సగటు-5

సగటులు – కొన్ని ధర్మాలు

అంకమధ్యమం, గుణమధ్యమం, హరాత్మక మధ్యమాలకు సంబంధించి కొన్ని ధర్మాల గురించి చర్చిద్దాం.

అంకమధ్యమం:

$x_1, x_2, x_3, ...x_n$ల అంకమధ్యమం = $\bar{x}$ అనుకుంటే అప్పుడు

i) $x_1+k, x_2+k, x_3+k, ...x_n+k$ల అంకమధ్యమం = $\bar{x}+k$ అంటే దత్తాంశంలోని ప్రతి రాశికి ఒక స్థిరసంఖ్యను కలిపితే వాటి అంకమధ్యమానికి కూడా అదే స్థిరసంఖ్యను కలపాలి.

ii) $x_1-k, x_2-k, x_3-k, ...x_n-k$ల అంకమధ్యమం = $\bar{x}-k$

iii) $kx_1, kx_2, kx_3, ...kx_n$ల అంకమధ్యమం = $k\bar{x}$

iv) $\frac{x_1}{k}, \frac{x_2}{k}, \frac{x_3}{k}, ..., \frac{x_n}{k}$ ల అంకమధ్యమం = $\frac{\bar{x}}{k}$

v) దత్తాంశంలోని ప్రతి రాశి k శాతం పెరిగినా లేదా తగ్గినా వాటి అంకమధ్యమం కూడా k శాతం పెరుగుతుంది లేదా తగ్గుతుంది.

ఉదా: ఒక కంపెనీలో పని చేసే కొద్దిమంది ఉద్యోగుల సగటు జీతం ₹ 8000 అనుకోండి. అప్పుడు

i) ప్రతి ఉద్యోగి వేతనం రూ. 500 పెరిగిందనుకుంటే, మారిన సగటు వేతనం = 8000 + 500 = ₹ 8,500.

ii) ప్రతి ఉద్యోగి వేతనం ₹ 300 తగ్గిందనుకుంటే, అప్పుడు మారిన సగటు వేతనం = 8000 – 300 = ₹ 7700.

iii) ప్రతి ఉద్యోగి వేతనం రెట్టింపైందనుకుంటే, అప్పుడు మారిన సగటు వేతనం = 2 × 8000 = ₹ 16,000.

iv) ప్రతి ఉద్యోగి వేతనం సగమైందనుకుంటే, అప్పుడు మారిన సగటు వేతనం = 8000/2 = ₹ 4,000.

v) ప్రతి ఉద్యోగి వేతనం 10 శాతం పెరిగిం దనుకుంటే, అప్పుడు మారిన సగటు వేతనం = 8000×(100+10)/100 = ₹ 8,800.

గుణమధ్యమం:

$x_1, x_2, x_3, ...x_n$ల గుణమధ్యమం =

SAKSHI

$\bar{x}$ అనుకుంటే,

i) $kx_1, kx_2, kx_3, \ldots kx_n$ల గుణమధ్యమం = $k\bar{x}$

అంటే దత్తాంశంలోని ప్రతి రాశిని ఒక స్థిరసంఖ్యతో గుణిస్తే, వాటి గుణమధ్యమాన్ని కూడా అదే స్థిరసంఖ్యతో గుణించాలి.

ii) $\frac{x_1}{k}, \frac{x_2}{k}, \frac{x_3}{k}, \ldots, \frac{x_n}{k}$ ల గుణమధ్యమం = $\frac{\bar{x}}{k}$

iii) $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3} \ldots \frac{1}{x_n}$ ల గుణమధ్యమం = $\frac{1}{\bar{x}}$

iv) $x_1^k, x_2^k, x_3^k \ldots x_n^k$ ల గుణమధ్యమం = $(\bar{x})^k$

హరాత్మకమధ్యమం:

$x_1, x_2, x_3, \ldots x_4$ల హరాత్మక మధ్యమం = $\bar{x}$ అనుకుంటే, అప్పుడు

i) $kx_1, kx_2, kx_3, \ldots kx_n$ల హరాత్మకమధ్యమం = $k\bar{x}$

ii) $\frac{x_1}{k}, \frac{x_2}{k}, \frac{x_3}{k}, \ldots, \frac{x_n}{k}$ ల

హరాత్మక మధ్యమం = $\frac{\bar{x}}{k}$

దత్తాంశంలోని రాశుల ప్రమాణాల ప్రభావం ఆయా రకాల సగటులపై ఎలా ఉంటుందో ఉదాహరణల ద్వారా చర్చిద్దాం.

ఉదా: ఒక తరగతిలోని విద్యార్థుల బరువులను కిలోల్లో, గ్రాముల్లో నమోదు చేశారు. ఐతే బరువుల ప్రమాణాల ప్రభావం అంకమధ్యమం, గుణమధ్యమం, హరాత్మక మధ్యమాలపై ఉంటుందో, లేదో కనుక్కోండి.

సమాధానం: తరగతిలోని విద్యార్థుల బరువులను కిలోలతో నమోదు చేస్తే ఈ విధంగా ఉన్నాయనుకోండి. $w_1, w_2, w_3 \ldots w_n$ కిలోలు

ఈ బరువుల అంకమధ్యమం= బరువుల మొత్తం/బరువుల సంఖ్య

$= w_1+w_2+w_3+\ldots w_n / n$ కిలోలు

$= w_a$ కిలోలు అనుకోండి

$= 1000\ w_a$ గ్రాములు ....(1)

($\because$ 1 కిలో = 1000 గ్రాములు)

ఈ బరువుల గుణమధ్యమం=

(బరువుల లబ్దం)$^{1/\text{బరువుల సంఖ్య}}$

$= (w_1.w_2.w_3....w_n)^{1/n}$

కిలోలు=w_g కిలోలు అనుకోండి

$= 1000\ w_g$ గ్రాములు ....(2)

ఈ బరువుల హరాత్మక మధ్యమం =

బరువుల సంఖ్య/బరువుల వ్యుత్క్రమాల మొత్తం

$$=\frac{n}{\frac{1}{w_1}+\frac{1}{w_2}+\frac{1}{w_3}+......+\frac{1}{w_n}}$$

కిలోలు = w_n కిలోలు అనుకోండి.

$= 1000\ w_n$ గ్రాములు ....(3)

ఇప్పుడు విద్యార్థుల బరువులను గ్రాముల్లో నమోదు చేస్తే ఈ విధంగా ఉంటాయి. $1000w_1$, $1000w_2$, $1000w_3$,....$1000w_n$ గ్రాములు.

ఈ బరువుల అంకమధ్యమం=$1000w_1+$ $1000w_2+$ $1000w_3+$ ....$1000w_n/n$ గ్రా.

$1000\times (w_1 \times w_2 \times w_3 \times ....w_n)$ గ్రా.

$= 1000w_a$ గ్రాములు ....(4)

(1) 4 (4) ల నుంచి రెండు సందర్భాల్లో బరువుల అంకమధ్యమం సమానంగా వచ్చింది. అంటే బరువుల ప్రమాణాల ప్రభావం అంకమధ్యమంపై ఉండదని చెప్పవచ్చు. ఈ బరువుల గుణమధ్యమం $=(1000w_1 \times 1000w_2 \times 1000w_3$

$\times ...w_n)^{1/n}$ గ్రా.

$=(1000^n \times w_1 \times w_2 \times w_3 \times ...w_n)^{1/n}$గ్రా.

$=1000 \times (w_1 \times w_2 \times w_3 \times ...w_n)^{1/n}$ గ్రాములు.

$= 1000\ w_g$ గ్రాములు..... (5)

(2), (5)ల నుంచి బరువుల ప్రమాణాల ప్రభావం గుణమధ్యమంపై కూడా ఉండదని చెప్పొచ్చు.

ఈ బరువుల హరాత్మక మధ్యమం

$$=\frac{n}{\frac{1}{1000w_1}+\frac{1}{1000w_2}+\frac{1}{1000w_3}+......+\frac{1}{1000w_n}}$$ గ్రాములు

$$=1000\times\frac{n}{\frac{1}{w_1}+\frac{1}{w_2}+\frac{1}{w_3}+......+\frac{1}{w_n}}$$ గ్రాములు

SAKSHI

= 1000 w_n గ్రాములు..... (6)

(3), (6)ల నుంచి బరువుల ప్రమాణాల ప్రభావం హరాత్మక మధ్యమంపై కూడా ఉండదని చెప్పొచ్చు.

ఉదా: ఒక థర్మామీటర్‌లో నమోదైన ఉష్ణోగ్రతల అంకమధ్యమాన్ని కనుక్కోవాలంటే, ఆ ఉష్ణోగ్రతలు ఏ ప్రమాణంలో (సెంటిగ్రేడ్లు లేదా ఫారన్‌హీట్లు) ఉన్నా, వాటి ప్రభావం ఉండదు. అదే గుణమధ్యమాన్ని గణించేటప్పుడు ఉష్ణోగ్రతల ప్రమాణాల ప్రభావం ఉంటుందని నిరూపించండి?

సమాధానం: మొదట conversion సూత్రాన్ని పరిశీలిద్దాం. డిగ్రీ సెంటిగ్రేడ్‌ల్లో ఉన్న ఉష్ణోగ్రతను డిగ్రీ ఫారెన్‌హీట్‌లలోకి మార్చాలంటే సూత్రం:

$$F = 32 + \frac{9}{5} \times C$$

మొదట ఉష్ణోగ్రతలను డిగ్రీ సెంటీగ్రేడ్‌ల్లో నమోదు చేస్తే ఈ విధంగా ఉంటాయి.

$C_1, C_2, C_3....C_n$

వీటి అంకమధ్యమం=

$C_1+C_2+C_{3+}....+C_n/n$

= $\bar{C}$ డిగ్రీ సెంటిగ్రేడ్లు అనుకోండి

$$= 32 + \frac{9}{5} \times \bar{C}$$

డిగ్రీ ఫారెన్‌హీట్లు ....(1).

వీటి గుణమధ్యమం = $(C_1.C_2.C_3......C_n)^{1/n}$

C_g డిగ్రీ సెంటిగ్రేడ్లు అనుకొనండి.

$$= 32 + \frac{9}{5} \times C_g$$

డిగ్రీ ఫారెన్‌హీట్లు ......(2)

ఇప్పుడు ఉష్ణోగ్రతలను డిగ్రీఫారెన్ హీట్లలోకి (°F) నమోదు చేస్తే, వీటి అంకమధ్యమం

$$= \frac{32 + \frac{9}{5} \times C_1,\ 32 + \frac{9}{5} C_2,\ 32 + \frac{9}{5} C_3 ......\ 32 + \frac{9}{5} C_n}{n}$$

$$= \frac{32n + \frac{9}{5}(C_1 + C_2 + C_3 ...... + C_n)}{n}$$

$$= 32 + \frac{9}{5} \times \bar{C}$$

డిగ్రీ ఫారెన్‌హీట్లు ....(3)

(1), (3)ల నుంచి ఉష్ణోగ్రతల ప్రమాణాల ప్రభావం అంకమధ్యమంపై ఉండదని చెప్పొచ్చు. ఎందుకంటే (1), (3)ల్లో వచ్చిన అంకమధ్యమాలు రెండూ సమానం ఇప్పుడు పై ఉష్ణోగ్రతల

గుణమధ్యమం

$$=\left[\left(32+\frac{9}{5}C_1\right)\times\left(32+\frac{9}{5}C_2\right)\times....\times\left(32+\frac{9}{5}C_n\right)\right]^{\frac{1}{n}}$$

డిగ్రీ ఫారెన్‌హీట్లు ....(4)

(2), (4)ల్లో వచ్చిన ఉష్ణోగ్రతల గుణమధ్యమాలు రెండూ సమానం కావు. కాబట్టి ఉష్ణోగ్రతల ప్రమాణాల ప్రభావం గుణమధ్యమంపై ఉంటుందని చెప్పొచ్చు.

నోట్: ఒక రాశిని ఒక ప్రమాణం నుంచి మరో ప్రమాణానికి మార్చడానికి ఉపయోగించే con version సూత్రంలో కేవలం గుణకారాలు (×), భాగాహారాలు (÷) మాత్రమే ఉంటే ప్రమాణాల ప్రభావం అంకమధ్యమం, గుణమధ్యమం, హరాత్మక మధ్యమాలు వేటిపైనా ఉండదు.

ఉదా: 1) మీటర్లు, సెంటీమీటర్లు: 4 మీ।। = 4×100 సెం.మీ.

2) అడుగులు, అంగుళాలు: 5 అడుగులు = 5×12 అంగుళాలు

ఒక వేళ conversion సూత్రంలో గుణకారాలు, భాగాహారాలతో పాటు కూడికలు (+), తీసివేతలు (–) కూడా ఉంటే ప్రమాణాల ప్రభావం కేవలం అంకమధ్యమంపై మాత్రమే ఉండదు. గుణమధ్యమం, హరాత్మక మధ్యమాలపై ఆ ప్రమాణాల ప్రభావం ఉంటుంది.

ఉదా: డిగ్రీ ఫారెన్ హీట్లు, డిగ్రీ సెంటిగ్రేడ్లు.

$$F=32+\frac{9}{5}\times C,$$

ఈ conversion సూత్రంలో కూడిక, గుణకారం, భాగహారం ఉన్నాయి. కాబట్టి ప్రమాణాల ప్రభావం గుణమధ్యమం, హరాత్మక మధ్యమం రెండింటిపైనా ఉంటుంది.

ఉదా: ఒక వసతి గృహంలో 100 మంది బాలురు ఉన్నారు. 20 మంది బాలురు వసతి గృహంలో అదనంగా చేరగా వసతి గృహం నిర్వహణకు ఒక రోజుకు అయ్యే ఖర్చు ₹ 400 పెరిగింది. ఒక్కో బాలుడికి ఒక్కో రోజుకి అయ్యే సగటు ఖర్చు ₹ 2.50 తగ్గింది. ఐతే ప్రస్తుతం ఆ వసతి గృహ నిర్వహణకు ఒక నెలకు అయ్యే మొత్తం ఖర్చు ఎంత?

సమాధానం: వసతి గృహంలో 100 మంది బాలురు ఉన్నప్పుడు ఒక్కో బాలుడికి ఒక్కో రోజుకి అయ్యే సగటు ఖర్చు = ₹ x అనుకుందాం. అప్పుడు ఒక రోజుకు వసతి గృహ నిర్వహణకు అయ్యే మొత్తం ఖర్చు = ₹ 100x

దత్తాంశం ప్రకారం, 20 మంది అదనంగా చేరిన తర్వాత వసతిగృహ నిర్వహణకు రోజుకి అయ్యే ఖర్చు ₹100x +400, అదే విధంగా ఒక్కో విద్యార్థికి ఒక్కో రోజుకి అయ్యే సగటు ఖర్చు = ₹ x–2.50 .... (1)

$\Rightarrow$ 120 మంది బాలురకు ఒక రోజుకు మొత్తం ఖర్చు = సగటు ఖర్చు × విద్యార్థుల సంఖ్య

$= (x - 2.50)\times 120 = 120x - 300$

కానీ $120x - 300 = 100x + 400$ కావాలి.

$\Rightarrow 120x - 100x = 400 + 300$

$\Rightarrow 20x = 700 \quad \Rightarrow x = 35$

ఇప్పుడు (1) నుంచి 120 మంది ఉన్నప్పుడు ఒక్కో విద్యార్థికి ఒక్కో రోజుకు అయ్యే సగటు ఖర్చు = 35 – 2.50 = ₹ 32.50

$\Rightarrow$ వసతిగృహం నిర్వహణకు ఒక నెలకు అయ్యే మొత్తం ఖర్చు

= సగటు ఖర్చు × విద్యార్థుల సంఖ్య × రోజుల సంఖ్య

= 32.50 × 120 × 30 = ₹ 1,17,000

$\therefore$ ప్రస్తుతం వసతిగృహ నిర్వహణకు ఒక నెలకు అయ్యే మొత్తం ఖర్చు = ₹ 1,17,000

SAKSHI