

సగటు-3

విభిన్న గ్రూపుల సగటు:

ఒక గ్రూపులోని రాశుల సంఖ్య 'P', సగటు 'x', మరొక గ్రూపులోని రాశుల సంఖ్య 'q', సగటు 'y' అయితే ఆ రెండు గ్రూపులను కలిపితే ఏర్పడే మిశ్రమ గ్రూపు సగటు =

$$\frac{Px + qy}{P + q}$$

ఒకవేళ మూడు గ్రూపులు ఉన్నట్లయితే (మూడో గ్రూపులోని రాశుల సంఖ్య 'r', సగటు 'z' అయితే), మిశ్రమ గ్రూపు సగటు =

$$\frac{Px + qy + rz}{P + q + r}$$

ఉదాహరణ:

1000 మంది ఉద్యోగులు ఒక కంపెనీలో ఉద్యోగి సగటు జీతం రు. 10,000. పురుష ఉద్యోగుల సగటు జీతం రు. 10,400, మహిళా ఉద్యోగుల సగటు జీతం రు. 8,400. అయితే కంపెనీలోని మహిళా ఉద్యోగుల శాతమెంత?

(ఏపీపీఎస్సీ, గ్రూప్-1-మోడల్ పేపర్ 2007)

సమాధానం:

పురుష ఉద్యోగుల సంఖ్య = 'x' అను కుంటే, మహిళా ఉద్యోగుల సంఖ్య = '1000-x' అవుతుంది. అప్పుడు మిశ్రమ గ్రూపు సగటు సూత్రాన్ని అనుసరించి

$$\frac{10,400x + 8,400(1000 - x)}{x + 1000 - x} = 10,000$$

$$\Rightarrow 84,00,000 + 2,000x =$$

$$1,00,00,000$$

$$\Rightarrow 2,000x = 16,00,000$$

$$\Rightarrow x = 800$$

$$\therefore \text{మహిళా ఉద్యోగుల సంఖ్య} = 1000 - x$$

$$= 1000 - 800 = 200$$

$$\text{మహిళా ఉద్యోగుల శాతం} = \frac{200}{1000} \times 100 = 20$$

∴ కంపెనీలో 20% మహిళా ఉద్యోగులు ఉన్నారు.

ఉదాహరణ:

ఒక తరగతిలోని మొత్తం 100 మంది విద్యార్థుల సగటు మార్కులు 56. మొదటి 20 మంది విద్యార్థుల సగటు మార్కులు 85. చివరి 40 మంది విద్యార్థుల సగటు మార్కులు 20. అయితే మిగిలిన విద్యార్థుల సగటు మార్కులు ఎంత?

సమాధానం:

మొదటి 20, చివరి 40 మంది విద్యార్థులను మినహాయిస్తే, మిగిలిన విద్యార్థులు

$$= 100 - 20 - 40 = 40$$

ఈ 40 మంది విద్యార్థుల సగటు మార్కులు = 'x' అనుకుంటే, అప్పుడు మిశ్రమ గ్రూపు సగటు సూత్రాన్ని అనుసరించి

$$\frac{20 \times 85 + 40 \times 20 + 40x}{20 + 40 + 40} = 56$$

$$\Rightarrow 1700 + 800 + 40x = 5,600$$

$$\Rightarrow 40x = 3,100$$

$$\Rightarrow x = \frac{3,100}{40} = 77.5$$

∴ మిగిలిన విద్యార్థుల సగటు మార్కులు
= 77.5

సగటు-రకాలు

గణితపు సగటు మూడు రకాలు:

1. అంకగణితపు సగటు లేదా మధ్యమం:

సగటు లేదా సరాసరి అంటే సాధారణంగా అంక మధ్యమం అనే అర్థం. దీన్ని మనం ఇదివరకే చర్చించాం.

2. గుణ మధ్యమం:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \text{ అనే రాశుల గుణ మధ్యమం} = (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \sqrt[n]{ab}$$

a, b అనే రెండు రాశుల గుణ మధ్యమం

ఉదాహరణ:

9, 4ల గుణ మధ్యమం ఎంత?

సమాధానం:

$$\begin{aligned} \text{గుణ మధ్యమం} &= \sqrt{9 \times 4} \\ &= \sqrt{36} \\ &= 6 \end{aligned}$$

3. హరాత్మక మధ్యమం:

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ అనే రాశుల హరాత్మక మధ్యమం

$$= \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

● a, b అనే రెండు రాశుల హరాత్మక

$$\text{మధ్యమం} = \frac{2ab}{a+b}$$

● a, b, c అనే మూడు రాశుల హరాత్మక మధ్యమం =

$$\frac{3abc}{ab+bc+ca}$$

● ఇచ్చిన ఏదైన దత్తాంశానికి పై మూడు రకాల సగటులను కనుక్కోవచ్చు. వాటి మధ్య సంబంధం ఈ విధంగా ఉంటుంది.

అంక మధ్యమం \geq గుణ మధ్యమం \geq హరాత్మక మధ్యమం.

● ఇచ్చిన దత్తాంశంలోని అన్ని రాశులు సమానంగా ఉన్నప్పుడు మాత్రమే పై మూడు సగటులు కూడా సమానంగా ఉంటాయి.

● హరాత్మక మధ్యమానికి కింది రెండు ఉప యోగాలు ఉన్నాయి.

1. సగటు వేగం:

వివిధ దశల్లో ప్రయాణించిన దూరం స్థిరంగా ఉన్నప్పుడు ఆయా దశల్లోని వేగాల హరాత్మక మధ్యమమే సగటు వేగం అవుతుంది.

2. సగటు ధర:

ఒక వస్తువు కొనుగోలుపై వివిధ కాలాల్లో సమాన పెట్టుబడులు పెట్టినప్పుడు ఆయా కాలాల్లో ఆ వస్తువు ధరల హరాత్మక మధ్య మమే ఆ వస్తువు సగటు ధర అవుతుంది.

ఉదాహరణ:

ఒక వ్యక్తి P నుంచి Q కు గంటకు 3 కి.మీ. వేగంతో చేరుకున్నాడు. మళ్ళీ తిరిగి Q నుంచి P కి గంటకు 6 కి.మీ. వేగంతో చేరాడు. అయితే అతని సగటు వేగం గంటకు ఎంత? (గ్రూప్-2, 2008)

సమాధానం:

P నుంచి Q కు, Q నుంచి P కి సమాన దూరం ఉంటుంది కాబట్టి ఆ రెండు వేగాల హారాత్మక మధ్యమమే సగటు వేగం అవుతుంది.

$$\therefore \text{సగటు వేగం} = \frac{2 \times 3 \times 6}{3 + 6}$$

$$\frac{36}{9} = 4$$

\therefore సగటు వేగం గంటకు 4 కి.మీ.

ఉదాహరణ:

నీవు 20 KMPH వేగంతో A నుంచి B కి, B నుంచి A కి 60 KMPH వేగంతో ప్రయాణిస్తే నీ సరాసరి వేగం ఎంత? నీ మిత్రుడు X నుంచి Y కి స్థిరంగా 30 KMPH వేగంతో ప్రయాణించి అర్ధగంటలో చేరుకున్నాడు. Y నుంచి Z కి 40 KMPH వేగంతో ప్రయాణించి ఒకటిన్నర గంటల్లో చేరుకుంటే నీ మిత్రుడి సగటు వేగం ఎంత?

(గ్రూప్-1 మెయిన్స్ 2008)

సమాధానం:

$$\text{నా సగటు వేగం} = \frac{2 \times 20 \times 60}{20 + 60}$$

$$= \frac{2400}{80} = 30$$

\therefore నా సగటు వేగం = 30 KMPH

దత్తాంశం నుంచి X , Y ల మధ్య దూరం =

$$30 \times \frac{1}{2}$$

= 15 కి.మీ.

$$Y, Z \text{ల మధ్య దూరం} = 40 \times \frac{3}{2}$$

$$= 60 \text{ కి.మీ.}$$

X, Y ల మధ్య దూరం, Y, Z ల మధ్య దూరం సమానం కాదు కాబట్టి సగటు వేగం మొత్తం దూరం

$$= \frac{\text{మొత్తం దూరం}}{\text{మొత్తం కాలం}}$$

మొత్తం కాలం

$$= \frac{15 + 60}{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}$$

$$= \frac{75}{2} = 37.5$$

∴ నా మిత్రుడి సగటు వేగం =
37.5 KMPH

ఉదాహరణ:

నాలుగు వేర్వేరు నెలల్లో లీటరు పాల ధర రు. 18, రు. 20, రు. 22, రు. 25గా ఉంది. ఒక వ్యక్తి ఈ నాలుగు నెలల్లోనూ పాల కొనుగోలుపై సమానంగా ఖర్చు చేస్తే లీటరు పాల సగటు ధర ఎంత?

(సివిల్ సర్వీసెస్-మెయిన్స్, 2004)

సమాధానం:

నాలుగు నెలల్లోనూ పెట్టుబడి/ఖర్చు సమానంగా ఉంది కాబట్టి ఆయా ధరల హారాత్మక మధ్యమమే సగటు ధర అవుతుంది.

∴ సగటు ధర =

$$\frac{4}{\frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \frac{1}{22} + \frac{1}{25}}$$

$$= \frac{4}{\frac{550 + 495 + 450 + 396}{9900}}$$

$$= \frac{4 \times 9900}{1891}$$

$$= 20.9413$$

∴ లీటరు పాల సగటు ధర = రు. 20.94

గమనిక:

a, b, c, d అనే నాలుగు రాశుల హారాత్మక మధ్యమం =

$$\frac{4abcd}{abc + abd + acd + bcd}$$

అనే సూత్రాన్ని కూడా పై సమస్యలో ఉపయోగించవచ్చు.

SAKSHI