోగింపబడుతున్నట్లుగా భూమి – చంద్రుడు వ్యవస్థ సూర్యుని చుట్టూ దీర్ఘ వృత్తాకార మార్గంలో తిరుగుతూ ఉంటుంది. ఈ వ్యవస్థ ద్రవ్యరాశి కేంద్రం సూర్యుని చుట్టూ దీర్ఘ వృత్తాకారంలో తిరుగుతూ ఉంటుంది.

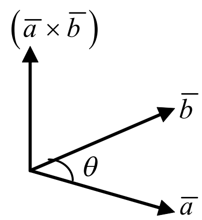
4. సదిశా లబ్ధాన్ని నిర్వచించండి. దాని ధర్మాలను, రెండు ఉదాహరణలను తెలపండి.

జ : సదిశా లబ్ధము

రెండు సదిశల పరిమాణములు మరియు వాటి మధ్య కోణం యొక్క Sin విలువల లబ్ధమును వాటి సదిశాలబ్ధము అంటారు.

$\vec{A}$ మరియు $\vec{B}$ అనే రెండు సదిశలు θ కోణం చేస్తూ వుంటే వాటి సదిశాలబ్ధం $\vec{A}\times\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta\hat{n}$.

ఇందు $\hat{n}$ అనునది $\vec{A}$ మరియు $\vec{B}$ లను కల్గియున్న తలంనకు లంబంగా గల ఏకాంక సదిశ.



ఉదా : 1) టార్క్ $\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}$

$\vec{\tau}$ దిశ $\vec{r}$ మరియు $\vec{F}$ లకు లంబముగా ఉంటుంది. నీ

2) కోణీయ ద్రవ్యవేగము , $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}$

సదిశ లబ్ధ ధర్మాలు

1) సదిశా లబ్ధము ఒక సదిశరాశి.

2) సదిశా లబ్ధం స్థిత్యంతర ధర్మాన్ని పాటించదు. $\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{b}\times\vec{a}$ మరియు $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

3) విభాగ న్యాయమాన్ని పాటిస్తుంది.

$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

4) సదిశల మధ్య కోణము $\theta=0^0$ అయిన సదిశా లబ్ధము శూన్యము.

5) సదిశల మధ్య కోణము $\theta=90^0$ అయిన సదిశా లబ్ధము గరిష్ఠము.

6) రెండు సమాన సదిశల మధ్య సదిశాలబ్ధము శూన్యము. $\vec{a}\times\vec{a}=0$

7) $\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=0$

$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k},\hat{j}\times\hat{k}=\hat{i},\hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$

$\hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k}$; $\hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i}$; $\hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}$ \

ఉదా : 1. కోణీయ ద్రవ్యవేగం $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$

2. రేఖీయ వేగం $\vec{V}=\vec{\omega}\times\vec{r}$

5. కోణీయ వేగం నిర్వచనం తెలుపండి. $v=r\omega$ రాబట్టండి.

జ : కోణీయ వేగం (ω)

కోణీయ స్థానభ్రంశంలోని మార్పురేటును కోణీయ వేగం అంటారు.

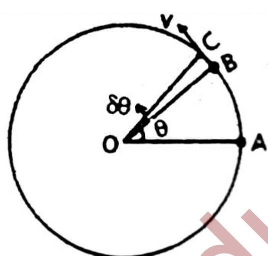
కోణీయ వేగం $\omega = \dfrac{\text{కోణీయ స్థానభ్రంశం}}{\text{కాలము}} = \dfrac{\theta}{t}$

$$\therefore \omega = \frac{\theta}{t}$$

v = rω:

పటంలో చూపినట్లు $'p'$ అను ఒక కణం r వ్యాసార్థం గల వృత్తాకార మార్గంలో చలిస్తున్నదనుకొండి. t కాలవ్యవధి వద్ద తత్కాల కోణీయ వేగం $\omega = \lim_{\delta t \to 0}\left(\frac{\delta\theta}{\delta t}\right) = \frac{d\theta}{dt}$

రేఖీయ స్థానభ్రంశము లేదా చాపం పొడవు $BC =$ కోణము× వ్యాసార్థము $= \delta\theta \times r$



$\therefore$ రేఖీయ వేగం $v = \lim_{\delta t \to 0} \dfrac{BC}{\delta t} = \lim_{\delta t \to 0} \dfrac{r\delta\theta}{\delta t}$

$$= r\left(\lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta\theta}{\delta t}\right)$$

$$= r.\frac{d\theta}{dt}$$

$$\therefore v = r\omega$$

$\therefore$ రేఖీయ వేగం = వ్యాసార్థం × కోణీయ వేగం

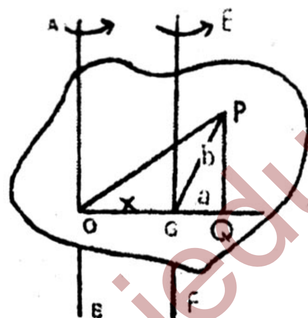
దీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు

1. సమాంతర అక్ష సిద్ధాంతాన్ని తెలిపి, నిరూపించండి.

జ : సమాంతర సిద్ధాంతము

ఏదైనా వస్తువులో ద్రవ్యరాశి కేంద్రం గుండా పోవు అక్షానికి సమాంతరంగా గల వేరొక అక్షం పరంగా జడత్వ భ్రామకం (I), ద్రవ్యరాశి కేంద్రం గుండా పోవు అక్షపరంగా గల జడత్వ భ్రామకం (I_G) మరియు వస్తువు ద్రవ్యరాశిని (M) అక్షముల మధ్యగల లంబదూరపు వర్గము (R^2) చేత గుణించి కలుపగా వచ్చు మొత్తానికి సమానం.

$$I = I_G + MR^2$$



నిరూపణ

ఒక వస్తువు ద్రవ్యరాశి M మరియు దాని ద్రవ్యరాశి కేంద్రం 'G' అనుకొండి. ఈ వస్తువును అనేక కణాల సముదాయంగా భావించవచ్చును. కాబట్టి P అనే కణం దానికి తీసుకొండి. ద్రవ్యరాశి కేంద్రం గుండా పోవు అక్షం 'EF'. దీనికి సమాంతరంగా ఉండి x లంబదూరంలో గల బిందువు 'O' గుండా పోవు అక్షం 'AB'అనుకొండి.

'm' ద్రవ్యరాశి కల్గిన P కణం 'EF' అక్షం నుండి GP లంబదూరంలో ఉంది.

EF అక్షంపరంగా P జడత్వ భ్రామకము $= m\, GP^2$

$\therefore$ ద్రవ్యరాశి కేంద్రం గుండా పోవు అక్షం 'EF' పరంగా కణం జడత్వ భ్రామకం $I_G = \sum m(GP)^2$...........(1)

P అనే కణం AB అక్షం నుండి గల లంబదూరం OP కావున 'AB' అక్షం పరంగా కణం జడత్వ $= m, OP^2$

$\therefore AB$ అక్షం పరంగా వస్తువు జడత్వ భ్రామకం $= \sum m\, OP^2$ ....(2)

పటం నుండి ΔOPQ లంబకోణ త్రిభుజంలో $OP^2 = OQ^2 + PQ^2 \quad OQ = OG + GQ$

$$\therefore OP^2 = (OG+GQ)^2 + PQ^2 = OG^2 + GQ^2 + 2OG.GQ + PQ^2$$
$$= OG^2 + [GQ^2 + PQ^2] + 2OG.\,GQ$$

$\therefore \Delta GPQ$ లంబకోణ త్రిభుజంలో $GP^2 = GQ^2 + PQ^2$ అవుతుంది

$$\therefore OP^2 = OG^2 + GP^2 + 2OG.GQ \ldots\ldots\ldots..(3)$$

$$\therefore I = \Sigma m(OG^2 + GP^2 + 2OG.GQ) = \Sigma m\ OG^2 + \Sigma m\ GP^2 + \Sigma m\, 2OG.\,GQ$$

$$I = \Sigma mx^2 + \Sigma m.GP^2 + \Sigma m.2x.GQ \quad (\because OG = x);$$

$\therefore x$ స్థిరరాశి, $I_G = \Sigma m\ GP^2$; $\Sigma m = M$ వస్తువు ద్రవ్యరాశి

$\Sigma m.GQ = 0$. (ద్రవ్యరాశి కేంద్రం పరంగా వస్తువులోని అన్ని కణాల భారాల భ్రామకాల బీజీయం మొత్తం శూన్యం)

$$\therefore I = I_G + mx^2$$

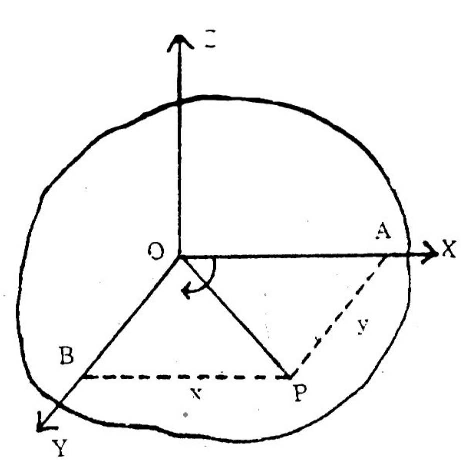
కావున సమాంతరాక్ష సిద్ధాంతం నిరూపింపబడినది.

2. లంబాక్ష సిద్ధాంతాన్ని తెలిపి నిరూపించండి.

జ. లంబాక్ష సిద్ధాంతము

ఒక సమతల పటలానికి లంబంగా,ఏదో ఒక బిందువు గుండా పోయే అక్షం పరంగా జడత్వ భ్రామకం, ఆ పటల తలంలో సరస్పరం లంబంగా ఉండి అదే బిందువు గుండా పోయే రెండు అక్షాల పరంగా గల జడత్వ భ్రామకాల మొత్తానికి సమానం.

$$I_z = I_x + I_y$$



నిరూపణ

P అను ఏదైనా ఒక కణం ద్రవ్యరాశి $'m'$ మరియు అది $X-$అక్షం నుండి y దూరంలోను, $Y-$అక్షం నుండి x దూరంలోను ఉందనుకొండి. మూలబిందువు $'O'$ గుండా పోవు లంభాక్షము $Z-$ అక్ష పరంగా దాని జడత్వ భ్రామకం.

$I_z = \Sigma m\, OP^2 = \Sigma mr^2$

కాని ΔOAP నుండి $OP^2 = OA^2 + AP^2 = x^2 + y^2$

$$\therefore I_z = \Sigma m(x^2 + y^2) = \Sigma mx^2 + \Sigma my^2$$

$X-$అక్షపరంగా జడత్వ భ్రామకం $= I_x = \Sigma my^2$

$Y-$అక్షం అక్షపరంగా జడత్వ భ్రామకం $= I_y = \Sigma mx^2$

$\therefore I_z = \Sigma my^2 + \Sigma mx^2 = I_x + I_y$

$\therefore I_z = I_x + I_y$

కావున లంబాక్ష సిద్ధాంతము నిరూపింపబడినది.

3. కోణీయ ద్రవ్యవేగ నిత్యత్వ నియమాన్ని ఉదాహరణతో వివరించండి.

జ : కోణీయ ద్రవ్యవేగ నిత్యత్వం

"బాహ్యబల భ్రామక ప్రయోగము లేనప్పుడు ఒక వ్యవస్థలోని మొత్తం కోణీయ ద్రవ్యవేగము స్థిరం".

ఉదాహరణ 1

ఒక వ్యక్తి భ్రమణాలు చేయుచున్న పలక పై చేతులు చాచి సమాన బరువులతో పట్టుకొని స్థిర కోణీయ వేగంతో భ్రమణాలు చేస్తున్నాడనుకొండి. అతడు తన చేతులను ముడుచుకొన్నచో జఢత్వ భ్రామకం తగ్గి, కోణీయ వేగం పెరుగుతుంది. చేతులను చాచినపుడు జఢత్వ భ్రామకం I_1 కోణీయ వేగం ω_1. చేతులు ముడిచినపుడు జఢత్వ భ్రామకం I_2 కోణీయ వేగం ω_2 అయిన,

కోణీయ ద్రవ్యవేగ నిత్యత్వం ప్రకారం, $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$

కాని $I_1 > I_2$

$$\therefore \omega_1 < \omega_2$$

ఉదాహరణ 2

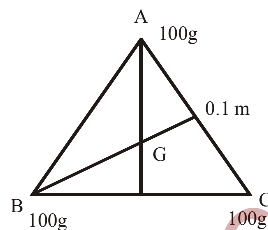
నాట్యం చేసేవారు. స్కేటర్లు, నీటిలోనికి డైవ్ చేసేవారు. కోణీయ ద్రవ్యవేగ నియమం వలన స్థిరత్వాన్ని పొందుతారు.

లెక్కలు

1. 10 cm భుజం కలిగిన ఒక సమబాహు త్రిభుజ శీర్షాల వద్ద ప్రతిది 100 gm ద్రవ్యరాశి ఉన్న మూడు కణాలను ఉంచారు. ఆ త్రిభుజ కేంద్రాభాసం ద్వారా పోతూ, త్రిభుజ తలానికి లంబంగా ఉన్న అక్షం పరంగా ఈ వ్యవస్థ జడత్వ భ్రామకాన్ని కనుక్కోండి.

జ: పటం నుండి $AG = BG = CG = \frac{0.1}{\sqrt{3}} m$

వ్యవస్థ జడత్వ భ్రామకము = $3\ mr^2$



$$=3 \times 0.1 \times \left(\frac{0.1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 3\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{100}\times\frac{1}{3} = 10^{-3}\,Kg - m^2$$

2. క్షితిజ తలంలో భ్రమణం చెందే తిరుగుడు బల్లపై దాని కేంద్రం నుంచి 10 cm దూరంలో ఒక నాణాన్ని ఉంచారు. తిరుగుడు బల్ల, నాణాల మధ్య స్థైతిక ఘర్షణ గుణకం 0.8 అయితే, నాణెం బల్ల పై జారడం మొదలు పెట్టడానికి తిరుగుడు బల్ల భ్రమణ పౌనఃపున్యం ఎంత ఉండాలి ?

జ: $mr\omega^2 = \mu\, mg$

or $r\times 4\pi^2 n^2 = \mu\, g$

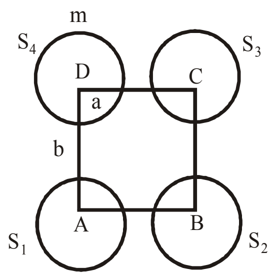
or $n^2 = \frac{\mu g}{4\pi^2 r} = \frac{0.8\times 9.8}{4\pi^2\times 0.1} = 2$

or $n = \sqrt{2}$ rev/s

3. 2a వ్యాసం, ద్రవ్యరాశి ఉన్న నాలుగు గోళాలు కేంద్రాలను భూజంగా ఉన్న ఒక చతురస్ర నాలుగు శీర్షాల వద్ద ఉంచారు. ఒక భుజం భ్రమణ అక్షంగా ఈ వ్యవస్థ జడత్వ భ్రామకాన్ని లెక్కించండి.

జ: వ్యాసం =2a

r = a, ద్రవ్యరాశి = m



I_1, I_2, I_3 మరియు I_4 అనునవి AB పరంగా S_1, S_2, S_3 మరియు S_4ల జడత్వ భ్రామకాలు

$$\therefore\ I_1 = I_2 = \frac{2ma^2}{5}$$

$$I_3 = I_4 = \frac{2ma^2}{5} + mb^2$$

$$\therefore \text{ వ్యవస్థ జడత్వ భ్రామకం } = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \left(2 \times \frac{2ma^2}{5}\right) + 2\left(\frac{2ma^2}{5} + mb^2\right)$$

$$= \frac{8ma^2}{5} + 2mb^2$$

4. నిమిషానికి 300 భ్రమణాలు చేసే ఒక గతిపాలక చక్రం జడత్వ భ్రామకం 0.3 కేజీమీ². 20 సెకన్లలో దీన్ని నిశ్చల స్థితికి తీసుకురావడానికి అవసరమైన టార్క్‌ను కనుక్కోండి.

జ: $I = 0.3$ Kg-m², $n = 300/60 = 5$ rev/s

$\omega_0 = 2\pi n = 2\pi \times 5 = 10\pi$ rad/s

$\omega = \omega_0 + \alpha t$ or $0 = 10\pi + 20\alpha$

Or $\alpha = -10\pi/20 = -\pi/2$ rad s^{-2}

$$\tau = I\alpha = 0.3 \times \pi/2 = 0.3 \times \frac{22}{7} \times \frac{1}{2} = 0.471 \text{ Nm}$$

5. ఒక గపాలక చక్రం పై 100J పని జరిగినప్పుడు దాని కోణీయ వేగం 60rpm నుంచి 180rpm కి పెరిగింది. చక్రం జడత్వ భ్రామకాన్ని లెక్కించండి.

జ: $W = 100$ J, $\omega_1 = 60$ rpm $= 2\pi$ rad s^{-1}

$\omega_2 = 180$ rpm $= 6\pi$ rad s^{-1}

జరిగిన పని = గతిజశక్తిలోని మార్పు

$$100 = \frac{1}{2}I\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right) = \frac{1}{2}I\left(36\pi^2 - 4\pi^2\right)$$

$$\text{Or } I = \frac{200}{32\pi^2} = \frac{5}{8} = 0.63 \text{ Kg-m}^2$$

అదనపు లెక్కలు

1. క్రింది ఇచ్చిన వాక్యాలను జాగ్రత్తగా చదివి, తగిన కారణాలతో, అవి ఒప్పో, తప్పో తెలపండి.
ఎ) దొర్లుడు గమనంలో ఘర్షణ బలం వస్తువు ద్రవ్యరాశి కేంద్ర గమన దిశలోనే పనిచేస్తుంది.
బి) దొర్లుడు గమనంలో స్పర్శా బిందువు తాక్షణిక వడి శూన్యం.
సి) దొర్లుడు గమనంలో స్పర్శా బిందువు తాక్షణిక త్వరణం శూన్యం.
డి) శుద్ధ దొర్లుడు గమనానికి, ఘర్షణకు వ్యతిరేకంగా చేసిన పని శూన్యం.
ఇ) ఘర్షణ రహిత వాలుతలం వెంట క్రిందికి గమనంలో ఉన్న ఒక చక్రం స్లిప్ అవుతుంది. (శుద్ధ దొర్లుడు గమనం కలిగి ఉండదు)

జ: ఎ) నిజం　　బి) నిజం　　సి) తప్పు　　డి) తప్పు　　ఇ) నిజం

2. బలం $7\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}$. వల్ల, మూలబిందువు పరంగా టార్క్‌ను కనుక్కోండి. బలం ప్రయోగించిన కణం స్థానసదిశ $\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$.

జ $r=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$; $F=7\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}$

టార్క్ $\tau = r \times F$

$$\tau = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 2\hat{i}+12\hat{j}+10\hat{k}$$

3. **M** ద్రవ్యరాశి, l పొడవు ఉన్న ఒక కడ్డీకి లంబంగా, ఒక కొన ద్వారా పోయే అక్షం పరంగా జడత్వ భ్రామకం ఎంత ?

జ: $I = Ml^2/12$.

సమాంతర అక్ష సిద్ధాంత ప్రకారం,

$$I' = I + Ma^2$$

ఇందు $a = 1/2$ $\quad I' = M\dfrac{l^2}{12} + M\left(\dfrac{l}{2}\right) = \dfrac{Ml^2}{3}$

4. ఒక కంకణం స్పర్శరేఖ పరంగా కంకణ జడత్వ భ్రామకాన్ని కనుక్కోండి.

జ: సమాంతర అక్ష సిద్ధాంత ప్రకారం,

$$I_{\text{tangent}} = I_{\text{dia}} + MR^2 = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

5. 20 కేజి ద్రవ్యరాశి ఉన్న ఒక ఘనసూపం దాని అక్షం పరంగా $100\,rad\,s^{-1}$. కోణీయ వడితో భ్రమణాలు చేస్తుంది. సూపం వ్యాసార్థం 0.25m. సూపం గతిజశక్తి ఎంత ? సూపం అక్షంపరంగా కోణీయ ద్రవ్యవేగ పరిమాణం ఎంత ?

జ: $M = 20\,kg,\ R = 0.25m,\ \omega = 100\,s^{-1}$

$$I = \frac{MR^2}{2} = \frac{20\times(0.25)^2}{2} = 0.625\,kg-m^2$$

భ్రమణ గతిశక్తి $\text{K.E.} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\times 0.625\times(100)^2 = 3125\,J$

కోణీయ ద్రవ్యవేగం $L = I\omega = 0.625\times 100 = 62.5\ T-S$

6. 2 m వ్యాసార్థం ఉన్న ఒక కంకణం 100 కేజి ల బరువు కలిగి ఉంది. అది ఒక క్షితిజ సమాంతర తలంపై, దాని ద్రవ్యరాశి కేంద్రం $20\,cm/s$ వడితో గమనంలో ఉండేటట్లు దోర్లుతున్నది. దీని నిశ్చలస్థితికి తేవడానికి ఎంత పని చేయవలసి ఉంటుంది?

జ: $R = 2m,\ M = 100\,kg, V = 20\,cm/s = 0.2\,m/s$

మొత్తం శక్తి $= \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

$$= \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\left(MR^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2 = Mv^2$$

చేయవలసిన పని $W = Mv^2 = 100(0.2)^2 = 4$ Joule

7. 10 gm ద్రవ్యరాశి ఉన్న ఒక తుపాకి గుండును $500\,m/s$ వేగంతో ఒక తలుపువైపు పేల్చితే అది సరిగ్గా తలుపు కేంద్రం వద్ద దానిలో ఇమిడిపోతుంది. తలుపు 1.0మీ వెడల్పు, ద్రవ్యరాశి 12కేజి కలిగి ఉంది. తలుపు ఒక అంచువద్ద మడత బందులతో, నిట్టనిలువు అక్షంపరంగా ఘర్షణ లేకుండా భ్రమణం చెందగలదు. తుపాకి గుండు తలుపులో ఇమిడిన వెంటనే తలుపు కోణీయ వడిని కనుక్కోండి.

జ: $I = \frac{ML^3}{3} = \frac{12\times 1.0^2}{3} = 4\,kg-m^2$

$mvr = I\omega$

$$\left(10\times 10^{-3}\right)\times 500\times\frac{1}{2} = 4\times\omega$$

Or $\omega = 0.625\,rad/s$